Aszimptotikus biztonság

Nagy Sándor

Elméleti Fizikai Tanszék, Debreceni Egyetem

MTA-DE Részecskefizikai Kutatócsoport, Debrecen

Szeged, augusztus 28-29.

Renormálás

- A funkcionális renormálási csoport (RG) módszer segítségével kvantumtérelméleti modellek nemperturbatív vizsgálatát végezhetjük el.
- Az RG módszer hidat képez a modell nagyenergiás (UV) és alacsony energiás (IR) leírása között.
- Az UV hatást ismerjük: a mikroszkopikus (kis távolságokon érvényes) kölcsönhatásokat írja le.
- Célunk, hogy a modell alacsony energiás (nagy távolságokhoz tartozó) viselkedését leírjuk.

Renormálás

A blokkosított hatásból indulunk ki:

$$S_k[\phi, g_i] = \sum_i g_i(k)\mathcal{F}_i(\phi),$$

ahol k (impulzus) *skála*, és $g_i (= g_i(k))$ a dimenziós (skálafüggő) csatolások. A hatás figyelembe veszi a modell szimmetriáit.

A pályaintegrál elvégése során a csatolásokat it felöltöztetik az ő kvantum fluktuációból származó korrekcióival.

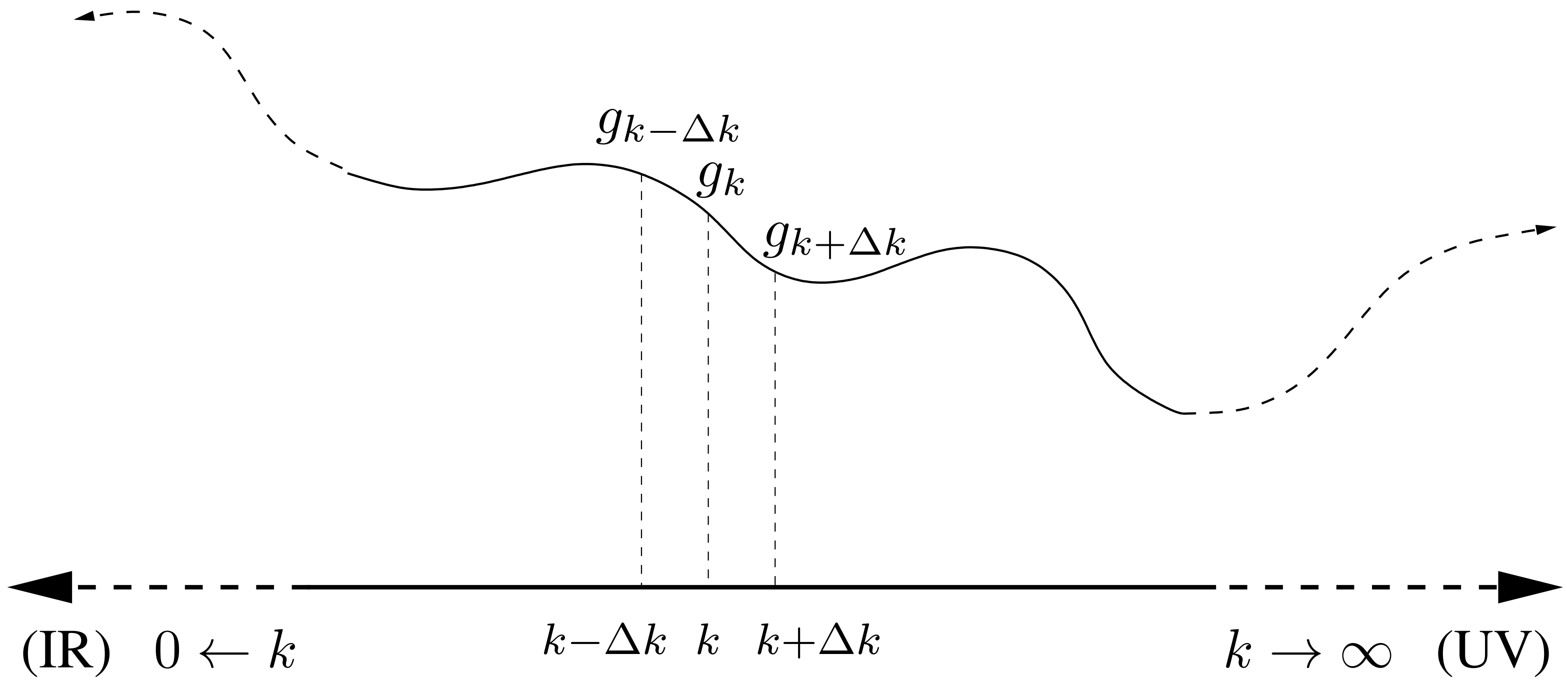
- *perturbatív renormálás*: eszköz a divergenciák szisztematikus eltávolítására
- *funkcionális renormálási csoport (RG)*: eszköz a szabasági fokok szisztematikus eltávolítására

A k skála

A vákum-vákuum átmeneti amplitúdó (a generáló funkcionál) alakja:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_k} = \int d\phi_0 \ldots d\phi_{k-\Delta k} d\phi_k d\phi_{k+\Delta k} \ldots d\phi_\infty e^{-S_k}$$

A pályaintegrált úgy végezzük el, hogy egyesével eltávolítjuk a szabadsági fokokat (módusokat, kvantumfluktuációkat).



A Wetterich egyenlet

A generáló funkcionál alakja:

$$Z = e^{W_k[J]} = \int D[\phi] e^{-(S_k + \mathcal{R}_k[\phi] - J\cdot\phi)}$$

A integrál a térváltozót átlagolja ki egy k^{-1} térfogatban. Az IR regulátor alakja

$$\mathcal{R}_k[\phi] = \frac{1}{2}\phi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \phi,$$

amely IR levágásként hat, és a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $\lim\limits_{p^2/k^2 \to 0} \mathcal{R}_k > 0$: IR regulátorként viselkedik
- $\lim\limits_{k^2/p^2 \to 0} \mathcal{R}_k \to 0$: $k \to 0$ határesetben visszakapjuk Z alakját
- $\lim\limits_{k^2 \to \infty} \mathcal{R}_k \to \infty$: a mikroszkopikus hatásra: $S = \lim_{k\to\Lambda} \Gamma_k$ (UV regulátorként is hat)

A Wetterich egyenlet

Gyakran használt IR regulátorok:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k &= ap^2 \frac{e^{-b(p^2/k^2)^c}}{1-e^{-b(p^2/k^2)^c}} \text{ exponenciális} \\
\mathcal{R}_k &= \left(\frac{k^2}{p^2}\right)^b \text{ hatványfüggvény} \\
\mathcal{R}_k &= (k^2-p^2)\theta(k^2-p^2) \text{ optimalizált vagy Litim}
\end{aligned}$$

k szerint deriválva

$$\partial_k W_k[J] = -e^{-W_k[J]} \partial_k \mathcal{R}_k \left[\frac{\delta}{\delta J}\right] e^{W_k[J]}$$

A $\Gamma_k[\phi]$ effektív hatás a $W_k[J]$ Legendre transzformáltja

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[J] + J\cdot\phi, \;\; \phi = \frac{\delta W[J]}{\delta J}, \;\; \text{and} \;\; \partial_k\Gamma_k = -\partial_k W_k[J]$$

A Wetterich egyenlet

Átdefiniáljuk az effektív hatást: $\Gamma_k \to \Gamma_k[\phi] + \mathcal{R}_k[\phi]$, bevezetjük az 'RG időt' $t = \log \frac{k}{k_0}$ és így kapjuk a Wetterich egyenletet:

$$\dot{\Gamma}_k = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{\mathcal{R}_k + \Gamma_k''},$$

ahol $' = \partial/\partial\varphi$ és $\dot{} = \partial/\partial t$, Tr egy hurokintegrál, és összegzés a belső indexekre.

Feltesszük, hogy az effektív hatás funkcionális alakja a blokkosított hatáséval megegyezik:

$$\begin{aligned} \Gamma_k &\sim S_k \\ &= \sum_i g_i(k)\mathcal{F}_i(\phi) \end{aligned}$$

A Wetterich egyenlet

Az effektív hatás térváltozójának gradiens kifejtése:

$$\Gamma_k = \int d^d x \Big[V_k(\phi_x) + \frac{1}{2} Z_k(\phi_x)(\partial_\mu \phi_x)^2 \\ + H_1(\phi_x)(\partial_\mu \phi_x)^2 + H_2(\phi_x)(\Box \phi_x)^2 + \dots \Big].$$

ahol a vezető rend a lokális potenciál közelítés (LPA), a következő rend pedig a hullámfüggvény renormálás $Z_k \equiv Z_k(\phi_x) = Z_k(\phi, p)$.
A potenciálra vonatkozó evolúciós egyenlet:

$$\dot{V}_k = \frac{1}{2} \int_p \frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{Z_k p^2 + \mathcal{R}_k + \tilde{V}_k''}.$$

A Wetterich egyenlet

A Litim regulátorral

$$\dot{V}_k = 2v_d k^d \frac{2}{d} \frac{k^2}{k^2 + V''},$$

alakú parciális differenciálegyenlet, ahol $v_d = \frac{1}{2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)}$. A térváltozó szerinti Taylor sorfejtés a potenciálra

$$V_k = \sum_{n=2}^{M} \frac{g_{2n}}{(2n)!} \phi^{2n}. \tag{1}$$

Behelyettesítve a csatolásokra egy közönséges differenciálegyenlet rendszert kapunk. Ezek lesznek a β függvények.

