Kvantum homogenizálás

Koniorczyk Mátyás

Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet

(jelentős részben Vladimír Bužek és Mário Ziman cikkei alapján)

ELFT Elméleti Fizika Iskola, Tihany, 2010 szeptember 1.

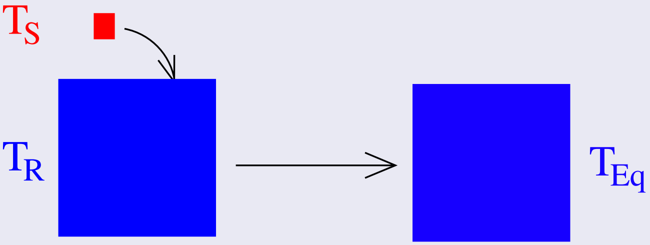
Motiváció

Theroetical phyiscists live in a classical world looking out in the quantum mechanical world.
The latter we describe only subjectively, in terms of procedures and results in our classical domain.

J. S. Bell

Motiváció

Egyensúly (pl. hőmérsékleti)



Motiváció

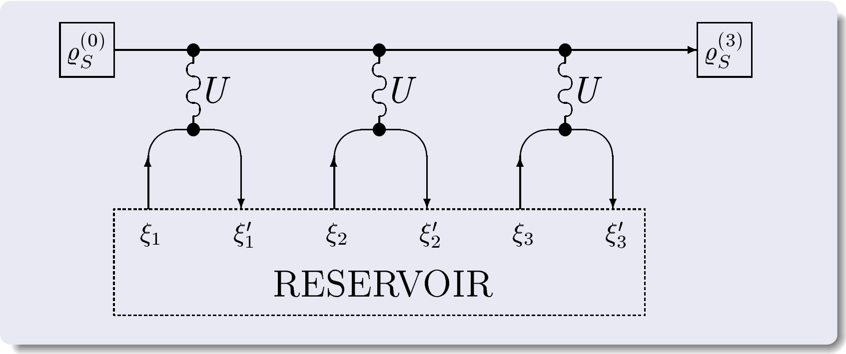
Kvantum modell

- Legyen egyszerű,
- Analitikusan megérthető,
- Legyen benne jelen a termalizációhoz hasonló viselkedés

Vázlat

- Ütközéses modellek
- Homogenizálás: definíció
- Homogenizálás ütközéses modellben
  - Konstrukció
  - Homogenizálás
  - Összefonódottság
  - Mester egyenlet
- Spingázok

Ütközéses modell



Ütközéses modell

Kvantumállapotok

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\varrho : \varrho \geq O,\ \mathrm{tr}[\varrho] = 1\}$$

Dinamika

1 lépés:

$$\mathcal{E}[\varrho] = \mathrm{tr}_{\mathrm{env}}[U(\varrho \otimes \xi)U^\dagger]$$

n lépés:

$$\varrho_0 \to \varrho'_n = \mathrm{tr}_{\mathrm{env}}[U(\varrho_{n-1} \otimes \xi)U^\dagger] = \mathcal{E}[\varrho_{n-1}] = \mathcal{E}^n[\varrho_0]$$

$$\Omega_n = U_n \cdots U_1(\varrho_S \otimes \xi^{\otimes n})U_1^\dagger \cdots U_n^\dagger$$

Kvantum homogenizálás

Ideális homogenizálás

$$\varrho_S \otimes \xi \otimes \cdots \otimes \xi \mapsto \xi_S \otimes \xi \otimes \cdots \otimes \xi$$

Klónozás, nem lehet.

