Globális szimmetriák ⇔ Yang Baxter egyenlet "nem-triviális" megoldásai (30)

S.o.a. teljesülés

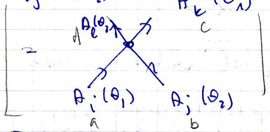
Globális szimmetria: a) ∃ nem degenerált részecskék (u.a. a tömeg)

b) ∃ 0 spinű megmaradó töltés(ek) ~~[illegible]~~ csak ezek különbséget részecskék között (top. töltés sine-Gordon-ban szoliton – antiszoliton ~~[illegible]~~ u. olyan tömegű)

bonyolultság: visszaszórás és "átmenés" is lehet

(Megj. 0 spinű töltések a glob. szimmetriát generáló Noether áramok töltései)

$S_{ij}^{kl}(\underbrace{\theta_1-\theta_2}_{\theta})$



$\Lambda_*(g)$ ~~[illegible]~~ G ábrázolásai

"G invariáns" megoldás (szimbolikusan)

$$\boxed{S = \Lambda_1(g^{-1})\otimes\Lambda_2(g^{-1})\, S\, \Lambda_1(g)\otimes\Lambda_2(g)}$$

(szimmetriák sorrendje nem számít)

$\Lambda_i(g) = \exp(T_a^i\,\varepsilon^a) \approx 1 + (T_a^i)\,\varepsilon^a$ $\quad T_a$ generátor az ábr.-ban

$$S^{kl}_{i\alpha}(T^a)^\alpha_j + S^{kl}_{\alpha j}(T^a)^\alpha_i - (T^a)^k_\gamma S^{\gamma l}_{ij} - (T^a)^l_\delta S^{k\delta}_{ij} = 0$$

YB-ben először olyan ansatz $S^{kl}_{ij}(\theta)$-ra, amely ezt a szim. feltételt tudja (tetsz. függvényekkel) YB + unit + X-és nem lin. egyenlet(ek) → meghatározódnak

Példa: keressünk $O(N)$ szimmetrikus megoldást $N \geq 3$

részecskék az $O(N)$ "vektor" (definiáló, fundamentális) N dim ábrázolásban

A_a $\quad a = 1 \dots N$ $\quad M$ tömeggel önkonjugáltak

($O(N)$ vektor ábr. "valós")

$\square\otimes\square = 1 \oplus \boxminus \oplus \square\square$ $\quad N \geq 3$ ennek megfelelően 3 inv. függvény

egység, antiszim., szim. spúrtalan

szim. spúr

nem ennek megfelelő, hanem fizikailag értelmes

$$\boxed{S_{ab}^{cd}(\theta) = \delta^{cd}\delta_{ab}S_1(\theta) + \delta_a^c\delta_b^d S_2(\theta) + \delta_a^d\delta_b^c S_3(\theta)}$$

$\theta = \theta_1 - \theta_2$

$\theta_1 > \theta_2$

"annihilációs"

$$A_a(\theta_1)A_b(\theta_2) = \delta_{ab}A_c(\theta_2)A_c(\theta_1)S_1(\theta) + S_2(\theta)A_b(\theta_2)A_a(\theta_1) + S_3(\theta)A_a(\theta_2)A_b(\theta_1)$$

"átmenő")

$S_3(\theta)$: "reflektáló"

nem triv YB: $O(N)$ σ model

felt: $\exists$ vektor multiplet A_a $a=1\dots N$ M tömeggel önkonjugáltak

2 részecske szórás $O(N)$ inv

$$\boxed{S_{ab}^{cd}(\theta) = \delta^{cd}\delta_{ab}S_1(\theta) + \delta_a^c\delta_b^d S_2(\theta) + \delta_a^d\delta_b^c S_3(\theta)} \quad (*)$$

$A_a + A_a \to A_c + A_c$ $(a \neq c)$ "annihilációs" "áthenő" "reflexiós"

keresztezési $\boxed{S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta) \qquad S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta)}$

unitaritás: $S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1 \qquad S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0$

(10) $N S_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_2(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_1(-\theta) = 0$