Evolúciós egyenletek

A csatolásokra vonatkozó RG evolúciós egyenletek általános alakja:

$$\begin{aligned}\dot{g}_i &= \beta_i(g_j, k) \;\; \text{dimenziós} \\ \dot{\tilde{g}}_i &= -d_i \tilde{g}_i + \underbrace{\alpha_i(\tilde{g}_j)}_{\beta_i(g_j k^{-d_j}, 1)} \equiv \tilde{\beta}_i(\tilde{g}_j) \;\; \text{dimenziótlan}\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_i = k^{-d_j} g_i$$

ahol d_j a kanonikus (impulzus) dimenziója.
Az evolúciós egyenletek fixpontjait az

$$\dot{\tilde{g}}_i = 0$$

egyenlet definiálja, ahol a megoldásokat $\tilde{g}_i^*$ szimbólummal jelöljük.

Evolúciós egyenletek

Bevezetve az eltolt $y_i = \tilde{g}_i - \tilde{g}_i^*$ csatolásokat megkaphatjuk az RG egyenletek fixpont körüli linearizálásával kapott evolúciós egyenleteket:

$$\dot{y}_i = M_{ij} y_j, \;\; M_{ij} = \frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial \tilde{g}_j}, \;\; \lambda_n \;\text{ az }\; M_{ij} \;\text{ sajátértékei}$$

Az M mátrix egy lineáris transzformációval diagonalizálható, $S_{ik}^{-1} M_{kl} S_{ln} = \delta_{in} \lambda_n$. Bevezetve a $z_i = S_{ik}^{-1} y_k$ csatolásokat

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \lambda_i z_i \\ z_i &= z_i(0) e^{\lambda_i t} = z_i(0) \left(\frac{k}{k_\Lambda} \right)^{\lambda_i} \end{aligned}$$

ahol k_Λ egy referencia UV skála.

Fixpontok osztályozása

Tegyük fel, hogy két csatolásunk van, amelyhez két λ sajátérték tartozik.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

1. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Ekkor a trajektória közelít a fixponthoz (vonzó csomópont).
2. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. A trajektória távolodik a fixponttól (taszító csomópont).
3. A λ_1, λ_2 sajátértékek előjele különböző. A fixpont a trajektóriát egy adott irányban vonzza egy másikban taszítja (hiperbolikus pont, vagy nyeregpont).

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\,(\rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2^*)$

1. $\Re\lambda_1, \Re\lambda_2 < 0$. A trajektória közelít a fixponthoz (vonzó fókusz).
2. $\Re\lambda_1, \Re\lambda_2 > 0$. A trajektória távolodik a fixponttól (taszító fókusz).
3. A valós rész nulla. A trajektória zárt pályán kering a fixpont körül (elliptikus pont).

Több csatolás esetén a több csoport van.

Gaussi fixpont (GFP)

Szabad, tömegtelen elméletet ír le:

$$\tilde{g}_i^* = 0$$

A GFP az fázistér origójában van. Taylor sorfejtve a β-függvényeket

$$\tilde{\beta}_i = -d_i\tilde{g}_i + a_i\tilde{g}_i + a_{ijk}\tilde{g}_j\tilde{g}_k \dots$$
$$\rightarrow \quad M_{ij} = -d_{ij} + a_{ij}, \text{ de } a_{ij} = 0, \text{ ha } i < j$$
$$\rightarrow \quad \lambda_i = -d_i$$

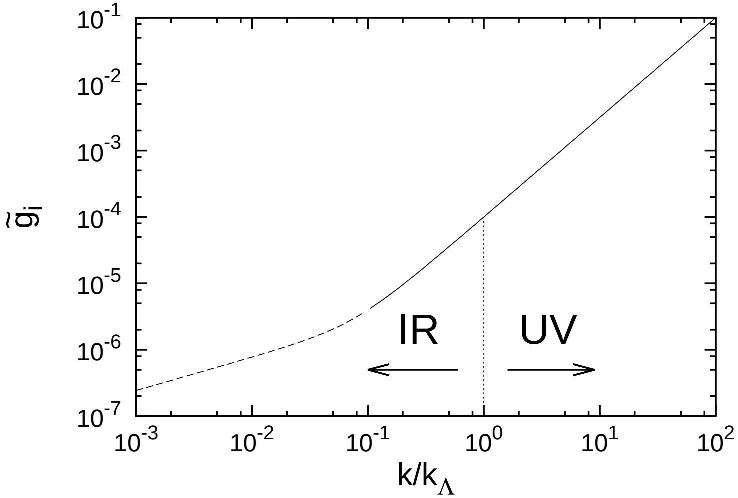
Az M sajátértékei a negatív kanonikus dimenzióval egyenlőek. Minden λ valós.

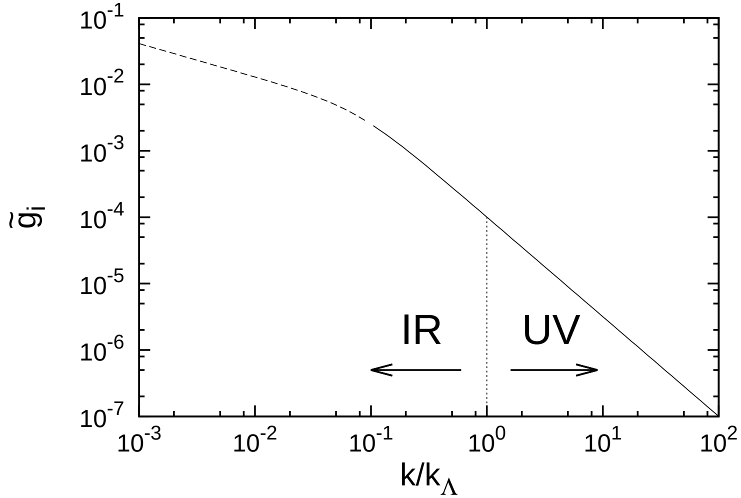
A sajátérték előjele határozza meg, hogy a trajektória a távolodik vagy közeledik a fixponthoz.

Ha $\lambda_i > 0$ ($d_i < 0$), akkor $z_i \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). A fixpont taszítja a trajektóriát.

$k \rightarrow 0$ esetén $z_i \rightarrow 0$, a csatolás egyre kisebb, *irreleváns*

GFP





Ha $\lambda_i < 0$ $(d_i > 0)$, akkor $z_i \to 0$, ha $k \to \infty$ $(t \to \infty)$. A fixpont vonzza a trajektóriát.

$k \to 0$ esetén $z_i \to 0$, a csatolás divergál, *releváns*.

$\lambda_i = 0$ marginális a kölcsönhatás.

A csatolások hatványfüggvény szerint skáláznak a fixpont környezetében.

Távolodva a fixponttól az evolúció már nem követi a lineáris fejlődést, ha van újabb fixpont alacsonyabb k skálán $\to$ a GFP körüli látszólagos divergenciákat adó skálázásokat felülírhatja egy újabb fixpont.

GFP

Perturbatív renormálhatóság

$$\forall\, d_i > 0$$

(csak renormálható csatolások (kölcsönhatások) vannak)

Aszimptotikus szabadság:

$$\forall\, \tilde{g}_i \quad \lim_{t\to\infty} \tilde{g}_i = 0$$

Az irreleváns csatolásokkal és a kritikus exponensek kapcsolata:

$$\nu = -1/\lambda$$

ahol a ν a ξ korrelációs hosszhoz tartozó kritikus exponens $\xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$.

Példák aszimptotikusan szabad elméletekre: QCD, ϕ^4 modell...

A kritikus felület dimenziója egyenlő a negatív sajátértékek számával.

Aszimptotikus szabadság, ϕ^4 modell

3d ϕ^4 modellre Litim regulátorral kapott evolúciós egyenlet

$$\dot{V} = \frac{1}{6\pi^2}\frac{k^5}{k^2 + V''}$$

A potenciál Taylor sorfejtett alakja

$$V = \sum \frac{\tilde{g}_{2n}}{(2n)!}\phi^{2n}.$$

Két csatolásra kapott dimenziótlan β-függvények:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_2 &= -2\tilde{g}_2 - \frac{\tilde{g}_4}{8\pi(1+\tilde{g}_2)^{1/2}}\\ \tilde{\beta}_4 &= -\tilde{g}_4 + \frac{3\tilde{g}_4^2}{16\pi(1+\tilde{g}_2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Más regulátorok kvalitatív módon változtatják az RG egyenletek alakját.

Aszimptotikus szabadság, ϕ^4 modell

Sorfejtve adjuk meg a perturbatív RG egyenleteket.