Kvantum homogenizálás

δ-homogenizálás

triviális homogenizálás

$$\xi_S \otimes \xi \otimes \cdots \otimes \xi \mapsto \Omega_n = \xi_S \otimes \xi \otimes \cdots \otimes \xi$$

konvergencia

$$D(\varrho_S^{(n)}, \xi) \leq \delta$$

a rezervoár stabilitása

$$\forall j \quad D(\xi_j', \xi) \leq \delta$$

A homogenizáló kölcsönhatás

Szimmetrikus és antiszimmetrikus altér

Csere-operátor $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$-n:

$$S(\varrho \otimes \xi)S^\dagger = \xi \otimes \varrho$$

$$\mathcal{H}_\pm : \ \ S\Phi = \pm\Phi$$

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$$

A homogenizáló kölcsönhatás

A triviális homogenizálás miatt

$$U|\psi \otimes \psi\rangle = |\psi \otimes \psi\rangle,$$

vagyis legáltalánosabban:

$$U = e^{i\gamma} I_+ \oplus V_-$$

A homogenizáló kölcsönhatás

Qubitekre

1D antiszimmetrikus altér

$$V_- = e^{i\beta}$$

$$\begin{aligned}
U|00\rangle &= e^{i\gamma}|00\rangle \ , \\
U|11\rangle &= e^{i\gamma}|11\rangle \ , \\
U(|01\rangle + |10\rangle) &= e^{i\gamma}(|01\rangle + |10\rangle) \ , \\
U(|01\rangle - |10\rangle) &= e^{i(\gamma+\beta)}(|01\rangle - |10\rangle) \ .
\end{aligned}$$

Másként ($\eta = -\beta/2$):

$$U_\eta = \cos\eta I + i \sin\eta S$$

A homogenizáló kölcsönhatás

Általában

$$U_\eta = \cos\eta I + i\sin\eta S = e^{i\eta S}$$

megfelel, de nem a legáltalánosabb.

Fennmaradt kérdések

- konvergencia
- a rezervoár stabilitása

A dinamika

$$\varrho_S^{(n)} = c^2 \varrho_S^{(n-1)} + s^2 \xi + ics[\xi, \varrho_S^{(n-1)}]$$

$$\xi'_n = s^2 \varrho_S^{(n-1)} + c^2 \xi + ics[\varrho_S^{(n-1)}, \xi]$$

Konvergencia

Kontrakciók

$\mathcal{E}$ szigorú kontrakció, ha

$$(\forall \varrho, \xi \in \mathcal{S})\, D(\mathcal{E}[\varrho], \mathcal{E}[\xi]) \leq kD(\varrho, \xi),\ \ 0 \leq k < 1$$

Hilbert-Schmidt távolság

$$D(\varrho_1, \varrho_2) = ||\varrho_1 - \varrho_2|| = \sqrt{\mathrm{tr}[\varrho_1^2] + \mathrm{tr}[\varrho_2^2] - 2\mathrm{tr}[\varrho_1 \varrho_2]}$$

esetünkben:

$$D^2(\mathcal{E}[\varrho_1], \mathcal{E}[\varrho_2]) = c^2(c^2 D^2(\varrho_1, \varrho_2) + s^2 ||[\xi, \varrho_1 - \varrho_2]||^2)$$

(mivel $\mathcal{E}[\varrho] = c^2 \varrho + s^2 \xi + ics[\xi, \varrho]$)

Konvergencia

Ami bizonyítandó

Az, hogy ξ fixpont, helyettesítéssel adódik. Tehát be kell látni, hogy:

$$||[\xi, \Delta]||^2 \leq ||\Delta||^2 = D^2(\varrho_1, \varrho_2)$$

ahol $\Delta = \varrho_1 - \varrho_2$
Ha ez teljesül, a Banach-féle fixponttétel alapján az egyértelmű fixponthoz konvergál a dinamika.

