Az összefonódás elemi tárgyalása

Benedict Mihály

Elméleti Fizikai Iskola Tihany

2010, augusztus 31

- Kétrészű rendszerek, tiszta állapotok, Schmidt fölbontás és az összefonódási mértékek

- Példák a kvantumoptikából

- Összefonódás egy ütközési feladatban

- Egy tétel az N részű rendszer tiszta állapotainak globális összefonódására vonatkozóan

Miért érdekes?

1. A klasszikus és kvantumfizika különbsége

2. A nemlokalitás megnyilvánulása a kvantummechanikában rendkívül kontraintuitív: Einstein, Feynman

3. Lehetséges a gyakorlati alkalmazás (?) kvantumszámítógép
Bizonyos kvantumos algoritmusok exponenciálisan gyorsabbak mint a klasszikusok, a leghíresebb a Shor féle algoritmus:
N a faktorizálandó szám, $n=logN$, a lépésszám $O(n^3)$,

<u>Jozsa-Linden tétel</u>: Ahhoz, hogy egy kvantumos algoritmus exponenciálisan gyorsítson, elegendően nagyszámú részrendszer összefonódott állapotai szükségesek.
Igazi erőforrás a több részecske összefonódás.

4. Ha a kvantumszámítógép nem is valósul meg a közeljövőben, a természetben rejlő kvantumos lehetőségek jobb megértése és jövőbeni alkalmazása (pedagógiai cél)

Részecskék összefonódása versus szabadsági fokok összefonódása

Pl. egyetlen ezüstatom van feles spinnel

A Stern Gerlach berendezés hatása:

$$\Psi(x,y,s,t) = \alpha\psi_{\uparrow}(x,y)|\uparrow\rangle + \beta\psi_{\downarrow}(x,y)|\downarrow\rangle,$$

ahol $\psi_{\uparrow}(x,y)$ lokalizált ahol $y = ax,$

míg $\psi_{\downarrow}(x,y)$ lokalizált, ahol $y = -ax$

Ez két szabadsági fok összefonódása, de egyetlen részecskén történő mérés, ami nem befolyásol egy másikat.

Megállapítjuk a részecske helyét és ebből következik, hogy mi a spinje.

Összefonódottság: elemi megfogalmazás

Két kvantumfizikai rendszer 1 és 2

Ha tudjuk, hogy 1 állapota $\boxed{|\varphi\rangle \in \mathfrak{H}_1}$ 2 állapota $\boxed{|\psi\rangle \in \mathfrak{H}_2}$

és a két rendszer között nincs kapcsolat, akkor az együttes rendszer állapota mindig

$$|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Ellenben lehet:

$$|\Psi\rangle = c_1|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle + c_2|\varphi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1,\ c_1, c_2 \neq 0$$

Paradoxonok, pl. a Bohm féle (EPR) szingulett spin állapot

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$$

Az eredeti EPR (1935) cikkben végtelen sok illetve folytonosan sok tag esetét vizsgálják.
Annak nyomán írta Schrödinger: *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, amelyben az összefonódás (Verschränkung) szó ebben a formában szerepel.*

A redukált sűrűségoperátorok

Kétrészű rendszer együttes tiszta állapota $|\Psi\rangle \in \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |e_i\rangle_1 \otimes |f_j\rangle_2 \equiv \sum_{i,j} c_{ij} |e_i\rangle |f_j\rangle,$$

A teljes sűrűségoperátor

$$\hat{\varrho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |e_i\rangle\langle e_k| \otimes |f_j\rangle\langle f_l|$$

A redukált sűrűségoperátorok (Landau 1927):

$$\begin{aligned}
\hat{\varrho}_1 &= \mathrm{Tr}_2 \hat{\varrho} = \sum_l \langle f_l| \hat{\varrho} |f_l\rangle = \sum_j \sum_{i,k} c_{ij} c_{kj}^* |e_i\rangle\langle e_k| \\
\hat{\varrho}_2 &= \mathrm{Tr}_1 \hat{\varrho} = \sum_k \langle e_k| \hat{\varrho} |e_k\rangle = \sum_i \sum_{j,l} c_{ij} c_{il}^* |f_j\rangle\langle f_l|
\end{aligned}$$

A Schmidt féle dekompozíciós tétel (1907)

Ha $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |e_i\rangle |f_j\rangle \in \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ tiszta normált állapot

akkor létezik olyan

$|u_i\rangle$ ON vektorrendszer $\mathfrak{H}_1$- ben és

$|v_i\rangle$ ON vektorrendszer a $\mathfrak{H}_2$- ben, hogy:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i} |u_i\rangle |v_i\rangle$$

$p_i > 0$ valós $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

$i = 1, 2 \ldots n \leq N = \min(\dim \mathfrak{H}_1, \dim \mathfrak{H}_2)$, ($N$ lehet ∞ is)

Bizonyítás

$$\boxed{\hat{\varrho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |e_i\rangle\langle e_k| \otimes |f_j\rangle\langle f_l|}$$

Föltesszük, hogy $N = \dim \mathfrak{H}_1$

Képezzük $\hat{\varrho}_1$-et és diagonalizáljuk azt $\mathfrak{H}_1$-ben,

Legyen $|u_i\rangle$ éppen $\hat{\varrho}_1$ sajátvektorrendszere $\mathfrak{H}_1$-ben:

$$\hat{\varrho}_1 |u_i\rangle = p_i |u_i\rangle, \qquad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

$\mathfrak{H}_1$-ben ezt az $|u_i\rangle$ bázist választva,

$\mathfrak{H}_2$- ben pedig egy tetszőleges $|f_j\rangle$ bázist, $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |u_i\rangle |f_j\rangle$,

a teljes sűrűségoperátor $\hat{\varrho} = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} a_{kl}^* |u_i\rangle\langle u_k| \otimes |f_j\rangle\langle f_l|$

$$\boxed{\hat{\varrho}_1 =} \mathrm{Tr}_2 \hat{\varrho} = \sum_l \langle f_l|\hat{\varrho}|f_l\rangle = \sum_{i,k} \sum_j a_{ij} a_{kj}^* |u_i\rangle\langle u_k| \boxed{= \sum_i p_i |u_i\rangle\langle u_i|}$$

De az $|u_i\rangle$ bázisban $\hat{\varrho}_1$ diagonális $\sum_j a_{ij} a_{kj}^* = (\hat{\varrho}_1)_{ik} = p_i \delta_{ik}$

Tekintsük $\hat{\varrho}_1$ azokat a sajátértékeit, amelyekre $p_i > 0$, és képezzük a

$$|v_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_j a_{ij} |f_j\rangle \qquad i = 1, 2 \dots n$$

vektorokat, ahol n a **pozitív**, tehát nem 0 sajátvektorok száma.

Ezt visszaírva $|\Psi\rangle$-be

$$|\Psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle \sum_j a_{ij} |f_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}\, |u_i\rangle |v_i\rangle \qquad \square$$

Továbbá

$$\hat{\varrho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i,k=1}^{n} \sqrt{p_i p_k}\, |u_i\rangle\langle u_k| \otimes |v_i\rangle\langle v_k|$$

$$\hat{\varrho}_2 = \mathrm{Tr}_1(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{i=1}^{n} p_i |v_i\rangle\langle v_i|,$$

A Schmidt fölbontás tulajdonságai

1. A fölbontás minden |Ψ>-re más és más, és ha |Ψ> időfüggő, akkor a dekompozíció is időfüggő

2. általában nem egyértelmű, mert a p≠0 sajátértékek lehetnek elfajultak, és ekkor a megfelelő $|u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$ sajátvektorok más lineáris kombinációi is szerepelhetnek a fölbontásban.

A jól ismert példa a szinglet Bell állapot, amelyet eleve egy Schmidt fölbontásban adunk meg. Két feles spin esetén

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{z},+\rangle_1|\hat{z},-\rangle_2 - |\hat{z},-\rangle_1|\hat{z},+\rangle_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{n},+\rangle_1|\hat{n},-\rangle_2 - |\hat{n},-\rangle_1|\hat{n},+\rangle_2\right)$$

ahol *n* tetszőleges irányú egységvektor

3. A Schmidt fölbontás **nem** terjeszthető ki *egyszerűen* kettőnél többrészű rendszerre, tehát pl. három részrendszer esetén az állapot **nem** írható

$$\boxed{\sum_k \lambda_k |u_k\rangle |v_k\rangle |w_k\rangle}$$ alakba

4. Az $|u_k\rangle$ és $|v_k\rangle$ vektorok olyan fizikai mennyiségeket definiálnak a két Hilbert térben, A_u és B_v amelyek mérése szigorú korrelációt mutat a két térben a $|\Psi\rangle$ állapoton végrehajtott méréskor:

$$\boxed{A_u = \sum \alpha_k |u_k\rangle\langle u_k| \qquad B_v = \sum \beta_k |v_k\rangle\langle v_k|}$$

sokféle ilyen mennyiségpár lehet α_k, β_k különböző lehetséges választásával. Ha A mérésekor az egyik rendszeren α_k az eredmény, akkor a B mérésekor a másikon biztosan β_k-t kapunk. Ennek valószínűsége p_k

Történelem

Mátrixok szinguláris érték felbontása: Beltrami, Jordan, Sylvester

Erhard Schmidt 1907-ben L^2 beli hermitikus integráloperátorok magfügg vényeire vonatkozó tétel alapján: $\Psi(x,y) = \sum_k \sqrt{p_k}\,\varphi_k(x)\psi_k(y)$.