Nulladrendű közelítésben minden csatolás a kanonikus dimenziója alapján skálázik:

$$\tilde{g}_i = \tilde{g}_i(k_\Lambda)e^{-d_i t},$$

ahol $d_i = d + i\left(1 - \frac{d}{2}\right)$. A linearizált RG egyenletekhez tartozó M mátrix

$$M = \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{g}_2}\beta_2 & \partial_{\tilde{g}_4}\beta_2 \\ \partial_{\tilde{g}_2}\beta_4 & \partial_{\tilde{g}_4}\beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

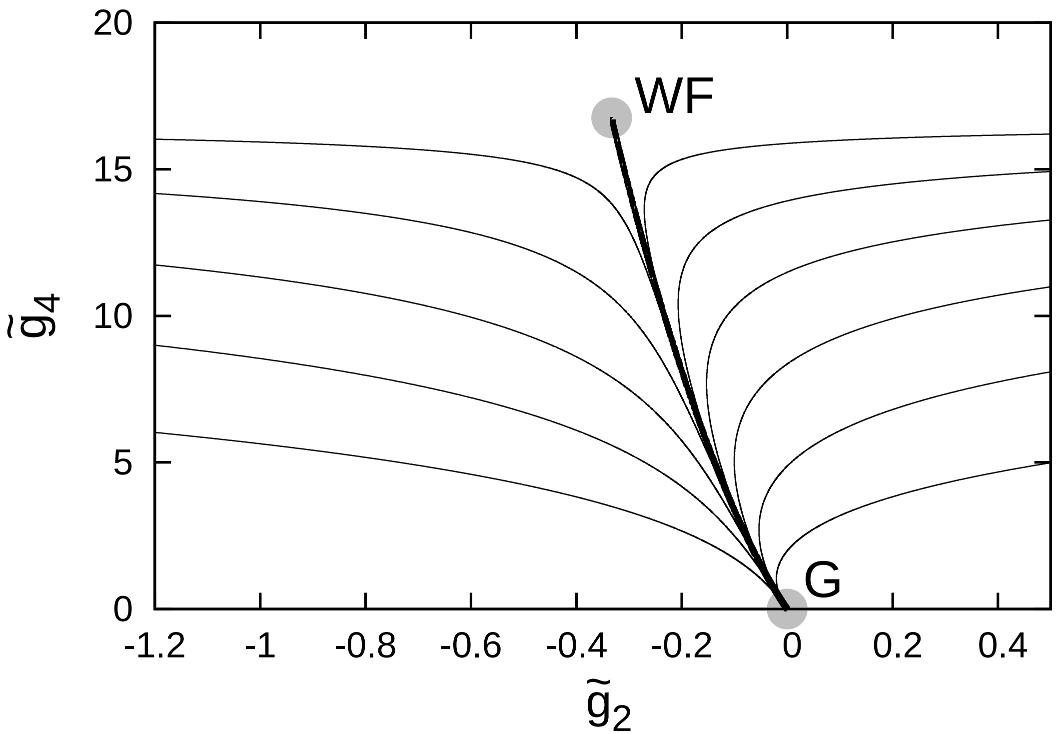
$\rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1 \rightarrow$ a GFP taszító csomópont (UV vonzó), mindkét csatolás *releváns*. Az elmélet aszimptotikusan szabad.

A sorfejtés további rendjei nem változtatják meg a GFP-hoz tartozó λ-k értékeit, így a GFP títusát sem.

Aszimptotikus szabadság, ϕ^4 modell

Az RG egyenleteket a következő renddel feljavítva

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{g}}_2 &= -2\tilde{g}_2 - \frac{\tilde{g}_4}{8\pi} + \mathcal{O}(\tilde{g}_i^2),\\ \dot{\tilde{g}}_4 &= -\tilde{g}_4 + \frac{3\tilde{g}_4^2}{16\pi} + \mathcal{O}(\tilde{g}_i^3)\end{aligned}$$



Aszimptotikus szabadság, ϕ^4 modell

A modellnek két fixpontja van:

GFP: $\tilde{g}_2^* = \tilde{g}_4^* = 0$ ($\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$)

NGFP: nem gaussi fixpont: Wilson-Fisher fixpont $\tilde{g}_2^* = -1/3$ és $\tilde{g}_4^* = 16\pi/3$

Az M mátrix:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{8\pi} \\ 0 & -1 + \frac{3\tilde{g}_4}{8\pi} \end{pmatrix}_{g_2^*=-1/3, \tilde{g}_4^*=16\pi/3} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{8\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

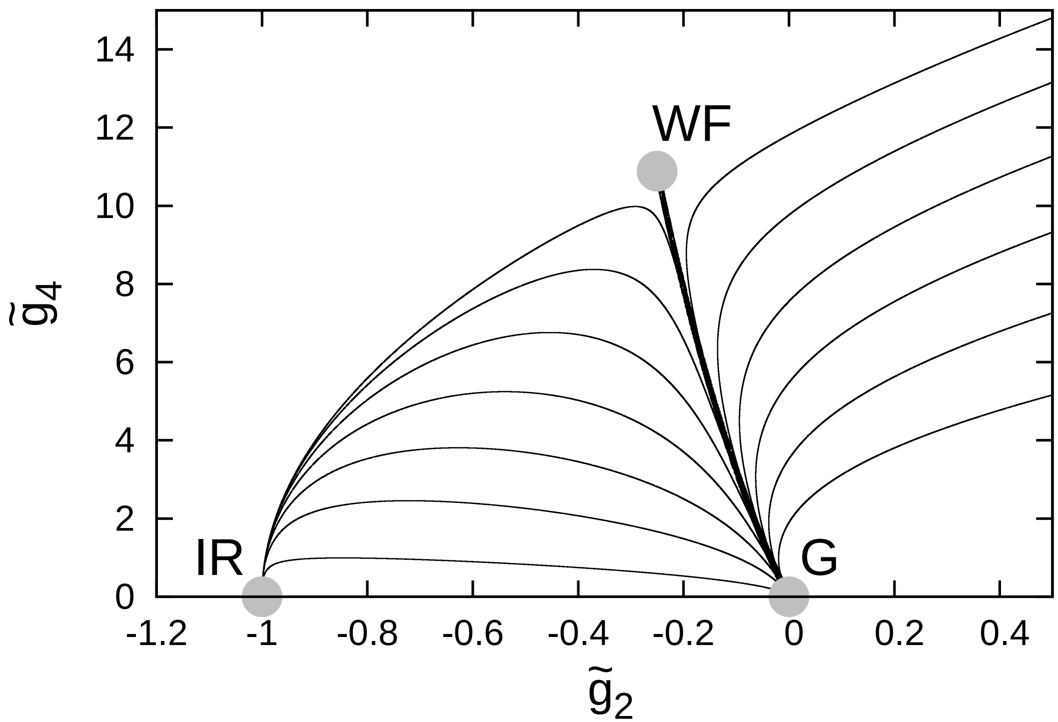
a sajátértékek: ($\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = 1$), nyeregpont. A WF fixpont $d = 4$-hez közeledve beleolvad a GFP-ba. Kritikus exponens $\nu = -1/\lambda_1 = 1/2$.

A 3d ϕ^4 modellnek két fázisa van: szimmetrikus, (spontán) szimmetriasértett, a Z_2 szimmetria sérül le ($\phi \leftrightarrow -\phi$)

Aszimptotikus szabadság, ϕ^4 modell

Az egzakt RG egyenletek:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{g}}_2 &= -2\tilde{g}_2 - \frac{\tilde{g}_4}{8\pi(1+\tilde{g}_2)^{1/2}},\\ \dot{\tilde{g}}_4 &= -\tilde{g}_4 + \frac{3\tilde{g}_4^2}{16\pi(1+\tilde{g}_2)^{3/2}}\end{aligned}$$



Aszimptotikus szabadság, ϕ^4 modell

A modellnek 3 fixpontja van:

GFP: $\tilde{g}_2^* = \tilde{g}_4^* = 0$ ($\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$)

NGFP: WF fixpont $\tilde{g}_2^* = -1/4$ and $\tilde{g}_4^* = 2\sqrt{3}\pi$

Az M mátrix:

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \\ -4\sqrt{3}\pi & 1 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow \lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = 4/3$

IR: $\tilde{g}_2^* = -1$ and $\tilde{g}_4^* = 0$ ($\tilde{V}_0 = -\phi^2/2$)

Csatolások átskálázása: $\omega = 1 + \tilde{g}_2$, $\chi = \tilde{g}_4/\omega$ és $\partial_\tau = \omega\partial_t$

$$\begin{aligned} \partial_\tau\omega &= 2\omega(1-\omega) - \frac{\chi\omega}{8\pi}, \\ \partial_\tau\chi &= -\chi + \frac{\chi^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Aszimptotikus biztonság

Az aszimptotikus biztonság az aszimptotikus szabadság fogalmának általánosítása.
aszimptotikus biztonság: az elmélet nem divergens a levágás végtelenbe távolítása után, feltéve, ha rendelkezik egy olyan fixponttal a fázistérben, amely nem a végtelenben van, és véges sok UV vonzó iránya van (véges sok releváns operátor, vagy csatolás van). Röviden: van egy nem-triviális UV vonzó fixpont.

