Dekoherencia Markovi Dinamika

Diósi Lajos

Elméleti Fizikai Iskola
Tihany, 2010. augusztus 30. - szeptember 3.

Tartalomjegyzék

Projektív dekoherencia

Egy $\hat{A}$ fizikai mennyiség projektív *mérés*e általában véletlenszerű eredményre vezet a $\hat{\rho}$ állapotban. Legyen $\hat{A}$ spektrálfelbontása $\hat{A} = \sum_\lambda A_\lambda \hat{P}_\lambda$, így $p_\lambda = tr(\hat{P}_\lambda \hat{\rho})$ valószínűséggel a mért érték valamelyik A_λ sajátérték, és a *szelektív* mérés utáni állapot

$$\hat{\rho} \to \frac{1}{p_\lambda} \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda \qquad \textit{kollapszus},$$

a nem-szelektív (átlagolt) mérés utáni pedig

$$\hat{\rho} \to \sum_\lambda \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda \qquad \textit{'áldott' dekoherencia}.$$

Mi a fenti mérés dinamikája?

Terhes dichotómia 4 - Nyitott rendszer paradigma

A (von) Neumann mérés során $\hat{\rho}$ blokk-diagonálissá válik (áldott dekoherencia), ezt le lehet vezetni a természetes *környezeti* vagy egy egyetemes (hipotetikus) hatásként szokásos unitér dinamikából. A paradigma: *rendszer—tartály* összetett dinamika, másnéven

Nyitott (kvantum) rendszer

$\hat{H} \otimes \hat{I}_R + \hat{I} \otimes \hat{H}_R + \sum_k \hat{A}_k \otimes \hat{R}_k \quad \Rightarrow \quad \hat{U}_t$
$\hat{\rho} \to \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_R \to \hat{U}_t \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_R \hat{U}_t^\dagger \to tr_R(\hat{U}_t \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_R \hat{U}_t^\dagger) = \hat{\rho}(t)$
Markov közelítésben a Lindblad^{GKS} (1976) mászter egyenlet adódik:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{L}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}', \hat{\rho}] - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{kl} D_{kl} \left(2\hat{A}_k \hat{\rho} \hat{A}_l - \{\hat{A}_l \hat{A}_k, \hat{\rho}\} \right)$$

Dekoherencia fokozatos fázisvesztéssel

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}', \hat{\rho}] - \frac{D}{\hbar^2}\left(2\hat{A}\hat{\rho}\hat{A} - \{\hat{A}^2, \hat{\rho}\}\right)$$

Ha tartályhoz csatolás dominál:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{D}{\hbar^2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]]$$

Tetszőleges $\hat{\rho}$ kezdőállapotból az egyenlet $\sum_\lambda \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda$ állapotra vezet.
Lássuk:

$$\frac{d\langle\lambda|\hat{\rho}|\mu\rangle}{dt} = -\frac{D}{\hbar^2}\langle\lambda|[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]]|\mu\rangle = -\frac{D}{\hbar^2}(A_\lambda - A_\mu)^2\langle\lambda|\hat{\rho}|\mu\rangle$$

Az off-diagonálisok exponenciálisan kihalnak a $(D/\hbar^2)(A_\lambda - A_\mu)^2$ sebességgal. A blokk-diagonális rész nem változik. Így tényleg:

$$\hat{\rho} \to \sum_\lambda \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda$$

A projektív nem-szelektív mérést sikerült dinamikával leírni.

A térbeli dekoherencia dinamikája

Schrödinger részecske, $\hat{x}$ koordináta csatolva tartályhoz.