A ϱ_1 diagonalizálhatóságára vonatkozó tétel (Tr$\varrho_1 = 1$ miatt) az L^2-ben ugyanúgy szigorúan érvényes, mint véges dimeziós terekben. A p_k-k valódi diszkrét sajátértékek, és minden $p_k \neq 0$ multiplicitása véges, mert $\sum p_k = 1$.

A Schmidt tétel fontossága a kvantummechanika szempontjából: Neumann János könyvének (1932) VI/2 fejezetében, az összetett rendszerek tárgyalásánál, a Schmidt tételt is bemutatja az eredeti $\Psi(x,y)$ -ra vonatkozó változatban. Megállapítja, hogy ha egy összefonódott állapotban Schmidt bázisban mérünk a két részrendszeren, akkor az eredmények korreláltak, azaz az összefonódottság fizikai tartalmát is megfogalmazta.

A kétrészű összefonódás mértékei

A két részrendszer annál inkább összefonódott
(i) minél több $p_k \neq 0$,
(ii) az egyes szorzatok megjelenésének valószínűsége minél inkább egyforma

Neumann entrópia $$S = -\sum p_k \log p_k$$

Bázistól függetlenül:

$$S = -\mathrm{Tr}(\varrho_1 \log \varrho_1) = -\mathrm{Tr}(\varrho_2 \log \varrho_2)$$

Schmidt szám:

$$\boxed{K = \frac{1}{\sum_k p_k^2} = \frac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\varrho}_1^2)} = \frac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\varrho}_2^2)}}$$

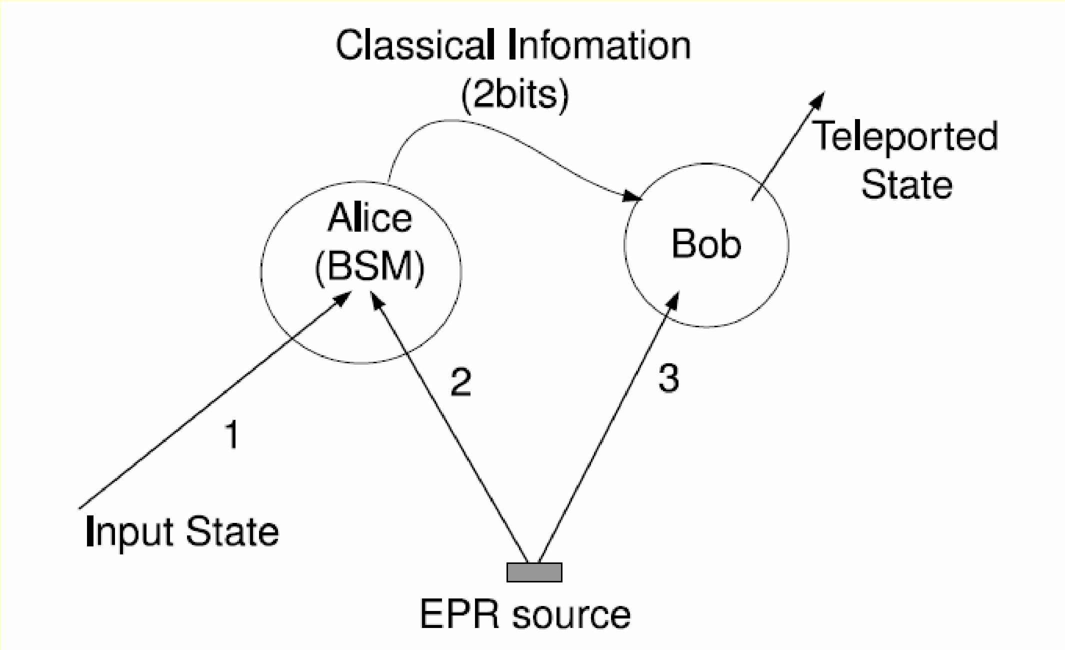
Lineáris entrópia (másodrendű Rényi entrópia):

$$\boxed{S_2 = 1 - \mathrm{Tr}(\hat{\varrho}_1^2) = 1 - \frac{1}{K}}$$

Példák a kvantumoptikából

1. TELEPORTÁCIÓ

C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, 1993
A. Zeilinger 1997



1. TELEPORTÁCIÓ

$1/\sqrt{2}$ -t elhagyjuk:

$$|\leftrightarrow\rangle \equiv |0\rangle \quad |\updownarrow\rangle \equiv |1\rangle$$

$$|\Psi_{tot}\rangle = |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi^-\rangle_{23} =$$
$$= (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) \otimes (|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3)$$

$$|\Phi^\pm\rangle_{12} = |0\rangle_1|0\rangle_2 \pm |1\rangle_1|1\rangle_2$$
$$|\Psi^\pm\rangle_{12} = |0\rangle_1|1\rangle_2 \pm |1\rangle_1|0\rangle_2$$

$$|\Psi_{tot}\rangle = |\Phi^+\rangle_{12}(\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) + |\Phi^-\rangle_{12}(\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) -$$
$$-|\Psi^+\rangle_{12}(\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) - |\Psi^-\rangle_{12}(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3)$$

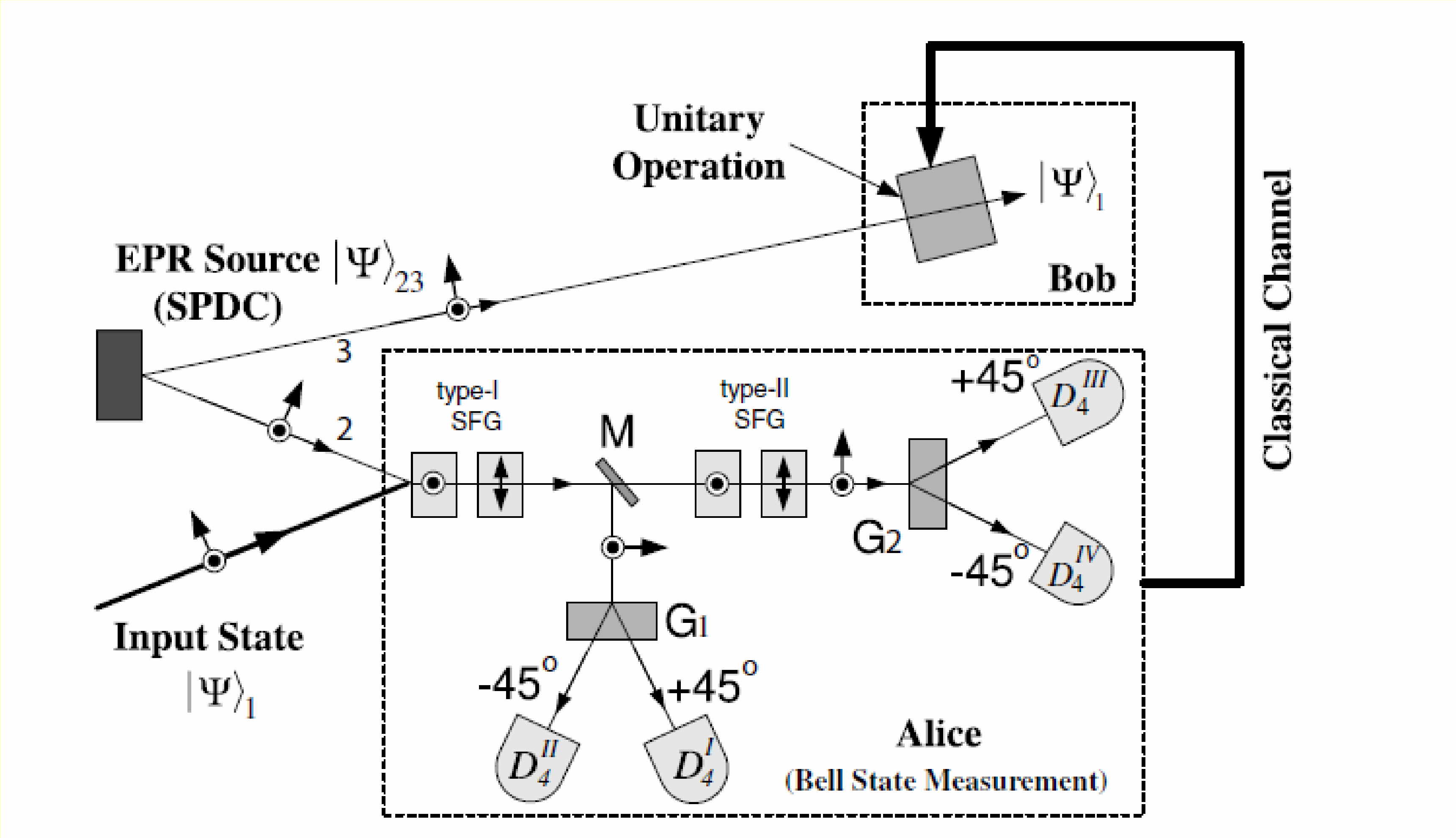
Az (1) fotont egy polarizátor valamilyen polarizációs állapotba hozza, amely ezután A-hoz kerül.