- Végtelensok releváns csatolás nem prediktív, mert nincs megszorítás a fázistérre.
- A fixpont nem feltétlen gaussi, de végessége garantálja, hogy a fizikai mennyiségek is végesek lesznek.

Az UV NGFP-ban a csatolások releváns-irreleváns megkülönböztetése nem elégséges, mert lehetnek komplexek az exponensek.
Példák: Gross-Neveu modell, nemlineáris σ modell, sine-Gordon modell, kvantumgravitáció

Aszimptotikus biztonság, NLSM

Nemlineáris σ modell: a φ leképezés dinamikáját írja le amely a d-dimenziós $\mathcal{M}$ sokaságot a D-dimenziós N sokaságra képezi le.

A modell hasonlít a kvantumgravitációra:

- nempolinomiális a hatás
- a csatolások dimenziója megegyezik
- háttértér módszerrel vezetjük le az RG egyenleteket

$d = 2$-ben a NLSM aszimptotikusan szabad

A modell:

$$S = \frac{1}{2}\zeta \int d^d x \partial_\mu \varphi^\alpha \partial^\mu \varphi^\beta h_{\alpha\beta}(\varphi)$$

ahol $h_{\alpha\beta}$ a dimenziótlan metrika, a csatolás pedig $\zeta = 1/g^2$, melynek dimezniója $[g] = k^{(2-d)/2}$.

A perturbatív RG egyenlet:

$$\beta_g = \frac{d-2}{2}\tilde{g} - c_d \frac{R}{D}\tilde{g}^3, \quad c_d = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2+1)}$$

Aszimptotikus biztonság, NLSM

Fixpontok:

GFP: $g_G^* = 0$, $\lambda = (d-2)/2$, ha $d > 2$ akkor nemrenormálható

NGFP: $g_{UV}^{*2} = (d-2)D/(2c_d D)$, $\lambda = 2-d$, ha $d > 2$ akkor UV NGFP $\to$ aszimptotikus biztonság

Egzakt RG egyenletek:

$$\beta_g = \frac{d-2}{2}\tilde{g} - \frac{c_d \frac{R}{D}\tilde{g}^3}{1 - 2c_d \frac{R}{D(d+2)}\tilde{g}^2}$$

GFP: $g_G^* = 0$, $\lambda = (d-2)/2$, ha $d > 2$ akkor nemrenormálható

NGFP: $g_{UV}^{*2} = D(d^2-4)/(4c_d dR)$, $\lambda = -2d(d-2)/(d+2)$, ha $d > 2$ akkor UV NGFP $\to$ aszimptotikus biztonság

A perturbatív és az egzakt eredmény kvalitatív módon megegyezik.

Aszimptotikus biztonság, GN modell

Gross-Neveu modell

$$S[\bar{\psi},\psi] = \int_x \left[Z_\psi \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi + \frac{\bar{g}}{2N_f} (\bar{\psi}\psi)^2 \right],$$

ahol a hullámfüggvény renormálás $Z_\psi = 1$ LPA-ban.

A dimenziótlan 4-fermion kölcsönhatás g csatolására vonatkozó RG egyenlet a $N_f \to \infty$ határesetben:

$$\beta_g = (d - 2 + 2\eta_\psi) g - 4 d_\gamma v_d l_1^F(0) g^2$$

A Litim regulátort használva $l_1^F(0) = 2/d$. $\eta_\psi = 0$ LPA-ban.

Fixpontok:

GFP: $g_G^* = 0$, $\lambda = d - 2$, ha $d > 2$ akkor nemrenormálható

NGFP: $g^* = \frac{d-2+2\eta_\psi}{4 d_\gamma v_d l_1^F(0)}$ ($g^* = \frac{3\pi^2}{4}$ Litim), $\lambda = 2 - d$, ha $d > 2$ akkor UV

NGFP $\to$ aszimptotikus biztonság

Aszimptotikus biztonság, SG modell

2d sine-Gordon modell:

$$\Gamma_k = \int \left[\frac{z}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + u\cos\phi\right],$$

ahol z a térfüggetlen hullámfüggvény renormálás, u a csatolás. A Z_2 szimmetria mellett van egy a térváltozóra vonatkozó diszkrét eltolási szimmetria.
A modell periodicitása, és az effektív potenciál konvexitása miatt a dimenziós effektív potenciál konstans, nulla. Vezető rendű RG egyenletek:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{u}} &= \tilde{u}\left(-2+\frac{1}{4\pi z}\right), \;\; \tilde{u} = \tilde{u}(k_\Lambda)\left(\frac{k}{k_\Lambda}\right)^{-2+\frac{1}{4\pi z}} \\
\dot{z} &= 0, \;\; z = z(k_\Lambda)
\end{aligned}$$

Aszimptotikus biztonság, SG modell

- Ha $1/z > 8\pi$, akkor $\tilde{u}$ irreleváns, a modell nemrenormálható.
- Ha $1/z < 8\pi$, akkor $\tilde{u}$ releváns, a modell renormálható.

"Fixpontok": $\tilde{u}^* = 0$ és z tetszőleges: fixpontokból álló vonal.
Az M mátrix:

$$\begin{pmatrix} -2 + \frac{1}{4\pi z} & -\frac{\tilde{u}}{4\pi z^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{u}^*=0, z^*} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{1}{4\pi z^*} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

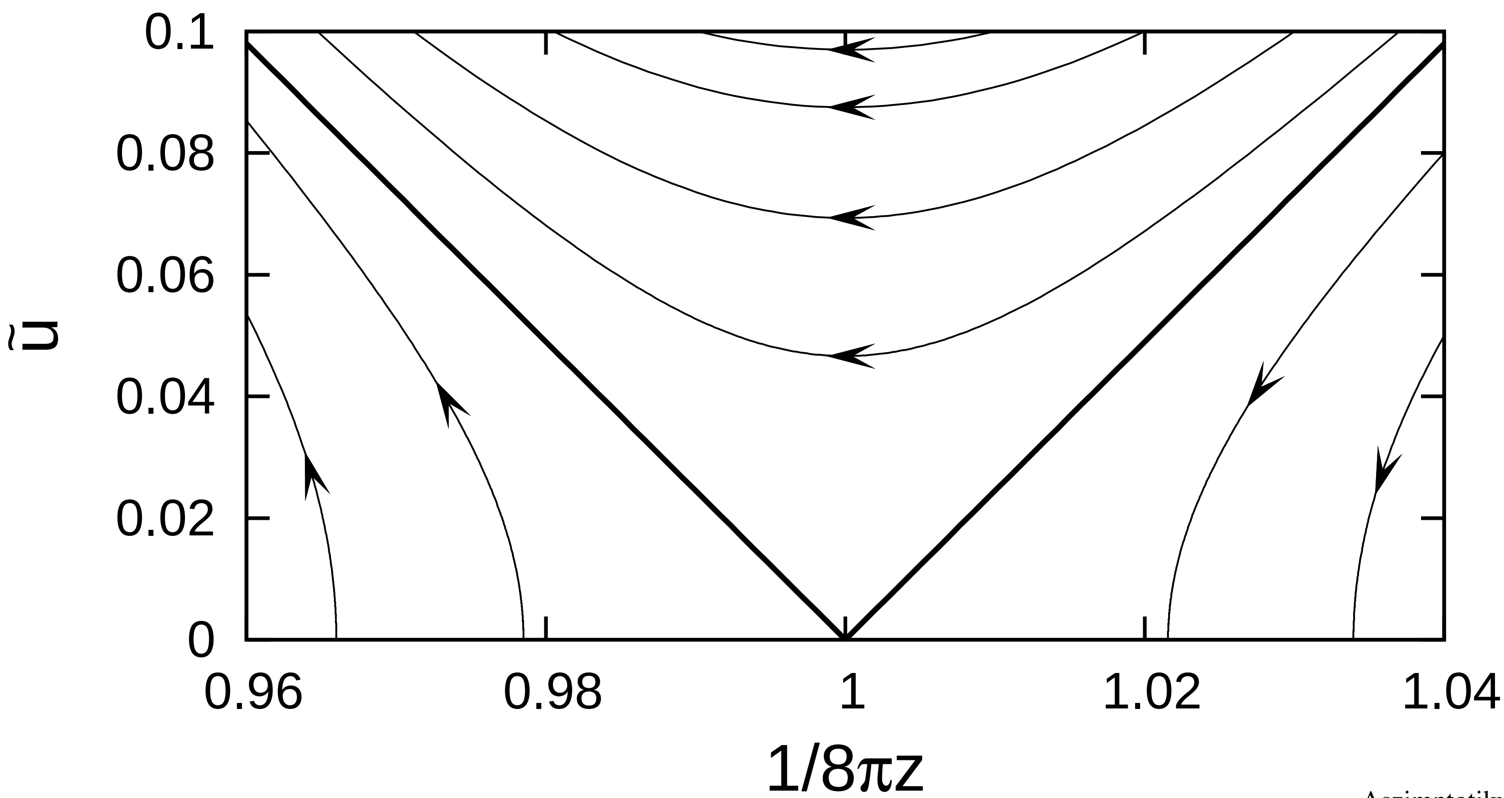
$\rightarrow \lambda_1 = -2 + \frac{1}{4\pi z^*}$
A $\tilde{u}^* = 0$, $z_c^* = 1/8\pi$ a Coleman pont, amely szétválasztja a modell két fázisát.