Konvergencia

Bizonyítás

$\xi = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$

$$\begin{aligned}
||\xi\Delta - \Delta\xi||^2 &= \mathrm{tr}[(\xi\Delta - \Delta\xi)^\dagger(\xi\Delta - \Delta\xi)] = 2\mathrm{tr}[\xi^2\Delta^2] - 2\mathrm{tr}[(\xi\Delta)^2] \\
&= 2\sum_j \lambda_j^2 \langle j|\Delta^2|j\rangle - 2\sum_{j,k} \lambda_j\lambda_k |\langle j|\Delta|k\rangle|^2 \\
&= 2\sum_{j,k} \lambda_j^2 \langle j|\Delta|k\rangle\langle k|\Delta|j\rangle - 2\sum_{j,k} \lambda_j\lambda_k |\langle j|\Delta|k\rangle|^2 \\
&= \sum_{j,k} (2\lambda_j^2 - 2\lambda_j\lambda_k) |\langle j|\Delta|k\rangle|^2 \\
&= \sum_{j,k} (\lambda_j^2 + \lambda_k^2 - 2\lambda_j\lambda_k) |\langle j|\Delta|k\rangle|^2 = \sum_{j,k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 |\langle j|\Delta|k\rangle|^2 \\
&\leq \sum_{j,k} |\langle j|\Delta|k\rangle|^2 = \mathrm{tr}[\Delta^\dagger\Delta] = ||\Delta||^2
\end{aligned}$$

Konvergencia

A kontrakció

$$D(\mathcal{E}[\varrho_1], \mathcal{E}[\varrho_2]) \leq |c| D(\varrho_1, \varrho_2),$$

a kontrakciós együttható $c = \cos\eta$, a fixpont pedig ξ.

A rezervoár stabilitása

Vizsgálandó

$$D(\xi_j', \xi)$$

valamint a lépések szükséges N_δ száma, melyre

$$D(\varrho_S^{(N_\delta)}, \xi) \leq \delta.$$

Beláttuk, hogy

$$D(\mathcal{E}[\varrho], \mathcal{E}[\xi]) \leq |c| D(\varrho, \xi),$$

és tudjuk, hogy $\mathcal{E}[\xi] = \xi$, innen:

$$N_\delta = \frac{\ln(\delta/\sqrt{2})}{\ln|c|}$$

de mi lehet a δ?

A rezervoár stabilitása

Számolás

$$
\begin{aligned}
D(\xi, \xi_n') &= ||\xi - c^2\xi - s^2 \varrho_S^{(n-1)} - ics[\varrho_S^{(n-1)}, \xi]|| \\
&\leq s^2||\xi - \varrho_S^{(n-1)}|| + |cs| \cdot ||[\varrho_S^{(n-1)}, \xi]|| \\
&\leq s^2 D(\xi, \varrho_S^{(n-1)}) + 2|cs| \cdot ||\varrho_S^{(n-1)}|| \cdot ||\xi|| \\
&\leq \sqrt{2}|sc|(|s| \cdot |c|^{n-2} + \sqrt{2}) \\
&< \sqrt{2}|sc|(1 + \sqrt{2}) \equiv \delta
\end{aligned}
$$

vagyis U_η-ra $(2 + \sqrt{2})|\sin\eta\cos\eta| \leq \delta$, a szükséges lépések száma pedig

$$N_\delta \approx \frac{\ln\left[(1 + \sqrt{2})|sc|\right]}{\ln|c|}$$

Összefonódottság sok qubit esetén

tangle

$$\tau(\omega) = \min_{\omega=\sum_j p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|} \sum_j p_j \tau(\psi_j)$$

ahol

$$\tau(\psi) = S_{\mathrm{lin}}(\mathrm{tr}_1|\psi\rangle\langle\psi|) = 2(1-\mathrm{tr}[(\mathrm{tr}_1|\psi\rangle\langle\psi|)^2]) = 4\det \mathrm{tr}_1[|\psi\rangle\langle\psi|]$$

(lineáris entrópia)