A-hoz jut a (2-3) összefonódott fotonpár egyik (2) tagja is, a pár másik (3) tagja B-hez

A megméri (1) és (2) együttes állapotát, 4 lehetséges ortogonális állapotot kaphat

Az eredményt közli B-vel

B a kapott információnak megfelelő unitér transzformációt hajt végre a (3) foton állapotán, így a (3) foton azonos állapotba kerül az (1) foton eredeti állapotával.



Unitary
Operation
$|\Psi\rangle_1$
Bob
Classical Channel
EPR Source $|\Psi\rangle_{23}$
(SPDC)
3
2
type-I
SFG
M
type-II
SFG
+45°
D_4^{III}
G_2
-45°
D_4^{IV}
G_1
-45°
+45°
D_4^{II}
D_4^{I}
Input State
$|\Psi\rangle_1$
Alice
(Bell State Measurement)

2. SŰRŰ KÓDOLÁS

Bennett, Wiesner 1992, Zeilinger 1996

Alice és Bob osztoznak egy összefonódott állapotban lévő pár két tagján

$$|\Phi^+\rangle_{12} = |0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2$$

Alice a következő négy művelet egyikét hajtja végre a hozzá jutott (1) részecskén

$$I(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |\Phi^+\rangle$$

$$\sigma_x(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle = |\Psi^+\rangle$$

$$\sigma_z(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle = |\Phi^-\rangle$$

$$(\sigma_y) \quad \sigma_x\sigma_z(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle = |\Psi^-\rangle$$

majd továbbküldi a saját részecskéjét azaz *egy* qubitet Bobnak, akihez 4 lehetséges ortogonális állapot, tehát *két* (qu)bit info jut.

3. KÉTMÓDUSÚ PRÉSELT VÁKUUM ÁLLAPOT

Nemlineáris kristályra erős, (klasszikusnak tekinthető) 2Ω frekvenciájú lézerfényt bocsátunk.
Parametrikus folyamat során két új módus gerjesztődik:

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\Omega$$

Egyszerűsített modell:

$$H = i\hbar\lambda(c^+ a_1 a_2 - c a_1^+ a_2^+) \rightarrow H = i\hbar\lambda(E^* a_1 a_2 - E a_1^+ a_2^+)$$

$$\boxed{|\Psi_{12}^{sq}\rangle = \exp(\eta^* a_1 a_2 - \eta a_1^+ a_2^+)|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2}$$

$$\lambda E t = \eta = r e^{i\theta}$$

$$|\Psi_{12}^{sq}\rangle = \frac{1}{\cosh r}\exp[-a_1^\dagger a_2^\dagger e^{i\theta}\tanh r]|0\rangle_1|0\rangle_2 =$$

$$= \frac{1}{\cosh r}\sum_n (\tanh r)^n e^{in\theta}|n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2$$

Schmidt felbontott alak

$$\hat{\varrho}_1 = \frac{1}{(\cosh r)^2}\sum_{n_1}(\tanh r)^{2n_1}|n_1\rangle\langle n_1|$$

$$\hat{\varrho}_2 = \frac{1}{(\cosh r)^2}\sum_{n_2}(\tanh r)^{2n_2}|n_2\rangle\langle n_2|$$

Mindkét alrendszer külön külön termikus, maximálisan kevert állapotban van

$$\exp(-\hbar\omega/kT) = \tanh^2 r, \quad \langle n\rangle = \sinh^2 r = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}$$

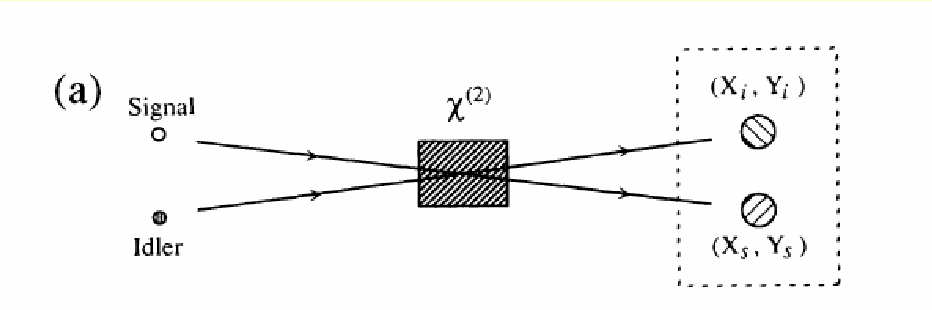
Az eredeti EPR paradoxon (X és P -vel) analogonja a kétmódusú préselt vákuummal:

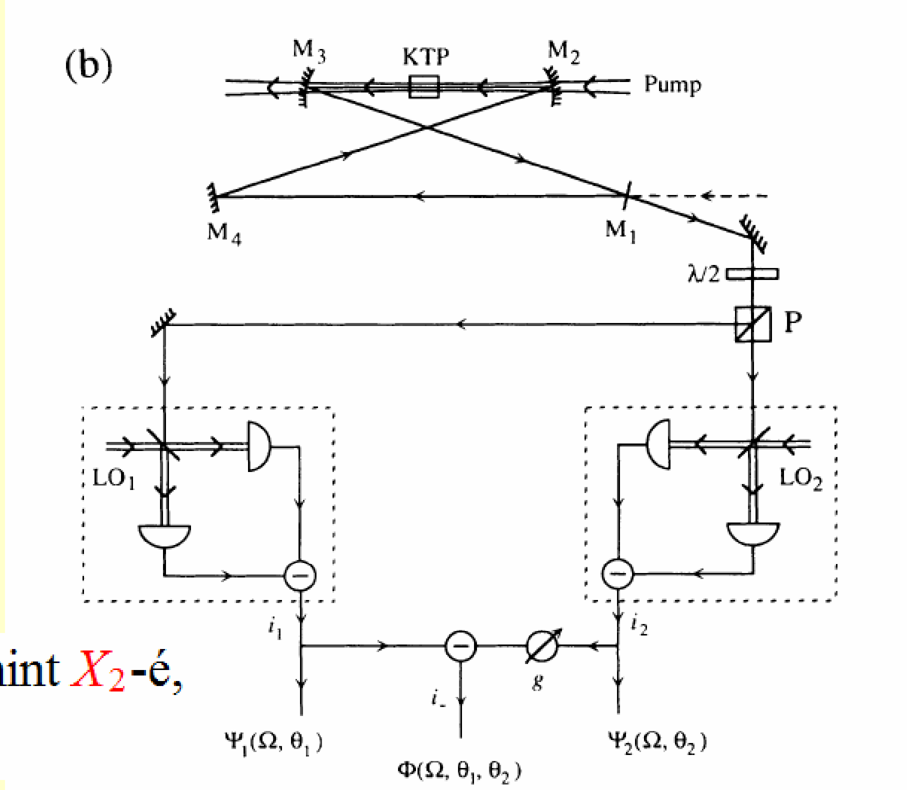
$$\boxed{\Psi_{EPR} = \delta(x_1 - x_2 - L)\delta(p_1 + p_2)}$$

Ha X_1 et mérem és x_1 et kapok, akkor $x_2 = x_1 - L$,
Ha viszont P_1-et mérem és p_1-et kapok, akkor $p_2 = -p_1$

$$|\Psi_{12}^{sq}\rangle = \frac{1}{\cosh r}\exp[-a_1^\dagger a_2^\dagger e^{i\theta}\tanh r]|0\rangle_1|0\rangle_2$$

M. Reid, P. Drummond, 1988
Ou, Pereira, Kimble kísérlet, 1992





A két módusban a kvadratúra operátorok:

$X_1 = (a_1 + a_1^\dagger)/\sqrt{2}$, $P_1 = i(a_1^\dagger - a_1)/\sqrt{2}\ (= Y_1)$
$X_2 = (a_2 + a_2)/\sqrt{2}$, $P_2 = i(a_2^\dagger - a_2)/\sqrt{2}\ (= Y_2)$

A $|\Psi_{12}^{sq}\rangle$ állapotban X_1 mérési eredménye ugyanannyi mint X_2-é,
P_1 és P_2 mérési eredménye éppen ellentétes egymással.