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{2m\hbar}[\hat{p}^2, \hat{\rho}] - \frac{D}{\hbar^2}[\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}]] \ , \qquad (D = \eta m k_B T)$$

Most a kinetikus tag fontos, meggátolja a teljes térbeli dekoherenciát, ami $\langle x|\hat{\rho}|y\rangle \sim \delta(x-y)$ lenne. Kialakul egy egyensúlyi Δx_0 koherencia hossz. Becsüljük meg!

$$\text{kinetikus járulék} \sim \frac{1}{m\hbar}\left(\frac{\hbar}{\Delta x_0}\right)^2 ; \quad \text{dekoherens járulék} \sim \frac{D}{\hbar^2}(\Delta x_0)^2$$

A kettő nagyságrendje azonos kell legyen, innen:

$$\Delta x_0 \sim \left(\frac{\hbar^3}{mD}\right)^{1/4} = \left(\frac{\hbar^3}{m^2 \eta k_B T}\right)^{1/4}$$

Pl. $T = 300K, \eta = 0.01/s$, akkor $\Delta x_0[cm] \sim 10^{-16}/\sqrt{m[g]}$. Ennyire pontosan 'méri' a tartály a részecske $\hat{x}$ helyét, ez már egy időben folytonos mérés.

Dekoherencia disszipációs dinamikája

Tartállyal kölcsönhatva mindig van disszipáció is. Optikai üreg Fock reprezentációban, $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ csatolódik a tartályhoz. Ha $T = 0$ (e.m. vákuum):

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] - \Gamma\left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}\}\right)$$

Ennek megoldása $1/\Gamma$ bomlási idővel a $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$ alapállapot. Ha a tartály hőtartály, $T > 0$, akkor van egy pumpáló Lindblad tag is a jobboldalon:

$$-\Gamma\exp(-\hbar\omega/k_B T)\left(\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \frac{1}{2}\{\hat{a}\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}\}\right)$$

Ennek aszimptotikus megoldásai a Gibbs egyensúlyi állapotok:

$$\hat{\rho} \to \frac{1}{Z}\exp(-\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}/k_B T) = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\hbar\omega/k_B T)|n\rangle\langle n|$$

Diagonálissá válik $\hat{a}^\dagger\hat{a}$-ben (dekoherencia) de a diagonális elemek eközben megváltoznak, felveszik a Boltzmann-eloszlást (disszipáció+pumpálás verseng).

Projektív kollapszus dinamikája: stochasztikus mászter egy.

$\hat{A} = \sum_\lambda A_\lambda \hat{P}_\lambda$ projektív mérése, ismétlés:

$$\hat{\rho} \to \frac{1}{p_\lambda} \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda \quad \text{szelektív;} \qquad \hat{\rho} \to \sum_\lambda \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda \quad \text{nem-szelektív}$$

Utóbbi dinamikáját felírtuk: $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{D}{\hbar^2}[\hat{A},[\hat{A},\hat{\rho}]]$. És a szelektív mérésé, a kollapszusé? Stochasztikus egyenlet kell, ami tetszőleges kezdeti $\hat{\rho}$-t a p_λ valószínűséggel a $\hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda$ állapotba viszi, közben $\mathbf{M}\hat{\rho}$ kielégíti a fenti mászter egyenletet. Tehát: $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{D}{\hbar^2}[\hat{A},[\hat{A},\hat{\rho}]] + \text{stoch.tag}$, ahol $\mathbf{M}\text{stoch.tag} = 0$. A legegyszerűbb választás:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{D}{\hbar^2}[\hat{A},[\hat{A},\hat{\rho}]] + \frac{\sqrt{2D}}{\hbar}\{\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \hat{\rho}\} w \qquad \text{Ito!}$$

ahol w a standard fehér zaj: $\mathbf{M}w_t = 0$ és $\mathbf{M}w_t w_s = \delta(t-s)$. Igy $\hat{\rho}$ zaj- (w-) függő lesz, de $\mathbf{M}\hat{\rho}$ kielégíti a projektív dekoherencia mászter egyenletét.

Ez a *stoch. mászter egy.* megvalósítja a szelektív mérés (kollapszus) dinamikáját.

Projektív kollapszus dinamikája: stochasztikus Schrödinger egy.