- Ha $1/z > 8\pi$, szimmetrikus fázis, $\tilde{V}_0 = 0$.
- Ha $1/z < 8\pi$, szimmetriasértett fázis (Z_2 szimmetria sérül, $\tilde{V}_0 = \tilde{\phi}^2/2$).

Aszimptotikus biztonság, SG modell

Következő rendű RG egyenletek:

$$
\begin{aligned}
(2+k\partial_k)\tilde{u} &\approx \frac{\tilde{u}}{4\pi z} + \mathcal{O}(\tilde{u}^2) \\
k\partial_k z &\approx -\frac{\tilde{u}^2}{24\pi} + \mathcal{O}(\tilde{u}^3)
\end{aligned}
$$



Aszimptotikus biztonság, SG modell

Ugyanaz a fixpontokból álló vonal van: $\tilde{u}^* = 0$ és z tetszőleges.

Az M mátrix:

$$\begin{pmatrix} -2 + \frac{1}{4\pi z} & -\frac{\tilde{u}}{4\pi z^2} \\ -\frac{\tilde{u}}{12\pi} & 0 \end{pmatrix}_{\tilde{u}^*=0, z^*} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{1}{4\pi z^*} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A $\tilde{u}^* = 0$, $z_c^* = 1/8\pi$ a Kosterlitz-Thouless fixpont, a modell végtelenedrendű (topologikus) fázisátalakulást mutat.

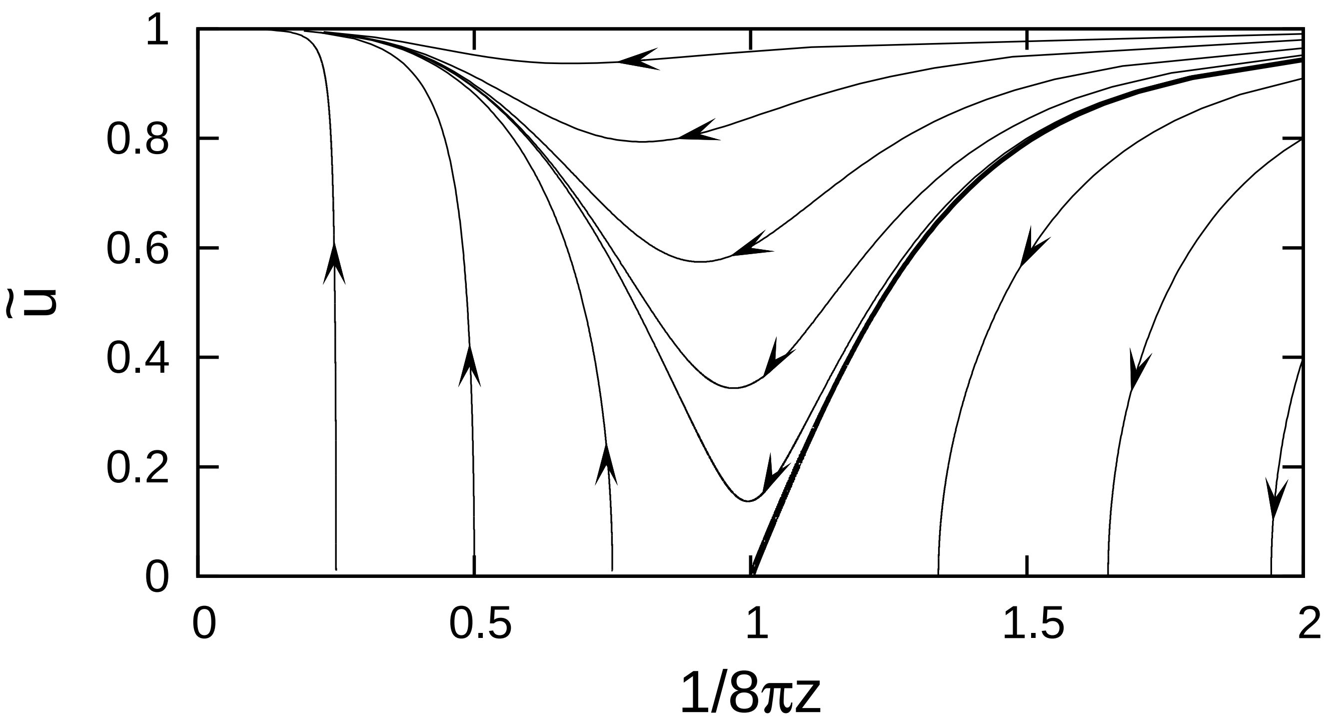
- A releváns $\tilde{u}$ a spontán szimmetriasértett fázishoz tartozik.
- Az irreleváns $\tilde{u}$ a szimmetrikus fázishoz tartozik.

A két fázist a szeparátrix választja el.

Aszimptotikus biztonság, SG modell

Egzakt RG egyenletek ($b = 1$):

$$
\begin{aligned}
(2 + k\partial_k)\tilde{u} &= \frac{1}{2\pi\tilde{u}z}\left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}^2}\right] \\
k\partial_k z &= -\frac{1}{24\pi}\frac{\tilde{u}^2}{(1 - \tilde{u}^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$



Aszimptotikus biztonság, SG modell

Az RG egyenleteknek nincs fixpontja, azonban a fázistérkép azt mutatja, hogy a következő fixpontok vannak:

- $\tilde{u}^* = 0$, z tetszőleges: ha $1/z < 8\pi$ UV vonzó (releváns), ha $1/z < 8\pi$ UV taszító (irreleváns).
- $\tilde{u}^* = 1$, $1/z^* = 0$, IR vonzó fixpont. Átskálázott egyenletek ($\omega = \sqrt{1-\tilde{u}^2}$, $\chi = 1/z\omega$ és $\partial_\tau = \omega^2 k \partial_k$):

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \omega &= 2\omega(1-\omega^2) - \frac{\omega^2\chi}{2\pi}(1-\omega), \\
\partial_\tau \chi &= \chi^2 \frac{1-\omega^2}{24\pi} - 2\chi(1-\omega^2) + \frac{\omega\chi^2}{2\pi}(1-\omega).
\end{aligned}$$

- $\tilde{u}^* = 1$, $z = 0$ UV NGFP, aszimptotikus biztonság. A modell szinguláris az UV NGFP-ban, ez felső határt jelöl ki az elmélet alkalmazhatóságához (a vortexek spinné redukálódnak).

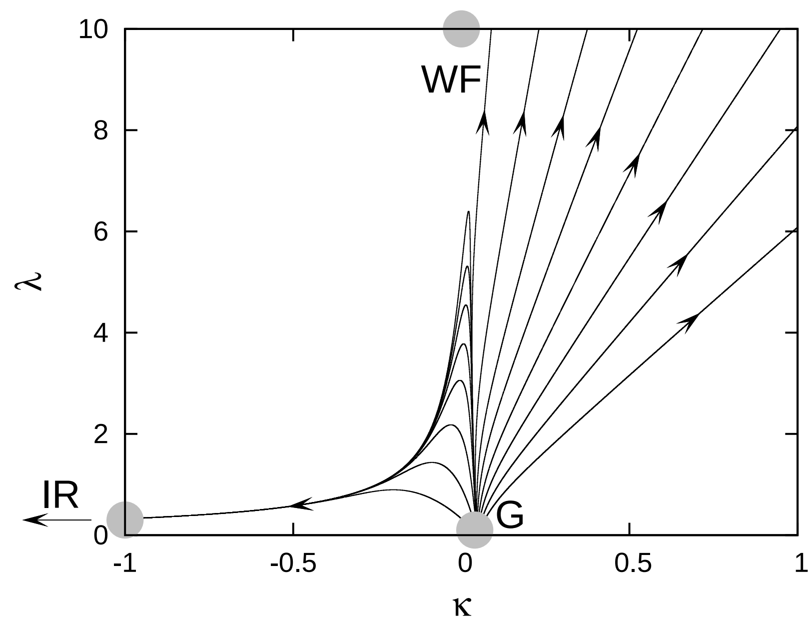
Infravörös fixpont

d-dimenziós $O(N)$ modell: $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4$.