4. ATOM ÉS MEZŐ ÖSSZEFONÓDÁSA, A JAYNES-CUMMINGS MODELL

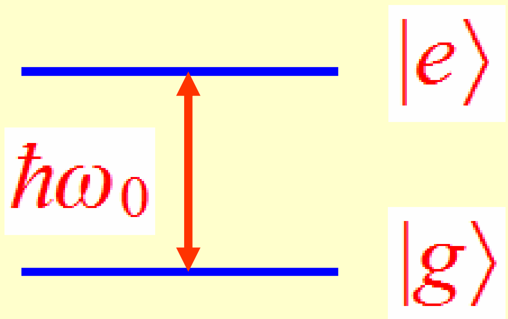
Egyetlen „kétállapotú” atom és egyetlen mező-módus kölcsönhatása

Egzaktul megoldható kvantumelektrodinamikai feladat

Kísérleti megvalósítás a mikromézer:
D. Meschede, H. Walther, Rempe 1985-90
S. Haroche J.M. Raimond
H.J. Kimble

$$H = \hbar\omega_0\sigma_3/2 + \hbar\omega a^+ a + \hbar\gamma(a^+\sigma_- + a\sigma_+)$$

Kezdőállapot nem összefonódott:



$$|\Psi(0)\rangle = \underbrace{(a|g\rangle + b|e\rangle)}_{atom} \otimes \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle}_{mező},$$

$$|\Psi(0)\rangle = (a|g\rangle + b|e\rangle) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle,$$

$$\omega_0 = \omega$$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t)|g\rangle \otimes |n\rangle + b_n(t)|e\rangle \otimes |n\rangle).$$

Egzakt megoldás !

$$a_n(t) = ac_n \cos(\gamma \sqrt{n}\, t) - ibc_{n-1} \sin(\gamma \sqrt{n}\, t)$$

$$b_n(t) = bc_n \cos(\gamma \sqrt{n+1}\, t) - iac_{n+1} \sin(\gamma \sqrt{n+1}\, t)$$

$$\hat{\varrho}_a = \begin{pmatrix} \sum_n |b_n(t)|^2 & \sum_n a_n(t) b_n^*(t) \\ \sum_n a_n^*(t) b_n(t) & \sum_n |a_n(t)|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3(t) & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & 1 - s_3(t) \end{pmatrix}$$

$\hat{\varrho}_a$ sajátértékei $p_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm |s|)$, ahol $|s| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$

Sajátvektorok és a mező Schmidt állapotai általában:
S. Phoenix, P. Knight PRA **44**, 6023 (1991)

Speciális esetek:

$$|\Psi(0)\rangle = |g\rangle|0\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle = |g\rangle|0\rangle$$

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle\sum_n c_n|n\rangle \rightarrow \sum_n (c_n\cos(\gamma\sqrt{n+1}\,t)|e\rangle\otimes|n\rangle - ic_{n-1}\sin(\gamma\sqrt{n}\,t)|g\rangle\otimes|n\rangle)$$

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle|0\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle = \cos(\gamma t)|e\rangle|0\rangle - i\sin(\gamma t)|g\rangle|1\rangle$$

Összefonódott, de a Schmidt bázis egyszerű. Az atomi állapotok valószínűsége:

$$P_g(t) = \sin^2(\gamma t) = \tfrac{1}{2}(1-\cos\Omega_0 t), \quad P_e(t) = \cos^2(\gamma t) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\Omega_0 t),$$

vákuum Rabi oszcilláció $\Omega_0 = 2\gamma$ az un. vákuum Rabi frekvencia

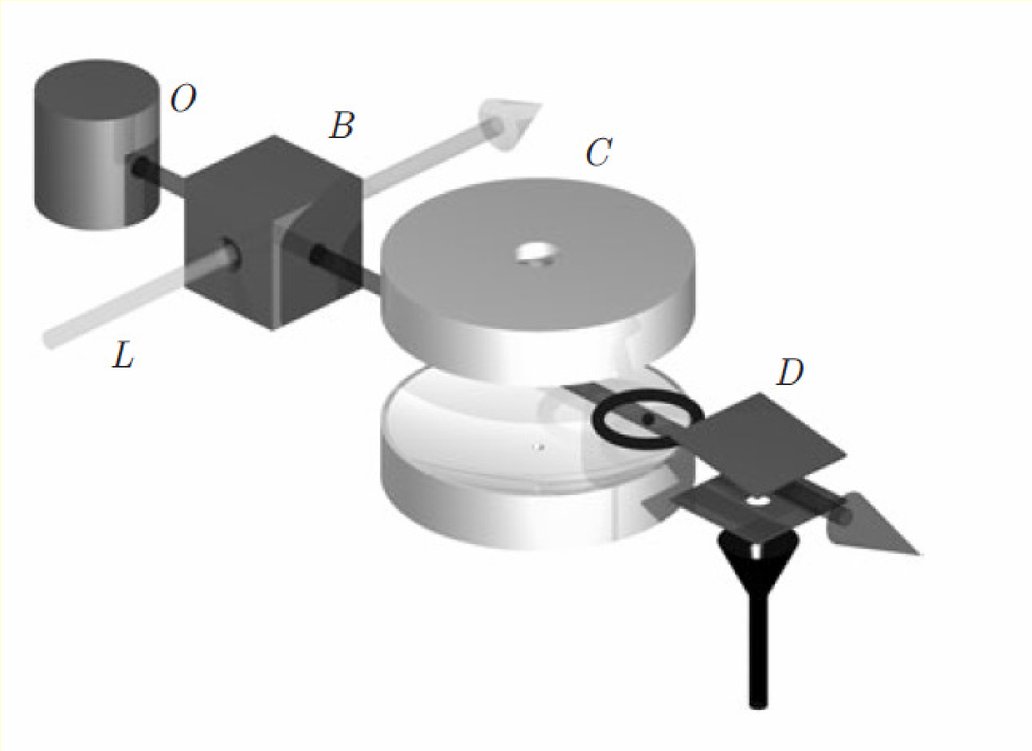
---

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle\sum_n c_n|n\rangle \rightarrow$$

$$P_e(t) = \sum_n |c_n|^2\cos^2(\gamma\sqrt{n+1}\,t)$$

Glauber koherens $|\alpha\rangle$: $|c_n|^2 = e^{-\bar{n}}\frac{\bar{n}^n}{n!}$ $\quad \bar{n} = |\alpha|^2$

M. Brune, J.M. Raimond, S. Haroche, 1996



t kölcsönhatási idő az atom sebességéből. A kísérletekben:

140m/s< v <*600m/s* Δv=*2 m/s*

Cirkuláris Rydberg atomok Rb: $n_e = 51,\ \ell_e = 50 \leftrightarrow n_g = 50,\ \ell_g = 49$

