A sine-Gordon modell alapjai

$$\mathcal{L}_{SG}(x,t)=\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi(x,t))^2-U(\Phi) \qquad U(\Phi)=\frac{m^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\Phi)$$

$\beta^2\to 0$-ra $\quad U(\Phi)\to\frac{m^2}{2}\Phi^2-\frac{m^2\beta^2}{4}\Phi^4+\ldots$ vonzó Klein-Gordon m tömeggel

szimmetriák $\quad \Phi(x,t)\to-\Phi(x,t) \quad \Phi\to\Phi+2N\pi/\beta$

energia $\quad E[\Phi]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx(\frac{1}{2}(\frac{\partial\Phi}{\partial t})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^2+\frac{m^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\Phi))$

alapállapotok $\quad E[\Phi]=0 \quad \Phi\equiv N2\pi/\beta \qquad E<\infty$ konf. tere $\quad\infty$ sok szektor

topológiai töltés

$$Q=\frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\partial\Phi}{\partial x}=N_2-N_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx k^0 \qquad k^\mu=\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi \qquad \partial_\mu k^\mu=0$$

klasszikusan $\quad \bar{x}=mx \quad \bar{t}=mt \quad \bar{\Phi}=\Phi/\beta \quad m \quad \beta \quad$ kitranszformálható néhány egzakt megoldás $Q=\pm 1$-ben $\exists$ sztatikus (anti) szoliton

$\Phi_s(x,a^+) = \frac{4}{\beta}\,\mathrm{arctg}(e^{m(x-a^+)})$ $\Phi_{\bar{s}}(x,a^-) = \frac{2\pi}{\beta} - \Phi_s(x,a^-)$

$E_{cl}[\Phi_s] \equiv M_{cl} = \frac{8m}{\beta^2}$ $Q=0$-ban szoliton-antiszoliton

$$\Phi_{SA}(x,t) = 4\mathrm{arctg}\left(\frac{\sinh(ut/\sqrt{1-u^2})}{u\cosh(x/\sqrt{1-u^2})}\right) \quad 0<u<1 \quad \Delta = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\log u$$

$$\Phi_{SA}(x,t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \Phi_s\left(\frac{x+u(t\pm\Delta/2)}{\sqrt{1-u^2}}\right) + \Phi_{\bar{s}}\left(\frac{x-u(t\mp\Delta/2)}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$Q=2$-ben szoliton-szoliton $\Phi_{SS}(x,t) = 4\mathrm{arctg}\left(\frac{u\sinh(x/\sqrt{1-u^2})}{\cosh(ut/\sqrt{1-u^2})}\right)$

$Q=0$-ban “lélegző” (‘breather’) Φ_{SA}-ból $u\to iv$ -vel $v\in$ R

$\Phi_v(x,t) = 4\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(vt/\sqrt{1+v^2})}{v\cosh(x/\sqrt{1+v^2})}\right)$ periódikus $\tau = \frac{2\pi\sqrt{1+v^2}}{v}$

klasszikus s $\bar{s}$ kötött állapot s $\bar{s}$ nem tud ∞-be távolodni tetszőleges számú $s\ \bar{s}$ lélegző megoldás $\exists$ sine-Gordon integrálható

mozgás egyenlet $\longrightarrow$ 0 görbületű feltétel ($\exists$ Lax pár)

$\psi = \psi(x,t,\lambda)$ n komponensű λ komplex (spektrál paraméter)

$U(x,t,\lambda)$ $V(x,t,\lambda)$ $n \times n$ mátrix

$$\partial_x \psi = U\psi \qquad \partial_t \psi = V\psi \qquad \partial_t U(\lambda) - \partial_x V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0$$

$U\ V \quad \to \quad A_x\ A_t$ nem Abeli mérték mező $F_{tx}(A_x, A_t) = 0$

nem Abeli Stokes tétel $\to \infty$ sok megmaradó mennyiség $\to$ integrálhatóság

sine-Gordon mozgás egyenlet $\partial_+ \partial_- \Phi = \sin \Phi$ $x^{\pm}$ fénykúp koordináta

$$U = \begin{pmatrix} i\lambda & i\frac{\Phi_+}{2} \\ -i\frac{\Phi_+}{2} & -i\lambda \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{4i\lambda}\begin{pmatrix} \cos\Phi & -i\sin\Phi \\ i\sin\Phi & -\cos\Phi \end{pmatrix}$$

inverz szórás N részecske megoldás $\tilde{V}$ $N \times N$ mátrix

$\Lambda_n = i\lambda_n$ $\lambda_n > 0$ c_n $n = 1 \ldots N$ paraméterek

$$\Phi = 2i \log \frac{\det(1+\tilde{V})}{\det(1-\tilde{V})} \qquad \tilde{V}_{mn} = \frac{c_m}{\Lambda_m + \Lambda_n} \exp(2i\Lambda_m x^+ - ix^-/(2\Lambda_n))$$