- $d = 1$, $m^2 < 0 \to$ alagút effektus
- $d = 2$, $N = 2 \to$ topologikus fázisátalakulás
- tetszőleges d, $N = 1 \to$ Ising típusú fázisátalakulás
- $d = 4$, $m^2 < 0 \to$ spontán szimmetriasértés, Higgs mechanizmus

Funkcionális RG egyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= -\kappa + \frac{1}{2\pi^2(1+2\kappa\lambda)^2} \\ \dot{\lambda} &= -\lambda + \frac{3\lambda^2}{\pi^2(1+2\kappa\lambda)^3} \end{aligned}$$

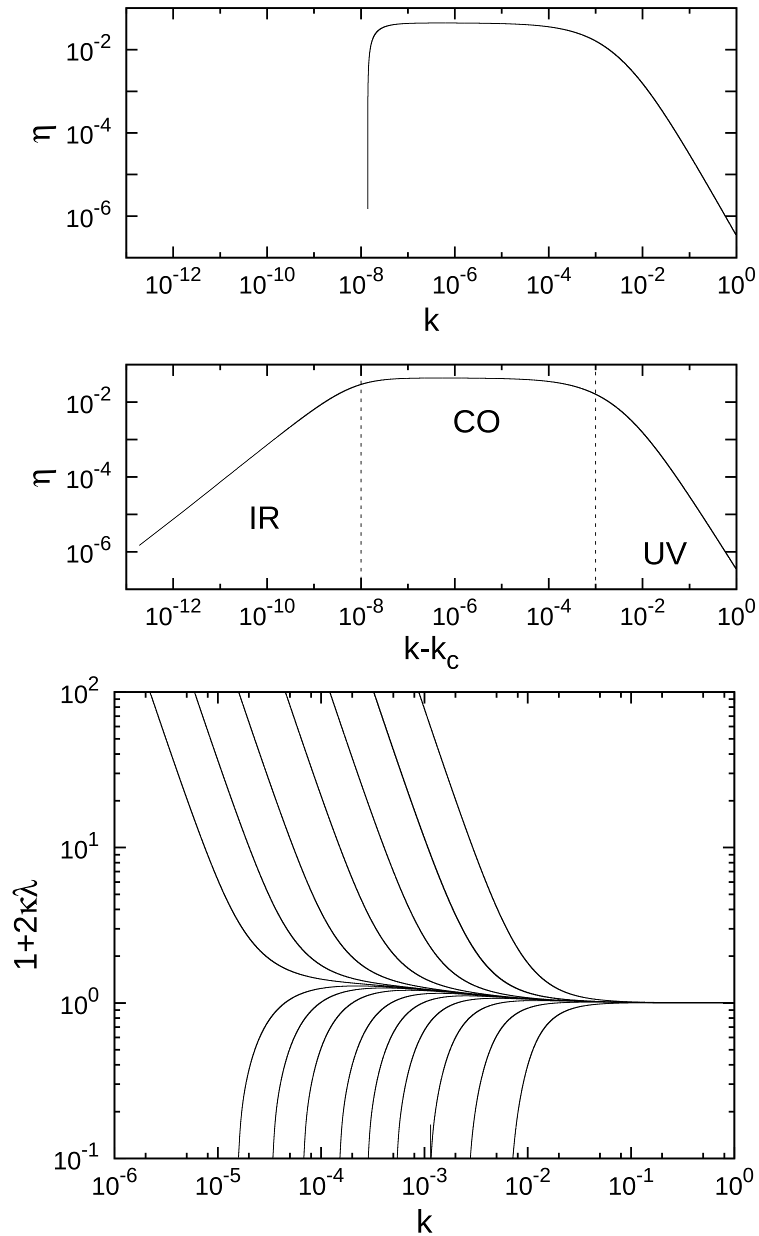


A korrelációs hossz skálázása

Az η anomális diemnzió evolúciója a k_c skálánál leáll

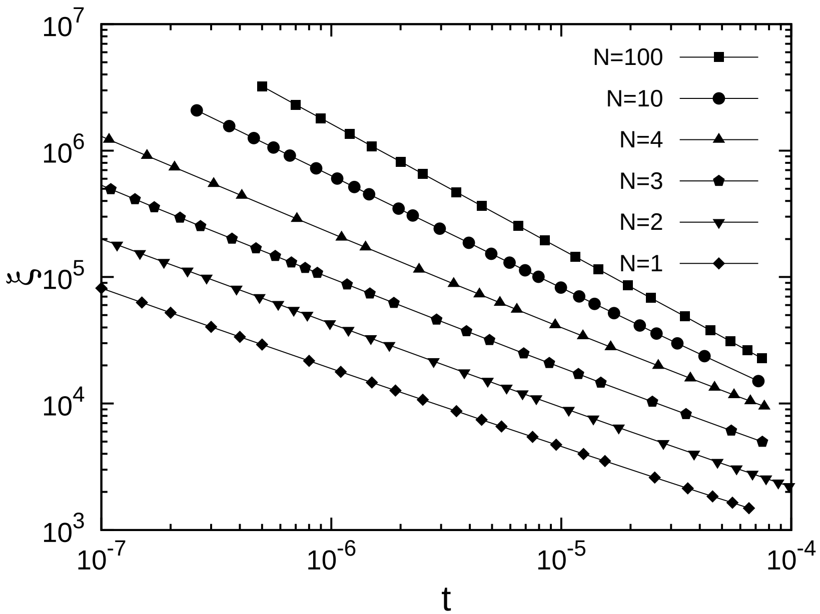
$$\eta = \begin{cases} (k-k_c)^{-2} & \text{G} \\ 0.043 & \text{WF} \\ (k-k_c)^{1} & \text{IR} \end{cases}$$

Az RG egyenletek szingulárissá válnak $k \sim 1/\xi$-nál az IR fixpont közelében



A ν kritikus exponens

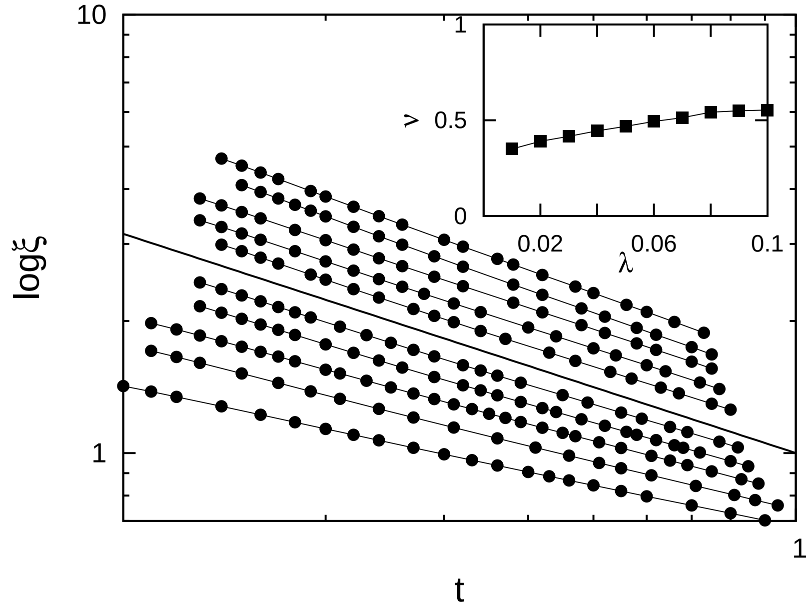
3d $O(N)$ modell



$$\xi \sim t^{-\nu}$$

N	1	2	3	4	10	100
$\nu_{\rm IR}$	0.624	0.666	0.715	0.760	0.883	0.990
$\nu_{\rm WF}$	0.631	0.666	0.704	0.739	0.881	0.990

2d $O(2)$ modell



$$\log \xi \sim t^{-\nu}$$

$$\nu \approx \frac{1}{2}$$

Coleman-Weinberg model

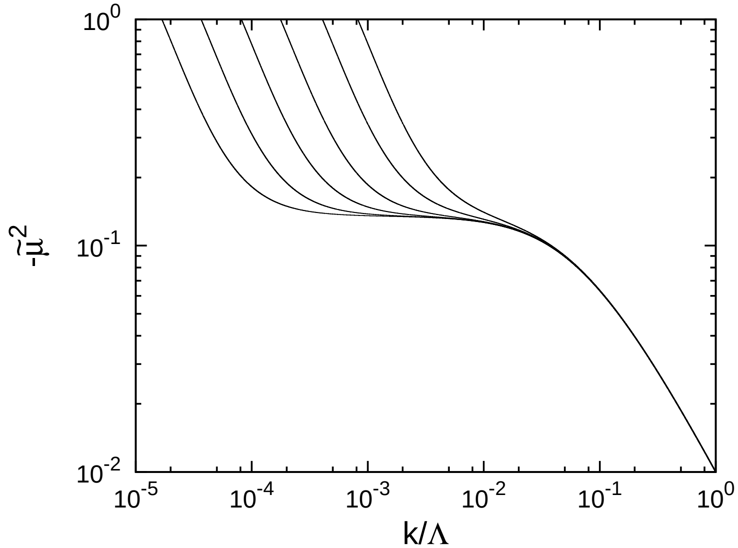
$U(2) \times U(2)$ szimmetria (példa elsőrendű fázisátalakulásra)