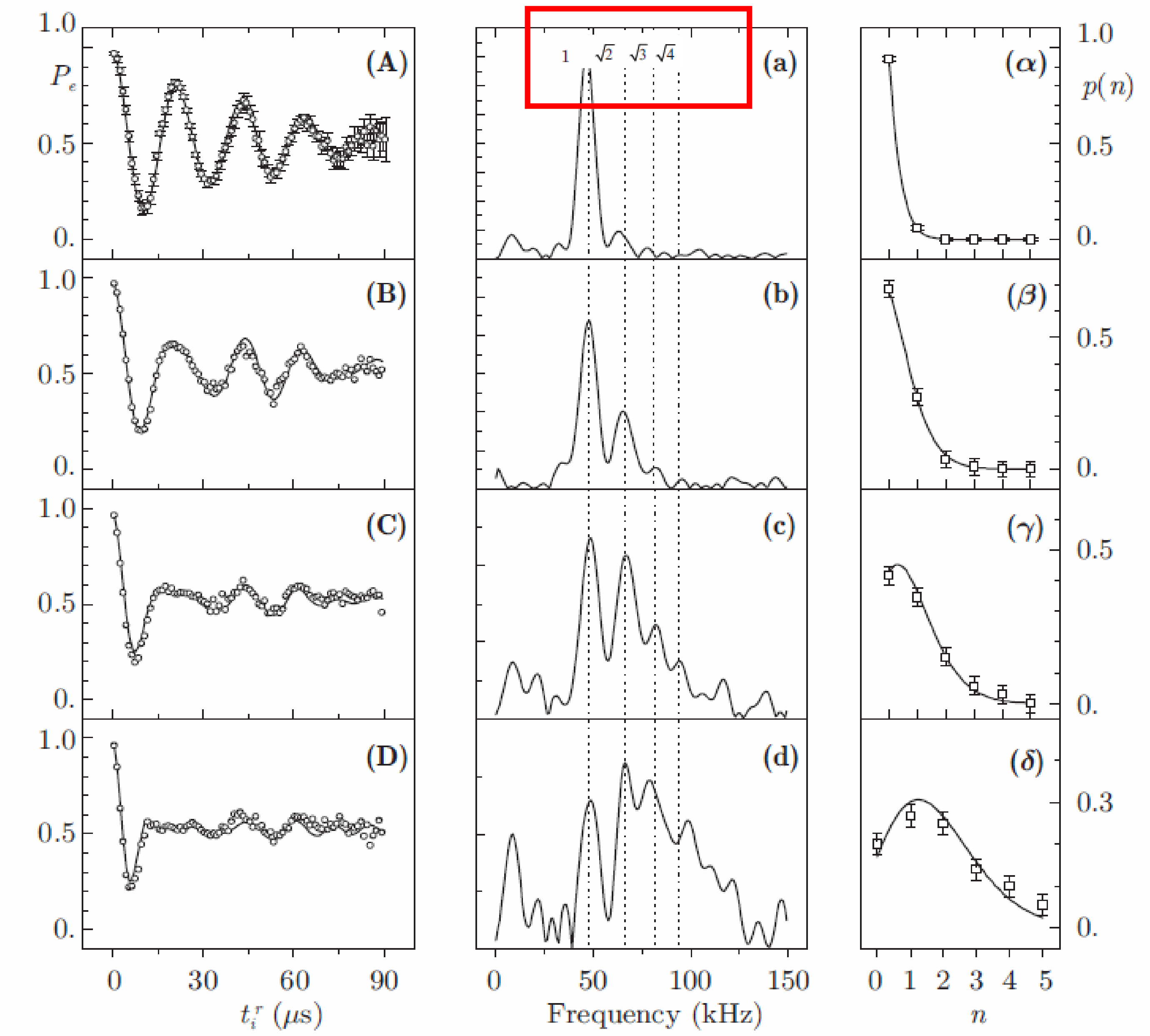
$$\omega_0/2\pi = \omega/2\pi = 51GHz,\ \ Q_c = 7\times 10^7,\ \tau_c = 220\mu s$$

Ma már az üregélettartam $\tau_c = 0.1 - 0.5\ s$, $\Omega_0/2\pi = \gamma/\pi = 50kHz \ll \omega/2\pi$

$$P_e(t) = \sum_n |c_n|^2 \cos^2(\gamma \sqrt{n+1}\, t)$$

$$|c_n|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$$

Poisson, (Glauber)



$\bar{n} \approx 0$

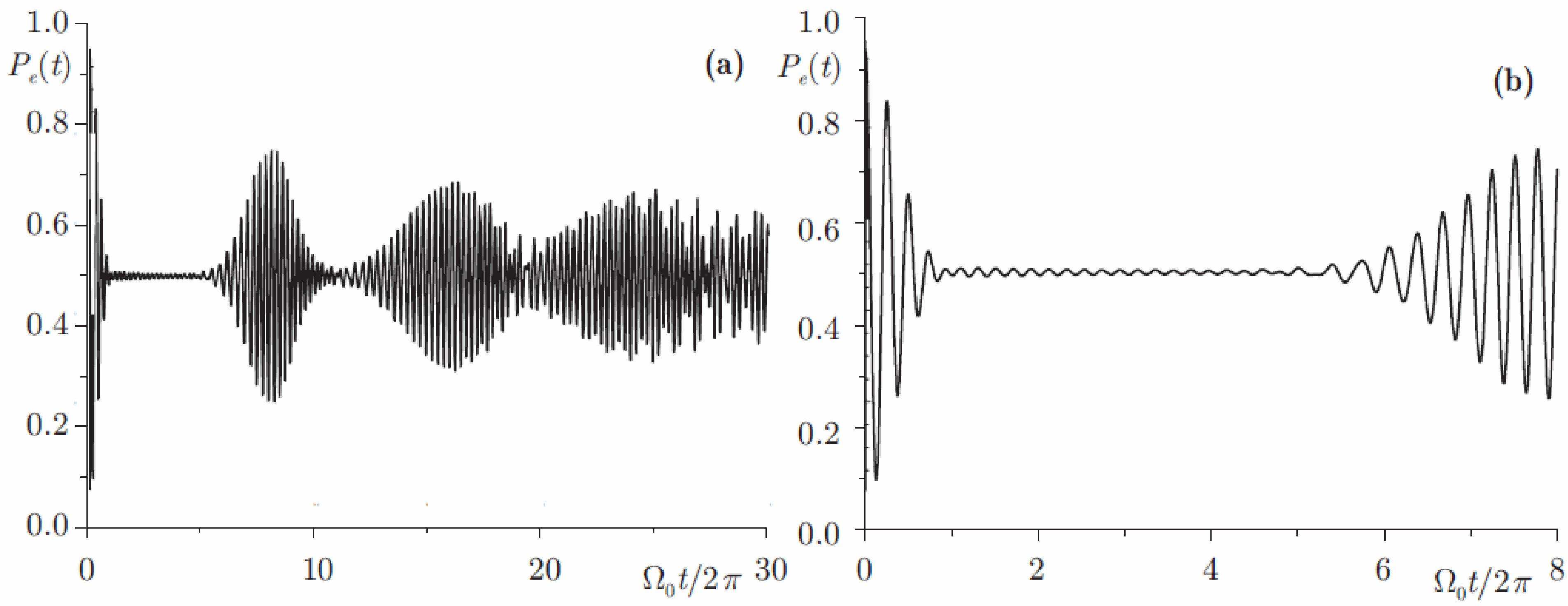
$\bar{n} = 0.4$

$\bar{n} = 0.85$

$\bar{n} = 1.47$

A frekvenciák aránya $\sqrt{n+1}$ bizonyítja a mező diszkrét szerkezetét, vannak fotonok!

Kollapszus és föléledés $\bar{n} = 15$



Eberly et al. 1980
Rempe, Meschede, Klein, Walther 1985-87

Ha $\bar{n} \gg 1$ klasszikus Rabi oszcillációk

I. Rabi 1937 (MRI)

$$P_e(t) = \cos^2(\gamma\sqrt{\bar{n}+1}\,t) \qquad \gamma = \frac{\Omega_0}{2} = \frac{d}{\hbar}\mathcal{E}_0 \qquad \mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}}$$

Két atom összefonódása az üreg közvetítésével

a) az első atom $|e\rangle_1$ állapotban lép be és $\gamma t = \pi/4 \quad \Omega_0 t = \pi/2$:

$$\boxed{|e\rangle_1|0\rangle \to (|e\rangle_1|0\rangle - i|g\rangle_1|1\rangle)/\sqrt{2}}$$

b) az első atom elhagyja az üreget, majd egy második atom lép be a $|g\rangle_2$ állapotban úgy, hogy erre $\gamma t = \pi/2 \quad \Omega_0 t = \pi$:

$$|g\rangle_2(|e\rangle_1|0\rangle - i|g\rangle_1|1\rangle)/\sqrt{2} \to |e\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle - |g\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle/\sqrt{2} =$$

$$= \frac{(|e\rangle_1|g\rangle_2 - |g\rangle_1|e\rangle_2)}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

A két atom sosem találkozik, mégis összefonódnak, az üreg vákuumállapotban marad.

S. Haroche, J.M Raimond: Exploring the quantum, Oxford, 2006

Azonos (megkülönböztethetetlen) részecskék

Két fermion vagy két bozon:

$$\boxed{|\Psi(1,2)\rangle = \mathcal{N}(|\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 \pm |\chi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2)}$$

Látszólag eleve összefonódott az állapot, a Schmidt rang 2,
Valójában nem az

G.C. Ghirardi, L. Marinatto: arXiv:quant-ph/0401065v2, PRA 2004

A két részrendszer nem összefonódott, ha mindkét részrendszer jól meghatározott állapotban van, CSCO adja meg mindkét alrendszer állapotát.
Akkor és csak akkor nem összefonódott, ha nem összefonódott állapotok szimmetrizáltjaként vagy antiszimmetrizáltjaként áll elő.