$\hat{A} = \sum_\lambda A_\lambda \hat{P}_\lambda$ szelektív projektív mérésének dinamikáját a stoch. mászter egyenlettel írtuk le:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{D}{\hbar^2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]] + \frac{\sqrt{2D}}{\hbar}\{\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \hat{\rho}\}w \qquad \text{Ito!}$$

Ha a kezdeti állapot tiszta, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, akkor egy egyenértékű *stochasztikus Schrödinger egyenlet* írható:

$$\frac{d|\psi\rangle}{dt} = -\frac{2D}{\hbar^2}(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle + \frac{\sqrt{2D}}{\hbar}(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)|\psi\rangle\}w \qquad \text{Ito!}$$

A $|\psi\rangle$ időfüggő megoldást *stochasztikus kvantum trajektóriának* nevezzük, arra utalva, hogy a projektív kollapszust elszenvedő állapotvektor egy véletlen trajektóriát ír le a Hilbert térben.

Sztochasztikus kvantum-trajektóriák

A szelektív mérés (kollapszus) dinamikájának formális matematikai modelljeként mutattunk be egy speciális kvantum trajektória egyenletet:

$$\frac{d|\psi\rangle}{dt} = -\frac{2D}{\hbar^2}(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle + \frac{\sqrt{2D}}{\hbar}(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)|\psi\rangle\}w \qquad \text{Ito!}$$

A QT ennél sokkal több és sokfélébb! Fizikai értelemben egy $|\psi;t\rangle$ kvantum trajektória a következőnek felel meg.

Kvantum trajektória

Kvantum rendszerünket egy tartályhoz csatoljuk, ez a $d\hat{\rho}/dt = \mathcal{L}\hat{\rho}$ mászter egyenletre vezet a rendszerünk $\hat{\rho}$ állapotára nézve Markov közelítésben. Utóbbi megengedi, hogy a tartályon időben elegendő gyakorisággal elegendően pontos (von) Neumann méréseket végezzünk, amelyek
i) a rendszerünkről időben folytonosnak tekinthető információt adnak oly mértékig, hogy a $|\psi;t\rangle$ (stochasztikus) evolúcióját követhessük
ii) dinamikailag csak a tartályt perturbálják - á la Heisenberg -, a rendszert nem. Ezért $\hat{\rho} = \mathbf{M}|\psi\rangle\langle\psi|$ változatlanul, és a tartályon történt méréstől függetlenül ugyanazt a $d\hat{\rho}/dt = \mathcal{L}\hat{\rho}$ mászter egyenletet elégíti ki.

Sztochasztikus kvantum-trajektóriák sokfélesége

Adott rendszer+tartály meghatározza a rendszer $d\hat{\rho}/dt = \mathcal{L}\hat{\rho}$ mászter egyenletét. Ezután dönthetünk a tartályon való mérésről. Pl. fotonszámlálós mérés Poisson típusú, heterodin mérés diffuzív (gaussi) QT-t ad. Megfordítva: tetszőleges QT legitim mérésnek felel meg a tartályon, csak a $\hat{\rho} = \mathbf{M}|\psi\rangle\langle\psi|$ -nek a mászter egyenletet kell teljesíteni. Igy konstruált QT-t nevezünk a mászter egyenlet szochasztikus kibontásának (unraveling).

Folytonos mérés - dinamikai kollapszus - kvantum trajektóriák

A QT, a hozzá fűződő elméleti és numerikus módszer kvantumoptikában született meg az 1980-as évek végén (Carmichael, Milburn, Wiseman). A koncepciót, a matematikai formát - más nevek alatt - a 80-as években már előbb létrehozták a kvantummechanika fundamentális nyitott kérdését, az 'átkozott dichotómiát' feszegető kutatók, és a zajos rendszerek folytonos megfigyelésnének klasszikus módszerét kvantumrendszerekre kiterjesztő nyughatatlan matematikusok. Majdnem mindenki tanult mindenkitől, és azóta is.