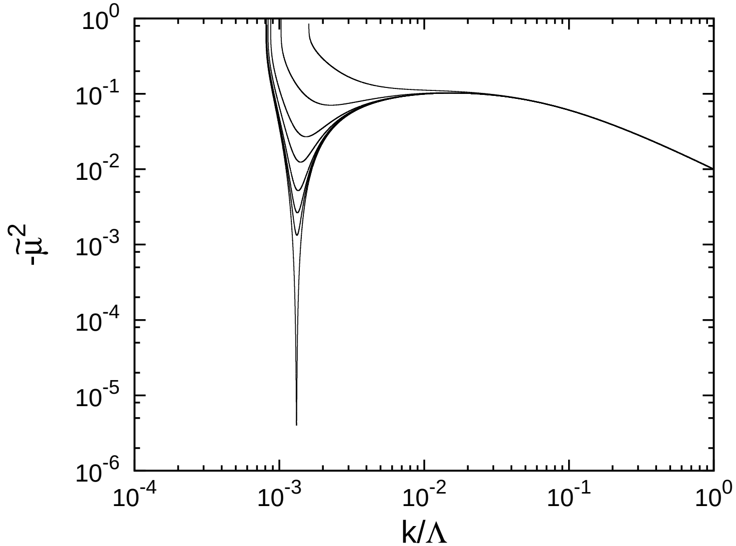
Az RG egyenletek

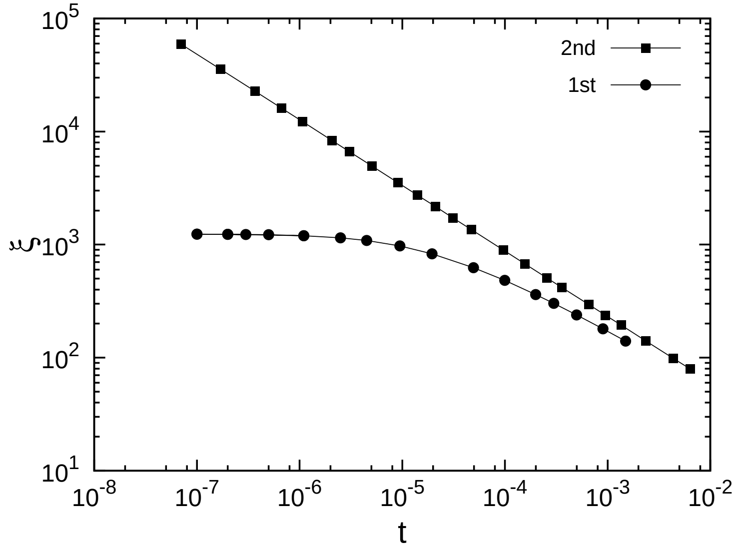
$$\dot{\tilde{\mu}}^2 = -2\tilde{\mu}^2 - \frac{5\tilde{\lambda}_1 + 18\tilde{\lambda}_2}{9\pi^2(1+\tilde{\mu}^2)^2},$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}_1 = -\tilde{\lambda}_1 + \frac{8(2\tilde{\lambda}_1^2 + 9\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + 54\tilde{\lambda}_2^2)}{9\pi^2(1+\tilde{\mu}^2)^3},$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}_2 = -\tilde{\lambda}_2 - \frac{4(\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\lambda}_2^2)}{3\pi^2(1+\tilde{\mu}^2)^3}$$







Kvantum Einstein gravitáció

A gravitáció kvantumelmélete?

A térváltozó szerepét a metrika játssza, erre írjuk fel a pályaintegrált.

A legegyszerűbb modell két csatolást tartalmaz:

- kozmológiai állandó: $\lambda = k^{-2}\Lambda_k$, vezető rendben releváns,
- Newton állandó: $g = Gk^{d-2}$, irreleváns.

A g-re szüségünk van, viszont így nem renormálható kvantumelméletre vezet.

Hogyan oldható meg ez a probléma?

- az UV elmélet új szabadsági fokokkal írható le (pl. húrelmélet)
- $G \sim k^{2-d}$ $\to$ aszimptotikus biztonság

A $g_{\mu\nu}$ metrika diffeomorfizmus invariáns funkcionáljaból álló elmélet:
Kvantum Einstein gravitáció (QEG).

Az elmélet nem a klasszikus általános relativitáselmélet kvantált formája, mert a csupasz hatás a NGFP körül értelmezett.

QEG-ben nincsenek divergenciák az UV NGFP miatt $\to$ az elmélet szimptotikusan biztonágos.

QEG effektív hatás

Háttértér módszert használunk, hogy a mértékszimmetriát megőrizzük.
A pályaintegrált a $\gamma_{\mu\nu}$ metrikára, mint térváltozóra végezzük el. Felbontjuk

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x)$$

szerint, ahol $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ a háttértér metrika és $h_{\mu\nu}(x)$ az új integrálási változó. A generáló funkcionál alakja

$$\begin{aligned} \exp\{W_k\} \quad = \quad \int \mathcal{D}[h_{\mu\nu}; \mathcal{C}; \bar{\mathcal{C}}] \exp\{&-S[\bar{g}+h] - S_{gf}[h;\bar{g}] - S_{gh}[h, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}; \bar{g}] \\ &- \Delta_k S[h, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}; \bar{g}] - S_{source}\} \end{aligned}$$

$S[\bar{g}+h] = S[\gamma]$ a klasszikus hatás, amely invariáns a következő általános koordináta transzformációra: ($\mathcal{L}_v$ a v vektortér szerinti Lie derivált)

$$\delta\gamma_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v \equiv v^\rho \partial_\rho \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu v^\rho \gamma_{\rho\nu} + \partial_\nu v^\rho \gamma_{\mu\rho}$$

QEG effektív hatás

Az S_{gf} tag a mértékrögzítés

$$S_{gf}[h;\bar{g}] = \frac{1}{2\alpha}\int d^dx\sqrt{\bar{g}}\bar{g}^{\mu\nu}F_\mu F_\nu,$$

a S_{gh} tag a Faddeev-Popov tag a C^μ és $\bar{C}_\mu$ ghost változókkal

$$S_{gh}[h,C,\bar{C};\bar{g}] = -\frac{1}{\kappa}\int d^dx\bar{C}_\mu\bar{g}^{\mu\nu}\frac{\partial F_\nu}{\partial h_{\alpha\beta}}\mathcal{L}_C(\bar{g}_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}),$$

ahol $\kappa = (32\pi G)^{-1/2}$. Úgy kaphatjuk meg, hogy a

$$\delta h_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v\gamma_{\mu\nu},\ \ \delta\bar{g}_{\mu\nu} = 0$$

mértéktranszformációval hatunk az F_μ-re, utána a v^μ-t kifejezzük C^μ-vel. A Faddeev-Popov determináns a C^μ és $\bar{C}_\mu$-re vonatkozó pályaintegrállal reprezentáljuk.

QEG effektív hatás

Az IR regulátort a ghost és a gravitációs térre is be kell vezetni:

$$\begin{aligned}\Delta_k S[h, C, \bar{C}; \bar{g}] &= \frac{1}{2}\kappa^2 \int d^d x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu} \mathcal{R}^{grav}[\bar{g}]^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \\ &\quad + \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{R}^{gh}[\bar{g}] C^\mu .\end{aligned}$$

A forrástagok:

$$\begin{aligned}S_{source} &= -\int d^d x \sqrt{\bar{g}} (t^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \bar{\sigma}_\mu C^\mu + \sigma^\mu \bar{C}_\mu \\ &\quad + \beta^{\mu\nu} \mathcal{L}_C (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) + \tau_\mu C^\nu \partial_\nu C^\mu).\end{aligned}$$

Bevezetjük az effektív hatás klasszikus térváltozóit:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta t^{\mu\nu}}, \quad \xi_\mu = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}^\mu}, \quad \bar{\xi}_\mu = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \sigma^\mu},$$

QEG effektív hatás

Az effektív hatás egy Legendre transzformációval kapható meg:

$$\Gamma_k = \int d^d x \sqrt{\bar{g}}(t^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} + \bar{\sigma}_\mu \xi^\mu + \sigma^\mu \bar{\xi}_\mu) - W_k + \Delta S_k$$

Az egzakt RG egyenlet:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_k[\bar{h}, \xi, \bar{\xi}, \bar{g}] \quad &= \quad \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\sqrt{2}(\dot{\mathcal{R}}_k^{grav})_{\bar{h}\bar{h}}}{(\sqrt{2}\mathcal{R}_k^{grav} + \Gamma_k'')_{\bar{h}\bar{h}}} \\ &\quad -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\kappa^2(\dot{\mathcal{R}}_k^{gh})_{\bar{\xi}\xi}\left(\frac{1}{(\kappa^2\mathcal{R}_k^{gh} + \Gamma_k'')_{\bar{\xi}\xi}} - \frac{1}{(\kappa^2\mathcal{R}_k^{gh} + \Gamma_k'')_{\xi\bar{\xi}}}\right)\right]\end{aligned}$$

QEG effektív hatás

A QEG effektív hatás:

$$\Gamma_k = \int d^d x \sqrt{\det g_{\mu\nu}} \Bigg(\frac{1}{16\pi G_k}(2\Lambda_k - R) - \frac{\omega_k}{3\sigma_k} R^2 + \ldots \qquad \to f(R)$$
$$+ \frac{1}{2\sigma_k} C^2 + \frac{\theta_k}{\sigma_k} E + \ldots$$
$$+ \text{gf. tagok} + \text{gh. tagok} \Bigg).$$

- Az első sorban az $f(R)$ nemlokális funkcionál Taylor sorfjtése van. Lehet polinomiális vagy akár logaritmikus.
- Az első két tag alkotja az Einstein-Hilbert hatást.
- $C^2 = C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$ a Weyl tenzor négyzete
- $E = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2$ Gauss-Bonnet topologikus invariáns
- Az utolsó sorban a mértékrögzítő és ghost tagok vannak.