Nincs-e ellentmondás a Bohm féle Bell szinglet állapot összefonódottságával?
Nem mert valójában ennek alakja:

$$|\Psi\rangle = (|z\uparrow\rangle_1 \otimes |z\downarrow\rangle_2 - |z\downarrow\rangle_1 \otimes |z\uparrow\rangle_2)(|r_i\rangle_1|r_j\rangle_2 + |r_j\rangle_1|r_i\rangle_2)/\sqrt{2}$$

$\langle r_i|r_j\rangle = \delta_{ij}$ Nem szorzatállapot antiszimmetrizáltja

Összefonódás kialakulása ütközésben

Kovács Judit, Czirják Attila

Két részecske:

$$H_{12} = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V(X_1 - X_2)$$

kezdőállapot

$$\Psi(x_1, x_2, t = 0) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$$

A kéttestprobléma szeparálható az $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2},\ x = x_1 - x_2$

koordinátákban, de nem x_1 ben és x_2 ben

$$\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \xrightarrow{H_{12}} \Psi(x_1, x_2, t)$$

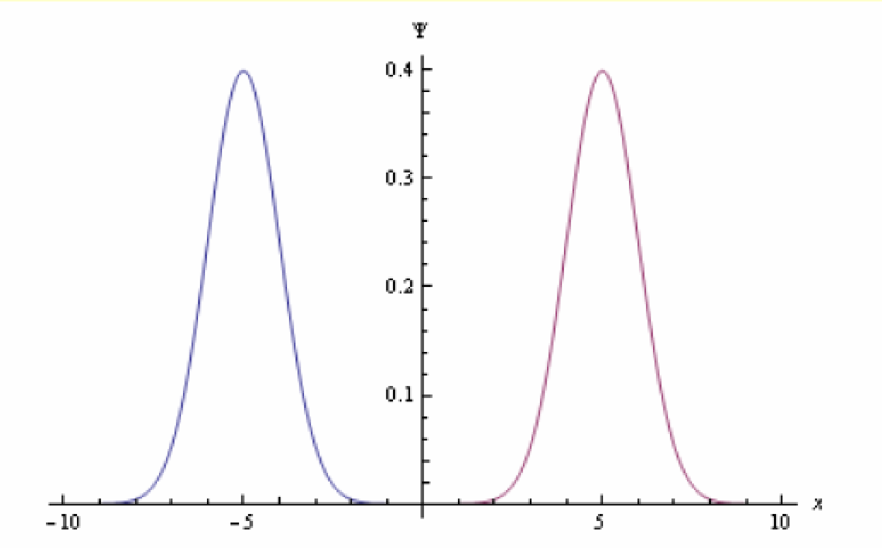
A két részecske állapota összefonódottá válik. Az egyes részecskéket csak redukált sűrűségmátrixukkal írhatjuk le, aminek a segítségével összfonódási mértéket lehet bevezetni.

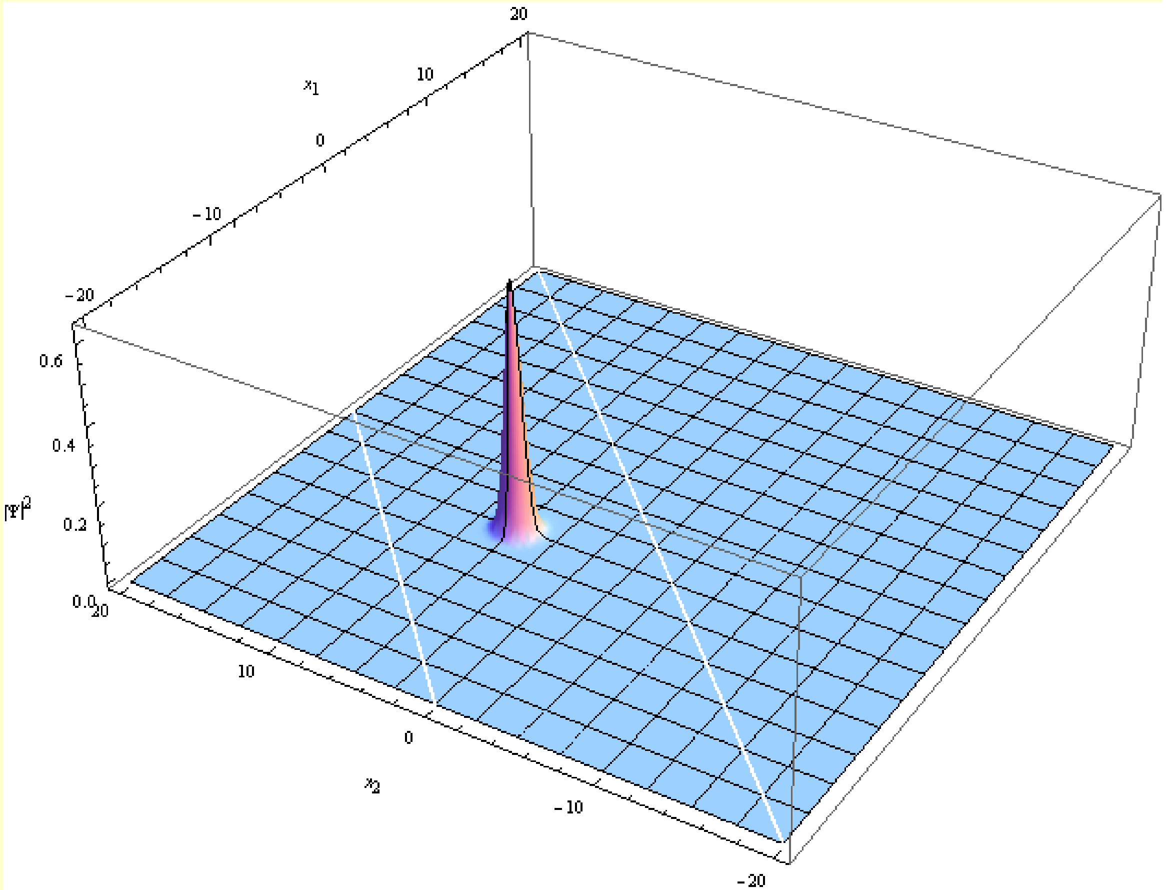
Kölcsönhatás és kezdőállapot

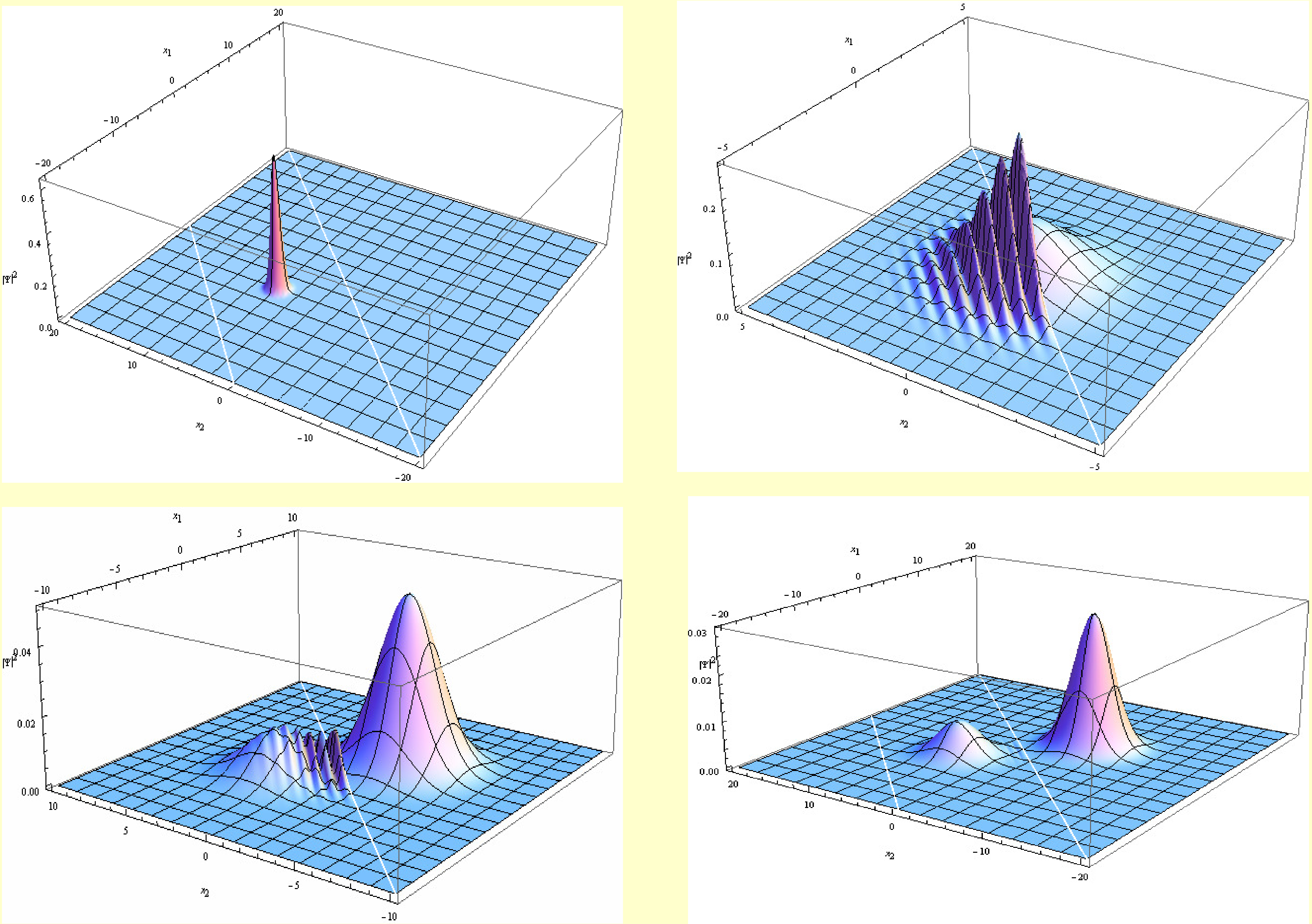
$$H_{12} = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V_0\delta(X_1 - X_2)$$