Összefonódottság sok qubit esetén

Konkurrencia

$$C = \max\{0, 2\max\{\sqrt{\lambda_j}\} - \sum_j \sqrt{\lambda_j}\}$$

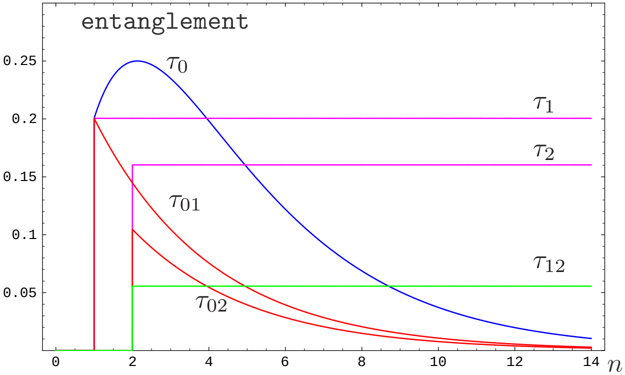
$$\lambda_j = \mathrm{eig}(\omega(\sigma_y \otimes \sigma_y)\omega^*(\sigma_y \otimes \sigma_y))$$

Monogámia

Coffman-Kundu-Wootters:

$$\sum_{k, k \neq j} \tau_{jk} \leq \tau_j$$

Összefonódottság a homogenizálás modellben



Mester egyenlet

Diszkrét dinamikai félcsoport

$$\varrho \to \mathcal{E}_1[\varrho] \to \mathcal{E}_2[\varrho] \to \cdots \to \mathcal{E}_n[\varrho] \to \cdots, \quad \text{ahol}$$

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \circ \cdots \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}^k$$

$$\mathcal{E}_n \circ \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{n+m}$$

Interpoláció

$$\frac{d\varrho_t}{dt} = \left(\frac{d\mathcal{E}_t}{dt}\right)[\varrho_0] = \left(\frac{d\mathcal{E}_t}{dt} \circ \mathcal{E}_t^{-1}\right)[\varrho_t] = \mathcal{G}_t[\varrho_t]$$

Markov dinamika generátora

Lindblad-GKS alak

$$\mathcal{E}_t = e^{\mathcal{G}t}$$

$$\mathcal{G}[\varrho] = -\frac{i}{\hbar}[H, \varrho] + \frac{1}{2}\sum_{jk} c_{jk}([\Lambda_j\varrho, \Lambda_k] + [\Lambda_j, \varrho\Lambda_k])$$

ahol $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{d^2-1}\}$ ONB a spurtalan Hermitikus mátrixok terén.

Bloch-gömb

Állapot

$$\varrho \mapsto \vec{r} = \mathrm{tr}[\varrho\vec{\sigma}]$$

Csatorna

$$\mathcal{E}_{kj} := \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma_k \mathcal{E}[\sigma_j]]$$

(a spur megmaradása miatt $\mathcal{E}_{00} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\mathcal{E}[I]] = 1$ és $\mathcal{E}_{0j} = \mathrm{tr}[\mathcal{E}[\sigma_j]] = 0$)

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{t} + T\vec{r}$$

$$t_j = \mathcal{E}_{j0}, \quad T_{jk} = \mathcal{E}_{jk}$$

Bloch-gömb

Generátor

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad g_{jk} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma_j \mathcal{G}[\sigma_k]]$$

Bloch-gömb

Lindblad-GKS alak

$$\mathcal{G}[X] = -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=x,y,z} h_j [\sigma_j, X] + \frac{1}{2} \sum_{j,k=x,y,z} c_{jk} ([\sigma_j, X\sigma_k] + [\sigma_j X, \sigma_k])$$

$$h_1 = \frac{g_{32} - g_{23}}{4}, \quad h_2 = \frac{g_{13} - g_{31}}{4}, \quad h_3 = \frac{g_{21} - g_{12}}{4}$$

$$c_{jj} = g_{jj} - \frac{1}{2} \sum_k g_{kk}$$

$$c_{12} = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{21} - i g_{30}), \quad c_{21} = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{21} + i g_{30}),$$

$$c_{23} = \frac{1}{2}(g_{23} + g_{32} - i g_{10}), \quad c_{32} = \frac{1}{2}(g_{23} + g_{32} + i g_{10}),$$

$$c_{13} = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{31} + i g_{20}), \quad c_{31} = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{31} - i g_{20}).$$