Y.B. különböző $N \geq 3$ és $N = 2$

$\theta - \theta' = \theta$ $\quad \theta + \theta'$ $\quad \to \theta' = \theta_2 - \theta_3$

$$S_3 S_2 S_3 = S_2 S_3 S_3 + S_3 S_3 S_2 \longrightarrow \frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)} = \alpha\theta \longrightarrow \text{valós anal } \alpha^* = -\alpha = -i\lambda$$

$$S_3 S_1 S_2 = S_2 S_1 S_1 + S_3 S_2 S_1 \longrightarrow S_2(\theta) = -(\alpha\theta + \beta) S_1(\theta)$$

$$S_3 S_1 S_3 = N S_1 S_3 S_1 + S_1 S_3 S_2 + S_1 S_3 S_3 + S_1 S_2 S_1 + S_2 S_3 S_1 + S_1 S_1 S_1 + S_3 S_3 S_1 \to \beta = \frac{N-2}{2}$$

keresztezés: $\lambda = \frac{\beta}{\pi} = \frac{N-2}{2\pi}$

$$\boxed{S_3(\theta) = \frac{-2\pi i}{(N-2)\theta} S_2(\theta)} \qquad \boxed{S_1(\theta) = \frac{-2\pi i}{(N-2)(i\pi - \theta)} S_2(\theta)}$$

unitaritás: $\boxed{S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \Delta^2}}$ $\qquad \Delta = \frac{2\pi}{N-2} = \frac{1}{\lambda}$ $\quad (**)$

$$\boxed{S_2(\theta) = R(\theta)R(i\pi - \theta)} \qquad R(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\Delta - i\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(-i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\pi + \Delta - i\theta}{2\pi}\right)}$$

$S_2'(\theta) = \frac{\theta}{\theta + i\Delta}$ $\quad$ X ↓ $\quad$ $S_2''(\theta) = S_2'(\theta)S_2'(i\pi - \theta) = \frac{\theta}{\theta + i\Delta}\,\frac{i\pi - \theta}{i\pi - \theta + i\Delta}$ $\quad$ unit ↓ X. OK.

$S_2'''(\theta) = S_2''(\theta)\,\frac{i\pi + \theta + i\Delta}{i\pi + \theta}$ $\quad$ unit OK X ↓

$\boxed{\Delta \to -\Delta \text{ szintén jó!}}$ fontos

$N > 3$

$$S_2(\theta) = \frac{\theta(i\pi - \theta)}{(2\pi i - \theta)(i\pi + \theta)}$$

$N > 3$

$N=2$ S mátrix szerkezete + {keresztezési egyenletek maradnak, unitaritási}

Yang-Baxter

$$\boxed{\begin{aligned}&S_3 S_2 S_3 + S_1 S_2 S_3 + S_1 S_1 S_2 = S_2 S_1 S_3 + S_2 S_3 S_3 + S_3 S_3 S_2\\ &S_3 S_1 S_3 + S_3 S_2 S_3 = S_3 S_3 (S_1 + S_2) + S_2 S_3 (S_1 + S_3) + S_1 S_1 S_1 +\\ &\quad + 2 S_1 S_3 S_1 + S_1 S_3 S_2 + S_1 S_3 S_3 + S_1 S_2 S_1\end{aligned}}$$

$$h(\theta) = \frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)} \qquad g(\theta) = \frac{S_1(\theta)}{S_3(\theta)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&h(\theta) + h(\theta') - h(\theta+\theta') = g(\theta') h(\theta+\theta') - h(\theta') g(\theta+\theta') + g(\theta) g(\theta+\theta') h(\theta)\\ &[1 + h(\theta+\theta') + g(\theta+\theta')][1 - g(\theta) g(\theta')] + h(\theta) h(\theta') =\\ &\quad = [1 + g(\theta) + h(\theta)][1 + g(\theta') + h(\theta')]\end{aligned}}$$

$\theta = 0$ és $\theta' \to \theta$

$\theta = 0$ ill. $\theta' = 0$

$$[1 - g^2(\theta)] h(0) = 0$$

$$[1 + g(\theta)][(1 + g(\theta) + h(\theta)) g(0) + h(0)] = 0$$

$$[1 + g(\theta)][h(0) - g(0) h(\theta)] = 0$$

megoldások

ⓐ $g(\theta) = 1 \quad h(\theta) = -1$

ⓑ $g(\theta) = -1 \quad h(\theta)$ tetsz.