Ütközési energia ~50 eV, kezdeti távolság ~10 nm, ütközés és összefonódás időtartama ~10^{-17} s

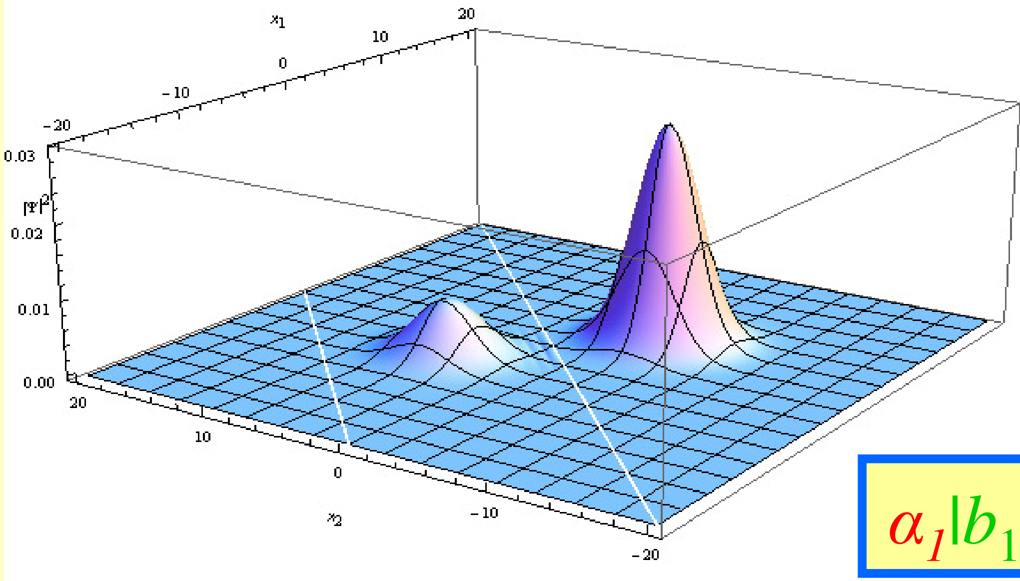
$$|a_1, \rightarrow\rangle_1 |a_2, \leftarrow\rangle_2 = \Psi(x_1, x_2, t=0) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} e^{-\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2} e^{ik_0 x_1} \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} e^{-\left(x_2 - \frac{a}{2}\right)^2} e^{-ik_0 x_2}$$







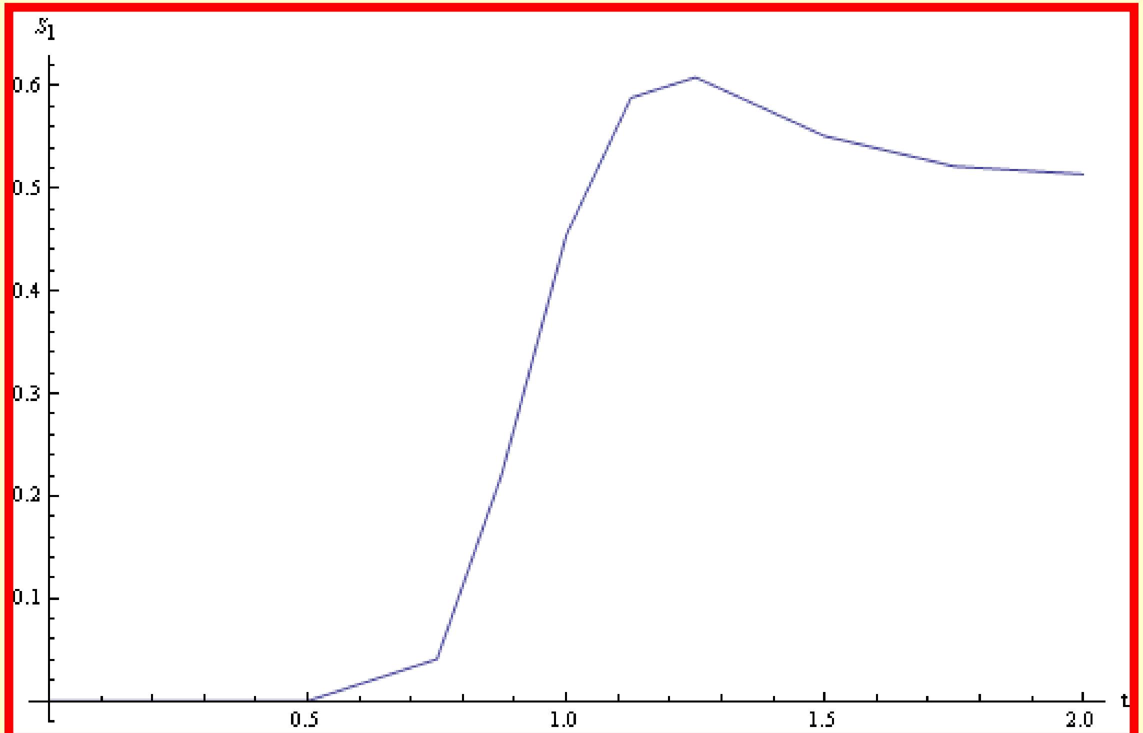
x_1
x_2
$|\Psi|^2$
x_1
x_2
$|\Psi|^2$
x_1
x_2
$|\Psi|^2$
x_1
x_2
$|\Psi|^2$



Összefonódás

$$\alpha_1|b_1, \rightarrow\rangle_1|b_2, \leftarrow\rangle_2 + \alpha_2|b_2 \leftarrow\rangle_1|b_1 \rightarrow\rangle_2$$

$$S = -(p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2), \quad p_i = |\alpha_i|^2, \; p_1 + p_2 = 1$$



Ütközési energia ~50 eV,

Kezdeti távolság ~10 nm,

Ütközés és összefonódás időtartama ~10^{-17} s

ELI

N qubites tiszta állapotok összefonódottsága

D. Meyer, N. Wallach: J. Math. Phys, 43, 4273 (2002)

N qubit : $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^{2^N}$

Kifejtjük a $\{|0\rangle, |1\rangle\}^{\otimes N}$ bázisban és fölbontjuk minden $n=1,2\ldots N$ - *re*

$$\boxed{|\psi\rangle = |0\rangle_n \otimes |u^n\rangle + |1\rangle_n \otimes |v^n\rangle}$$

Itt $|u^n\rangle, |v^n\rangle \in \mathbb{C}^{2^{N-1}}$ és **nem** normált általában

Ezek „vektori szorzatának" hossznégyzete

$$\boxed{D(|u^n\rangle, |v^n\rangle) = \sum_{i<j} |u_i^n v_j^n - u_j^n v_i^n|^2}$$

$u_i^n,\ v_i^n$ az $|u^n\rangle$ és $|v^n\rangle$ kifejtési együtthatói a standard bázisban

Összefonódási mérték: $\boxed{Q(|\psi\rangle) = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^{N} D(|u^n\rangle, |v^n\rangle)}$

Q tulajdonságai:

- Invariáns lokális unitér transzformációkkal szemben
- Q=0, akkor és csak akkor, ha $|\psi\rangle$ szorzatállapot
- Q=1 Bell állapotokra és a GHZ típusú állapotokra

A föntiek szerint egy $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^{2^N}$ állapot akkor és csak akkor **nem** összefonódott, ha a

$$\boxed{|\psi\rangle = |0\rangle_n \otimes |u^n\rangle + |1\rangle_n \otimes |v^n\rangle}$$

fölbontásban $|v^n\rangle = \alpha_n |u^n\rangle,\ \alpha_n \in \mathbb{C}$ minden n-re

Koherens állapotok és globális összefonódás N részű rendszerben

QUBITEK

Az N qubites rendszer szimmetrikus altere: $\mathbb{S}$

A vektorok, amelyek $\{|0\rangle, |1\rangle\}^{\otimes N}$ beli kifejtésében az 1-k száma rögzített : N_1
és ennek megfelelően a 0-k száma $N_0=N-N_1$ is rögzített.

$$\binom{N}{N_0} = \binom{N}{N_1}$$ dimenziós alteret feszítenek ki.