Homogenizáció: mester egyenlet

Diszkrét dinamika

$$\vec{r} \to \vec{r}' = c^2\vec{r} + s^2\vec{w} - cs\vec{w} \times \vec{r}$$

Mester-egyenlet levezetés (1)

Új bázis:

$$S_j = V\sigma_j V^\dagger : \xi = \frac{1}{2}(I + wS_3)$$

Új paraméterek:

$$\theta = \arctan(ws/c) = \arctan(w\tan\eta), \quad q = \sqrt{c^2 + w^2 s^2}$$

Ekkor:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cq\cos\theta & cq\sin\theta & 0 \\ 0 & -cq\sin\theta & cq\cos\theta & 0 \\ s^2 w & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

Mester-egyenlet levezetés (2)

$$\mathcal{E}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^n q^n \cos n\theta & c^n q^n \sin n\theta & 0 \\ 0 & -c^n q^n \sin n\theta & c^n q^n \cos n\theta & 0 \\ w(1-c^{2n}) & 0 & 0 & c^{2n} \end{pmatrix}$$

Mester-egyenlet levezetés (3)

Legyen (ad hoc) $n = t/\tau$, tau valamilyen időskála!

$$\Omega = \theta/\tau\,, \quad c^{2t/\tau} = e^{-\Gamma_1 t}\,, \quad (cq)^{t/\tau} = e^{-\Gamma_2 t}$$

$$\mathcal{E}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\Gamma_2 t}\cos\Omega t & e^{-\Gamma_2 t}\sin\Omega t & 0 \\ 0 & -e^{-\Gamma_2 t}\sin\Omega t & e^{-\Gamma_2 t}\cos\Omega t & 0 \\ w(1-e^{-\Gamma_1 t}) & 0 & 0 & e^{-\Gamma_1 t} \end{pmatrix}$$

Félcsoport, de ellenőrizni kell, hogy minden t-re CP.

Mester-egyenlet levezetés (4)

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_2 & -\Omega & 0 \\ 0 & \Omega & -\Gamma_2 & 0 \\ w\Gamma_1 & 0 & 0 & -\Gamma_1 \end{pmatrix}$$

Végül:

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= i\frac{\Omega}{2\hbar}[S_z, \varrho] - iw\Gamma_1(S_x\varrho S_y - S_y\varrho S_x + i\varrho S_z + iS_z\varrho) \\ &+\frac{1}{4}\Gamma_1(S_x\varrho S_x + S_y\varrho S_y - 2\varrho) + \frac{1}{4}(2\Gamma_2 - \Gamma_1)(S_z\varrho S_z - \varrho) \end{aligned}$$

Spingázok

A rendszer

- Klasszikus részecskék
- Belső kvantumos szabadsági fok: qubit
- Különféle modellek:
  - Véletlen párkölcsönhatás
  - Billiárdasztal
  - 1D diffuzív rácsgáz
- Q-kölcsönhatás: ha ütköznek, ill. szomszédok
- Diszkrét idejű dinamika
- Numerikus szimuláció

Kölcsönhatás

PSWAP generátora: Heisenberg-XXX

$$U_{\text{pswap}}(\eta) = \exp\left(-i\eta\hat{H}^{(\text{XXX})}\right)$$

$$\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z$$

Helyette: XX:

$$H^{(\text{XX})} = \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y.$$

$$U_{XX}(\eta) = \exp\left(-i\eta\hat{H}^{(\text{XX})}\right)$$

Spingázok

XX tulajdonságai

- Invariáns altér:

$$|\underline{k}\rangle = |0_1 0_2 \dots 0_{k-1} 1_k 0_{k+1} \dots 0_N\rangle$$

- Ezen a pillanatnyi Hamilton a szomszédsági mátrix ($\mapsto$ *quantum walk*)
- Az 1-gerjesztéses altérben a CKW telített: csak kétrészű összefonódás
- Ezen az altéren a sűrűségoperátor