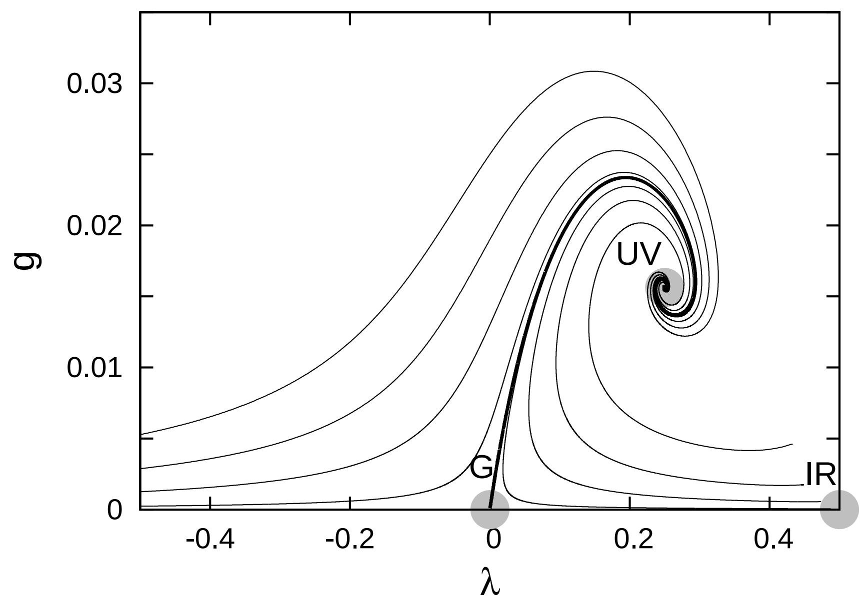
Evolúciós egyenletek

$$\dot{\lambda} = \frac{2(-96g^2 + \lambda + 4\lambda^2(11+\lambda) + g(8\lambda(1-3\lambda)-6))}{4g-(1-2\lambda)^2},$$

$$\dot{g} = (d-2+\eta)g, \quad \eta = \frac{24g}{4g-(1-2\lambda)^2} \text{ gravitációs anomális dimenzió}$$

A fixpontok

- UV (NGFP) taszító fókusz: $\lambda^*_{UV} = 1/4$, $g^*_{UV} = 1/64$
- Gaussi nyeregpont: $\lambda^*_G = 0$, $g^*_{UV} = 0$
- IR vonzó fixpont: $\lambda^*_{IR} = 1/2$, $g^*_{IR} = 0$



Kiterjesztések

QEG kiterjesztések:

- anyagi terek (gyakran egyszerű skalártér)
- $f(R)$ magasabb hatványai
- euklideszi téridő térfogat függvénye

Univerzális-e a fázisszerkezet?

UV: A fenti kiterjesztések az UV fixpontot megőrzik. Az exponensek értéke változik kiterjesztéstől és sémától függően: $\theta_{1,2} = \theta' \pm i\theta''$, $\theta' \approx 1.5 - 2$ és $\theta'' \approx 2.5 - 4.3$, ha $d = 4$.
A ν kritikus exponens: $\nu = 1/\theta'' \approx 1/3$

G: A gaussi fixpont nem univerzális, bizonyos anyagi terekkel kiterjesztett modellekben eltűnik.

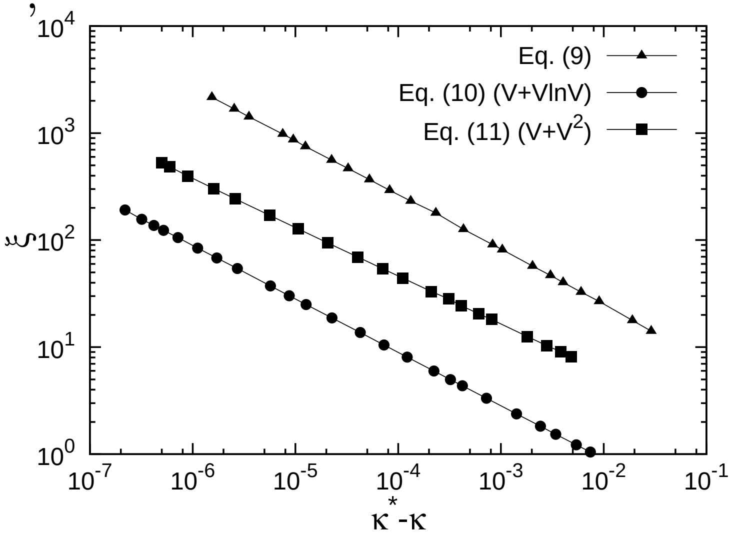
IR: Az IR fixpont viselkedése az átmeneti fixponttól függ.

Kiterjesztések

Bizonyos IR regulátorokkal kapott RG egyenlet:

$$\dot{\lambda} = -2\lambda + \frac{g}{6\pi}\frac{3-4\lambda-12\lambda^2-56\lambda^3+\frac{107-20\lambda}{12\pi}g}{(1-2\lambda)^2-\frac{1-10\lambda}{12\pi}g},$$

$$\dot{g} = 2g - \frac{g^2}{3\pi}\frac{11-18\lambda+28\lambda^2}{(1-2\lambda)^2-\frac{1-10\lambda}{12\pi}g} \qquad (9)$$



Euklideszi téridő $V = \int d^dx \sqrt{\det g_{\mu\nu}}$:

$\boxed{V + V\ln V}$

$$\dot{\lambda} = -2\lambda + \frac{g}{\pi}\left(\frac{5}{1-2\lambda-u} - 4\right),$$

$$\dot{g} = (d-2)g,$$

$$\dot{u} = -2u + \frac{10}{\pi}\frac{gu}{(1-2\lambda-u)^2} \qquad (10)$$

$\boxed{V + V^2}$

$$\dot{\lambda} = -2\lambda + \frac{g}{\pi}\left(\frac{5}{1-2\lambda} - 4\right) + \frac{32gw}{1-2\lambda},$$

$$\dot{g} = (d-2)g,$$

$$\dot{w} = -6w + \frac{5gw}{\pi(1-2\lambda)^2} + \frac{1024\pi g w^2}{(1-2\lambda)^3} \qquad (11)$$

- Van UV és gaussi fixpont
- ξ divergál, másodrendű fázisátalakulás
- Az exponens $\nu \approx 1/2$

Kiterjesztések

$\boxed{V+\sqrt{V}}$

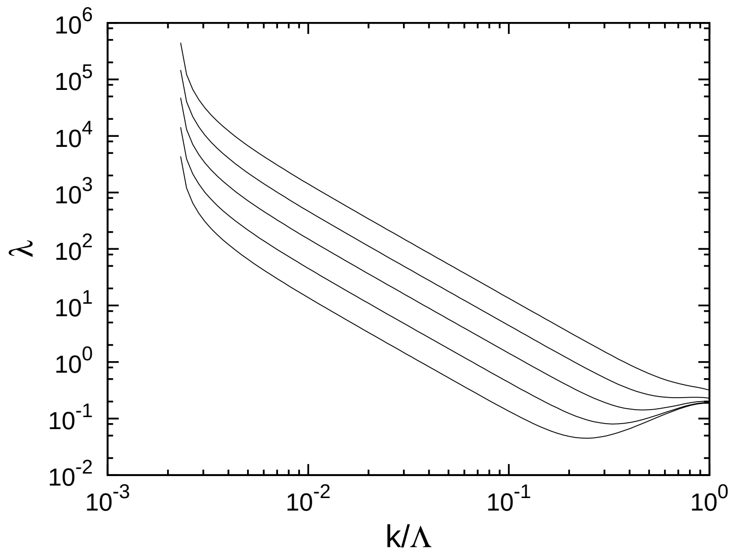
$$\dot{\lambda} = -2\lambda + 8\pi g\left[-\frac{1}{2\pi^2} + \frac{1-2\lambda}{v^2}\right],$$

$$\dot{g} = (d-2)g,$$

$$\dot{v} = \frac{8\pi g}{v}.$$

Létezik analitikus megoldás

$$\lambda = -\frac{8G^2(2k^6-3k^4k_0^2+k_0^6)+6G(k_0^4-k^4)-3\lambda v_{k_0}^2}{3(v_{k_0}^2-8\pi G(k_0^2-k^2))}.$$



- Nincs GFP
- ξ nem divergál, elsőrendű fázisátalakulás

A kozmológiai állandó problémája:

- A GFP körül Λ 120 nagyságrenddel nagyobb, mint a várt.
- Másodrendű fázisátalakuláskor $\Lambda_0 = 0$, mert ξ divergál.

Egy lehetséges megoldás: Λ_0 tetszőleges kicsiny lehet, ha elsőrendű a fázisátalakulás.