A $J_z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|)_n$ operátor $\boxed{M = \frac{N_1 - N_0}{2}}$ sajátértékéhez tartoznak

A különböző alterek száma $N+1$

Minden altérben van *pontosan egy vektor*, amelyik szimmetrikus a qubitek minden permutációjára nézve, ezek a szimmetrikus állapotok .

Az összes szimmetrikus állapot egy $N+1$ dimenziós alteret alkot: $\mathbb{S}$

Dicke (1954) féle szimmetrikus állapotok

$$
\begin{array}{cc}
|1,1,1,\dots 1\rangle & M = N/2, \\
(|0,1,\dots 1\rangle + |1,0,\dots 1\rangle + \dots |1,1,\dots 0\rangle)/\sqrt{N} & M = N/2-1 \\
(|0,0,1\dots 1\rangle + |0,1,0\dots 1\rangle + \dots |1,1,\dots 0,0\rangle)/\sqrt{N(N-1)/2} & M = N/2-2 \\
\vdots & \vdots \\
|0,0,0,\dots 0\rangle & M = -N/2
\end{array}
$$

Sugárzási tulajdonságaik:
M.B., E.D. Trifonov: in *Landolt Börnstein, Laser Physics and Applications* VIII/1 A/2. (Springer, 2006)

$$
|M = -N/2\rangle = |0,0,\dots,0\rangle = |{}^{N}_{0}\rangle
$$
$$
|M = N/2\rangle = |1,1,\dots,1\rangle = |{}^{N}_{N}\rangle
$$

nem összefonódottak, a többi Dicke állapot igen

További nemösszefonódott állapotok $\mathbb{S}$-ben

$$|M = -N/2\rangle = |0, 0, \ldots, 0\rangle = |{}^{N}_{0}\rangle$$
$$|M = N/2\rangle = |1, 1, \ldots, 1\rangle = |{}^{N}_{N}\rangle$$

Forgassuk el ezeket az állapotokat $\mathbb{S}$-en belül

$$J_z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|)_n, \quad J_+ = \sum_{n=1}^{N}(|1\rangle\langle 0|)_n, \quad J_- = \sum_{n=1}^{N}(|0\rangle\langle 1|)_n$$

$$J_x = (J_+ + J_-)/2 \qquad J_y = (J_+ - J_-)/2i$$

u 3-dimenziós egységvektor $\quad \mathbf{u} \Leftrightarrow |\tau_u\rangle \in \mathbb{S}$

$$(\mathbf{J} \cdot \mathbf{u})|\tau_u\rangle = J_x u_x + J_y u_y + J_z u_z = \frac{N}{2}|\tau_u\rangle$$

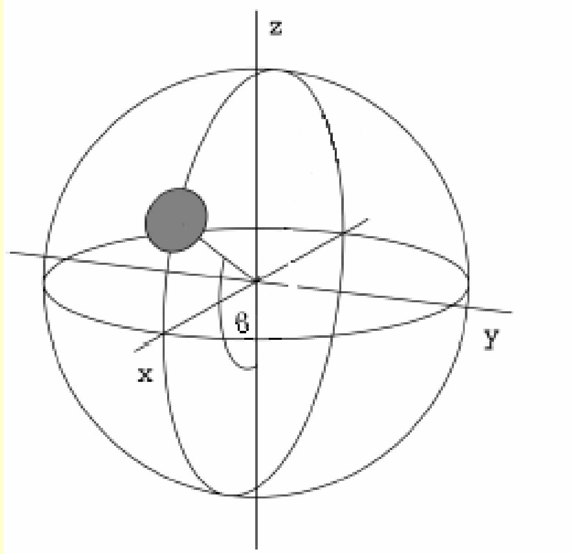
$$|\tau_u\rangle = e^{-i\theta(J_x \sin\varphi - J_y \cos\varphi)}|{}^{N}_{0}\rangle = R_{\theta\varphi}|M = -N/2\rangle.$$

$|\tau_u\rangle$:spin SU(2) koherens állapotok:

Gilmore 1972, Perelomov

$$|\tau_u\rangle = \sum_{M=-N/2}^{N/2} \binom{N}{N/2+M}^{\frac{1}{2}} \frac{\tau^{N/2+M}}{(1+|\tau|^2)^{N/2}} |M\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{\tau^k}{(1+|\tau|^2)^{\frac{N}{2}}} |{\textstyle{N \atop k}}\rangle = \frac{1}{(1+|\tau|^2)^{\frac{N}{2}}} (|0\rangle + \tau|1\rangle)^{\otimes N}$$



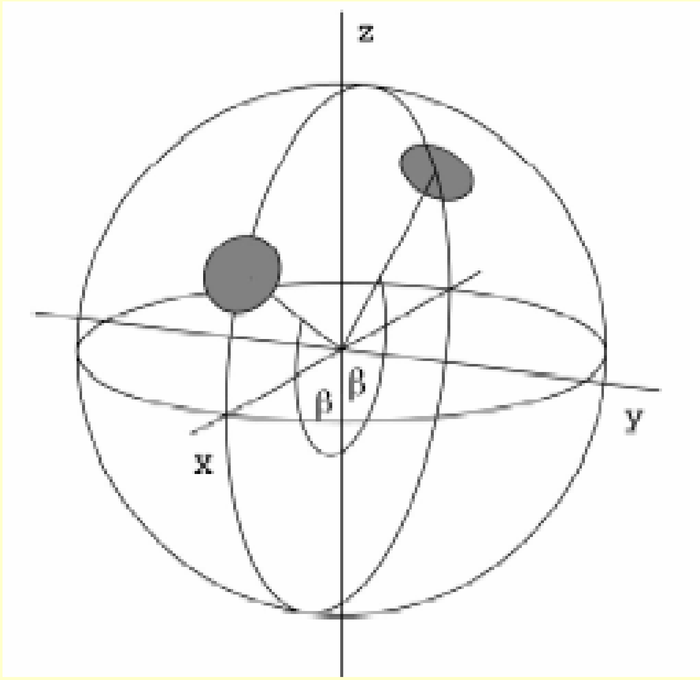
$$\tau = \tan(\theta/2) e^{-i\varphi}$$

A szimmetrikus altérben pontosan a koherens állapotok a nemösszefonódott állapotok

$\mathbb{S}_\perp$ minden állapota összefonódott

P. Dömötör, BM, Phys. Lett. A 372 (2008) 3792

Schrödinger macska állapotok:



M. B., A Czirják:, *PRA* **60**, 4034 (1999)

*P. Földi, A. Czirják, M.B***.** *PRA* **63,** 33807 (2001)

Általánosítás quKit-ekre

QuKit: K (véges) dimenziós rendszer, O.N. bázis: $\{|k\rangle\} = (|1\rangle, |2\rangle, \ldots |K\rangle)$

Léptető operátorok: $E_{ji}^{\dagger} = E_{ij} = |i\rangle\langle j|$ $i > j$

$[E_{ij}, E_{ij}^{\dagger}] = |i\rangle\langle i| - |j\rangle\langle j| =: H_{ij}$ diagonális a választott bázisban

Qukitek N-szeres tenzori szorzatának elemei:

$$|\psi\rangle = \sum_{k_1, k_2 \ldots k_N = 1}^{K} c(k_1 k_2 \ldots k_N) \, |k_1\rangle \, |k_2\rangle \ldots |k_N\rangle$$

Szimmetrikus altér: $\mathbb{S}$

Koherens állapotok: $|\eta\rangle := U(\eta) \, |1, 1 \cdots 1\rangle = \exp\left(\sum_{n=2}^{K} \eta_n \tilde{E}_{n,1} - \eta_n^* \tilde{E}_{n,1}^{\dagger} \right) |1, 1 \cdots 1\rangle$

Az $\mathbb{S}$ altérben ezek és csak ezek nemösszefonódottak

$\mathbb{S}_{\perp}$ minden állapota összefonódott

Dömötör Piroska, BM, Phys. Lett. A (2008) , Eur Phys. J D, (2009)