  főátlója: $|1\rangle$ valószínűsége

  off-diag elemei (koherenciák): konkurrencia

$$C_{\underline{k},\underline{k}'} = 2|\varrho_{\underline{k},\underline{k}'}|$$

Spingázok

Mennyiségek

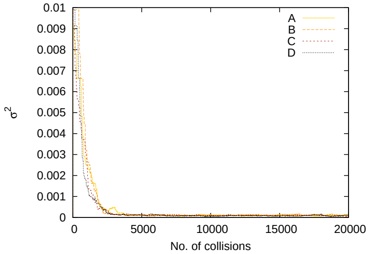
inhomogenitás

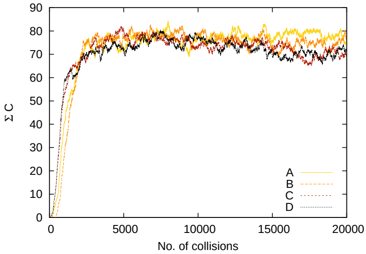
$$\sigma^2(t) = \langle p_k^2 \rangle_k - \langle p_k \rangle_k^2$$

teljes konkurrencia

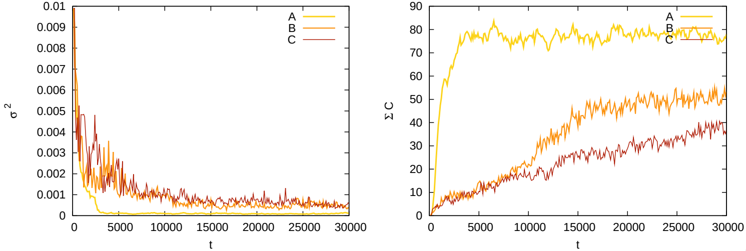
$$C_{\mathrm{tot}}(t) = \sum_{k<k'} C_{\underline{k},\underline{k}'}(t)$$

Billiárdasztal





(A, B): billárd szekvenciák, (C, D): random szekvenciák $N = 100$ egység sugarú és tömegű merev gömb. Sebesség: normál eloszás $\sigma = 0.32$. Illesztés ütközés szám szerint.



A: véletlen párok, B: 1D rácsgáz 150 hey, C: 1D rácsgáz 200 hely, 100 részecske, $\eta = 0.1$. Minden 100. időlépés ábrázolva.

Összefoglalás

A dekoherencia egy egyszerű mikroszkopikus modelljének részleteit tárgyaltuk:

- Homogenizáció általában
- Dinamikai félcsoport, Mester-egyenlet
- Összefonódottság
- Spingázok: összetettebb modell

Irodalom

- M. Ziman, V. Bužek: „Open system dynamics of simple collison models", `quant-ph/1006.2794` (2010)
- M. Koniorczyk, Á. Varga, P. Rapčan, V. Bužek: „Quantum homogenization and state randomization in semiquantal spin systems", Phys. Rev. A **77**, 052106 (2008)

- V. Scarani, M. Ziman, P. Štelmachovič, N. Gisin and V. Bužek: „Thermalizing quantum machines: dissipation and entanglement", Phys. Rev. Lett. **85** 097905 (2002)
- M. Ziman, P. Štelmachovič, V. Bužek, M. Hillery, V. Scarani and N. Gisin: „Diluting quantum information: An analysis of information transfer in system-reservoir interactions", Phys. Rev. A **65** 042105 (2002)

- Diósi Lajos: A Short Course in Quantum Information Theory - An Approach From Theoretical Physics Lecture Notes in Physics, Vol. 713, 2. kiadás (nyomdában)
- Kallus Zsófia: „Kvantuminformáció és irreverzibilitás: ütközéses kvantum-termalizáció mester egyenletei", szakdolgozat, ELTE TTK, 2010 (témavezető: Diósi Lajos)