ⓒ $g(0) = h(0) = 0$

unitaritás + X csak ⓒ-vel $\quad \alpha = h'(0) \quad \beta = g'(0) \quad \theta'$ szerint diff.-va $\theta' = 0$-ban

$$\boxed{\begin{aligned}&h'(\theta) = (1 + g(\theta))(\alpha - \beta h(\theta))\\ &h'(\theta) + g'(\theta) = (1 + g(\theta))[\alpha + \beta h(\theta) + \beta(1 + g(\theta))]\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&h(\theta) = -i \,\mathrm{tg}\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \mathrm{th}\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)\\ &g(\theta) = \mathrm{th}\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) \mathrm{cth}\left(\frac{4\pi}{\gamma}(i\delta - \theta)\right)\end{aligned}}$$

δ γ konstans (α, β-ból)

keresztezési egyenletek

$\boxed{\delta = \pi}$ $\quad \gamma$ szabad marad!

$$\boxed{S_3(\theta)=i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{4\pi^2}{\gamma}\right)\mathrm{cth}\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)S_2(\theta)}$$

$$\boxed{S_1(\theta)=S_3(i\pi-\theta)}$$

egyetlen unitaritási gyenlet

$$S_2(\theta)S_2(-\theta)+S_3(\theta)S_3(-\theta)=1$$

minimális megoldás

$$\boxed{S_2(\theta)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{4\pi^2}{\gamma}\,\mathrm{sh}\frac{4\pi\theta}{\gamma}\,\mathrm{sh}\left(\frac{4\pi(i\pi-\theta)}{\gamma}\right)U(\theta)}$$

$$U(\theta)=\Gamma\left(\frac{8\pi}{\gamma}\right)\Gamma\left(1+\frac{8i\theta}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\frac{8\pi}{\gamma}-\frac{8i\theta}{\gamma}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(\theta)R_n(i\pi-\theta)}{R_n(0)R_n(i\pi)}$$

$$R_n(\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{16\pi n}{\gamma}+\frac{8i\theta}{\gamma}\right)\Gamma\left(1+\frac{16\pi n}{\gamma}+\frac{8i\theta}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{(2n+1)8\pi}{\gamma}+\frac{8i\theta}{\gamma}\right)\Gamma\left(1+\frac{(2n-1)8\pi}{\gamma}+\frac{8i\theta}{\gamma}\right)}$$

γ szabad paraméter $\leftrightarrow$ csatolási állandó

O(2) S mátrix $\leftrightarrow$ sine Gordon S mátrix   O(2) szimmetria?

$A(\theta)=A_1(\theta)+iA_2(\theta)$ $\bar{A}(\theta)=A_1(\theta)-iA_2(\theta)$ $A_i(\theta)$

korábbi $S(\theta)$, $S_T(\theta)$, $S_R(\theta)$

$$\boxed{S(\theta)=S_3(\theta)+S_2(\theta)}\quad \boxed{S_T(\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)}\quad \boxed{S_R(\theta)=S_1(\theta)+S_3(\theta)}$$

$$S_R(\theta)=\frac{1}{\pi}\sin\frac{8\pi^2}{\gamma}\,U(\theta)\qquad S_T=-i\,\frac{\mathrm{sh}\frac{8\pi}{\gamma}\theta}{\sin\frac{8\pi^2}{\gamma}}\,S_R(\theta)$$

$$S(\theta)=-i\,\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{8\pi}{\gamma}(i\pi-\theta)\right]}{\sin\frac{8\pi^2}{\gamma}}\,S_R(\theta)$$

minimális megoldásra új CDD faktor választás ∀ + szeparábilis

ZJ3 Ann. Phys. 120 (79)

fizikai pólusok $\quad 0 \leq \mathrm{Im}\theta \leq \pi \quad \Gamma(1+\frac{8i\theta}{\gamma}) \quad \theta_n = i\frac{n\gamma}{8} \quad s$ csatorna

