# A sine-Gordon és a Ruijsenaars-Schneider modell

Babelon Bernard (1993)
klasszikus sine-Gordon modell Poisson struktúrája $N$ szoliton altérre megszorítva $\mapsto$ Ruijsenaars-Schneider modell Poisson struktúrája

$z_\pm = x \pm t$ fénykúp koordináták $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$ alkalmas skálázás
sG egyenlet $\partial_+ \partial_- \phi = 2 \sin(2\phi)$ $\exp(-i\phi) = \frac{\tau_+}{\tau_-}$

$N$ szoliton megoldás $\mu_i$ rapiditások $a_i$ helyek $i = 1 \ldots N$
$\tau_\pm^{(N)}(z_+, z_-) = \det(1 \pm V)$ $V$ $N \times N$ matrix

$$V_{ij} = 2\frac{\sqrt{\mu_i \mu_j}}{\mu_i + \mu_j}\sqrt{X_i X_j} \qquad X_i = a_i \exp(2(\mu_i z_+ + \mu_i^{-1} z_-))$$

(a)s $\mu_j$ valós $a_j = i\epsilon e^\gamma$ $\gamma$ valós $\epsilon = 1$ ha s $\epsilon = -1$ ha as
lélegző $(\mu, \bar{\mu})$ és $(a, -\bar{a})$ konjugált párok

sine-Gordon Hamiltoni rendszer kanonikus szimplektikus forma

$$\Omega_{SG} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta\pi(x) \wedge \delta\phi(x)$$

Tétel: $N$ szoliton altér $\mu_i$ $a_i$ koordináták

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta a_i}{a_i} \wedge \frac{\delta \mu_i}{\mu_i} + \sum_{i<j} \left( \frac{4\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \right) \frac{\delta \mu_i}{\mu_i} \wedge \frac{\delta \mu_j}{\mu_j}$$

nem degenerált invertálva Poisson zárójelek

$$\{\mu_i, \mu_j\} = 0 \qquad \{a_i, \mu_j\} = a_i \mu_j \delta_{ij} \qquad \{a_i, a_j\} = -\left( \frac{4\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \right) a_i a_j$$

bizonyítás 1 és 2 s-ra expliciten $\Omega_{SG}|_{\text{megsz}} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x \left( \frac{1}{\tau_+ \tau_-} \right) \cdot \omega$

általános eset $(\mu_i, a_i)$ $t \to \pm\infty$ $(\mu_i^{\text{in}}, a_i^{\text{in}})$ és $(\mu_i^{\text{out}}, a_i^{\text{out}})$

$$\mu_i^{\text{in}} = \mu_i^{\text{out}} = \mu_i \qquad a_i^{\substack{\text{in} \\ \text{out}}} = a_i \prod_{|\mu_j| \lessgtr |\mu_i|} \left( \frac{\mu_i - \mu_j}{\mu_i + \mu_j} \right)^2$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta a_i^{\text{in}}}{a_i^{\text{in}}} \wedge \frac{\delta \mu_i}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta a_i^{\text{out}}}{a_i^{\text{out}}} \wedge \frac{\delta \mu_i}{\mu_i}$$

fontos észrevétel $E_{ij} = |i\rangle\langle j|$ bázis $V = \sum_{ij} V_{ij} E_{ij}$

$$\left\{ V_1 \overset{\otimes}{,} V_2 \right\} = \left[ d_{12}, V_1 \right] - \left[ d_{21}, V_2 \right]$$

$d_{12} = \sum_{ij;kl} d_{ij;kl} E_{ij} \otimes E_{kl}$ $d_{ij;kl} = -\frac{1}{8} \left( \frac{\mu_i + \mu_j}{\mu_i - \mu_j} \right) (V_{jk}\delta_{il} + V_{jl}\delta_{ik} + V_{ik}\delta_{jl} + V_{il}\delta_{jk})$

$V$ sajátértékei $Q_i$ Poisson kommutálnak

$e^{-i\phi} = \prod_{i=1}^{N} \left( \frac{1+Q_i}{1-Q_i} \right)$ dinamikát kifejezzük $Q_i$ -vel $\mapsto$ RS modell

$U$ diagonalizálja $V$-t $V = U^{-1} Q U$ definiáljuk $L = U \mathrm{diag}(\mu_i) U^{-1}$

'idő' $z_+$ $\dot{} = \frac{\partial}{\partial z_+}$ $\dot{L} = [M, L]$ $M = \dot{U} U^{-1}$ Lax egyenlet

$$L_{ij} = 2 \frac{\sqrt{\dot{Q}_i \dot{Q}_j}}{Q_i + Q_j}, \qquad M_{ij} = \frac{\sqrt{\dot{Q}_i \dot{Q}_j}}{Q_i - Q_j} (1 - \delta_{ij})$$

$\rho_i = \dot{Q}_i / Q_i$ $L$ ugyanolyan alakú mint $V$ ha $(\mu_i, a_i) \to (Q_i, \rho_i)$

Babelon Bernard $(\mu_i, a_i) \to (Q_i, \rho_i)$ transzformáció szimplektikus

$Q_i$ -hez konjugált $p_i$ $\rho_i = \exp(p_i) \prod_{k \neq i} \left(\frac{Q_k+Q_i}{Q_k-Q_i}\right)$

kanonikus PB $\{Q_i\,,\,Q_j\} = \{p_i\,,\,p_j\} = 0$ $\{p_i\,,\,Q_j\} = Q_j\delta_{ij}$

kommutáló megmaradók generátor függvénye $\mathcal{T}(x) = \det(1 + xL)$

$$\mathcal{T}(x) = 1 + \sum_{p=1}^{N} x^p H_p = 1 + \sum_{p=1}^{N} x^p \sum_{k_1 < \cdots < k_p} \rho_{\rho_{k_1}} \cdots \rho_{k_p} \prod_{k_i < k_j} \left(\frac{Q_{k_i} - Q_{k_j}}{Q_{k_i} + Q_{k_j}}\right)^2$$

$z_+$ fejlesztő $H_+ = \mathrm{tr}(L) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j = \sum_{j=1}^{N} \exp(p_j) \prod_{k \neq j} \left(\frac{Q_j+Q_k}{Q_j-Q_k}\right)$

$z_-$ fejlesztő $H_- = \mathrm{tr}(L^{-1}) = H_{N-1}/\det(L) = \sum_{j=1}^{N} \exp(-p_j) \prod_{k \neq j} \left(\frac{Q_j+Q_k}{Q_j-Q_k}\right)$

$Q_j = ie^{q_j}$ Im $q_s = 0$ ha $s$ szoliton Im $q_s = \pi$ ha $s$ antiszoliton

a fénykúpon fejlesztők $H_\pm = \sum_j e^{\pm p_j} \prod_{k \neq j} \coth\left(\frac{q_j - q_k}{2}\right)$ $H_+$ folyam

$$\rho_i = \dot{q}_i = e^{p_i} \prod_{k \neq i} \coth\left(\frac{q_i - q_k}{2}\right) \qquad \ddot{q}_i = \sum_{k \neq i} \frac{2\dot{q}_i \dot{q}_k}{\sinh(q_i - q_k)}$$