$\Gamma(1-\frac{8\pi}{\gamma}(1+i\frac{\theta}{\pi})) \quad \theta_n = i(\pi - \frac{n\gamma}{8}) \quad n = 1, 2, \cdots < \frac{8\pi}{\gamma} \quad t$ csatorna

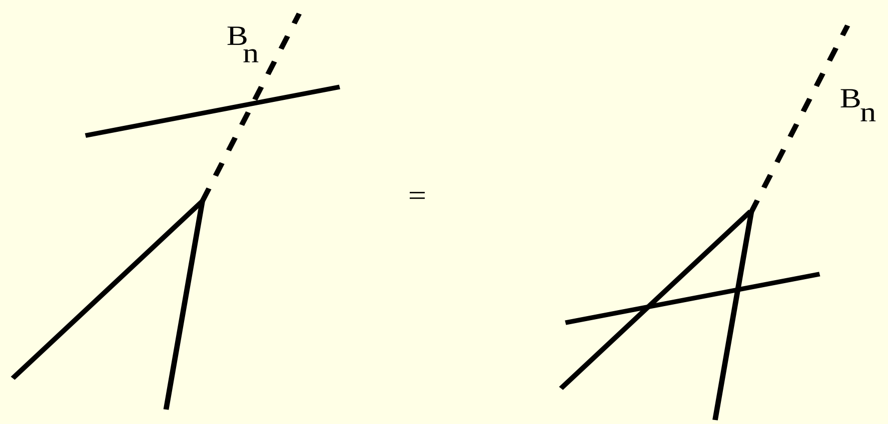
kötött állapotok tömeg

$$s^2 = 2M^2 + 2M^2\cos(\frac{n\gamma}{8}) = 2M^2 \cdot 2\sin^2(\frac{n\gamma}{16}) = m_n^2$$

$$m_n = 2M\sin(\frac{n\gamma}{16}) \quad \mapsto \quad 2M\sin(\frac{n\pi p}{2}) \qquad \gamma = 8\pi p = \frac{\beta^2}{1-\beta^2/(8\pi)}$$

pólusok $\quad \leftrightarrow \quad$ szemiklasszikus lélegzők $\quad B_n$

teljes sine-Gordon S mátrix $\quad s \quad \bar{s} \quad B_n \quad$ ‘bootstrap filozófia’



$$A(\theta_1)B_n(\theta_2) = S^{(n)}(\theta_{12})B_n(\theta_2)A(\theta_1)$$
$$B_m(\theta_1)B_n(\theta_2) = S^{(m,n)}(\theta_{12})B_n(\theta_2)B_m(\theta_1)$$

$S^{(n)}(\theta)$ $S^{(m,n)}(\theta)$ $2\pi i$ periódikus

pólus szerkezet

$S^{(n)}$ egyszerű pólus $\theta = i(\frac{\pi}{2} \pm \frac{n\gamma}{16})$ szoliton s, t csatorna

dupla pólus $\theta_l = i(\frac{\pi}{2} + \frac{(2l-n)\gamma}{16})$ anomális küszöb NEM részecske

$S^{(m,n)}$ CSAK $\theta = i\frac{n+m}{16}\gamma$ $\theta = i(\pi - \frac{n+m}{16}\gamma)$ részecske B_{m+n}

többi anomális küszöb

$\forall\ B_l$ $l \geq 2$ B_1 kötött állapot B_1 ‘elemi’ $\equiv$ elemi sG skalár mező

$$m_1 = 2M\sin(\frac{\gamma}{16}) \longrightarrow 2(\frac{8m}{\beta^2} - \frac{m}{\pi} + \dots)\left(\frac{\beta^2}{16}\left[1 + \frac{\beta^2}{8\pi} + \dots\right]\right) = m + o(\beta^4)$$

$S^{(1,1)}(\theta) = \frac{\sinh\theta + i\sin(\frac{\gamma}{8})}{\sinh\theta - i\sin(\frac{\gamma}{8})}$ $\longrightarrow$ $\mathcal{L}_{sG}$ szórás amplitúdó β^2-ben