Sine–Gordon Modell
100 Csatolt Ingával

(A modell építésében részt vett: Bajnok Zoltán, Hopp Sándor, Meszéna Balázs)

A rendszer paraméterei:

- θ:egy inga tehetetlenségi nyomatéka
- m: egy inga tömege
- s: inga súlypontjának távolsága a tengely-től
- K :torziós rugó ereje
- a: két szomszédos inga távolsága

A diszkrét, végtelen hosszú rendszer Langrange-függvénye:

$$L = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\theta(\partial_t \phi)^2 + mgs\cos\phi_i - \frac{1}{2}\frac{K}{a}(\phi_i - \phi_{i-1})^2 \right)$$

Innen a diszkrét mozgásegyenlet:

$$\theta\ddot{\phi}_i = -mgs\sin\phi_i - \frac{K}{a}(2\phi_i - \phi_{i-1} - \phi_{i+1})$$

$\Downarrow$

$$\theta\ddot{\phi}_i = -mgs\sin\phi_i + Ka\frac{\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{a}}{a}$$

$\Downarrow a \to 0$

$$A \cdot \partial_x^2 \phi - \partial_t^2 \phi - B \cdot \sin\phi = 0,$$

$$A = \frac{Ka}{\theta}, \; B = \frac{mgs}{\theta}$$

Folytonos limeszként sine-Gordon egyenlet két paraméterrel.

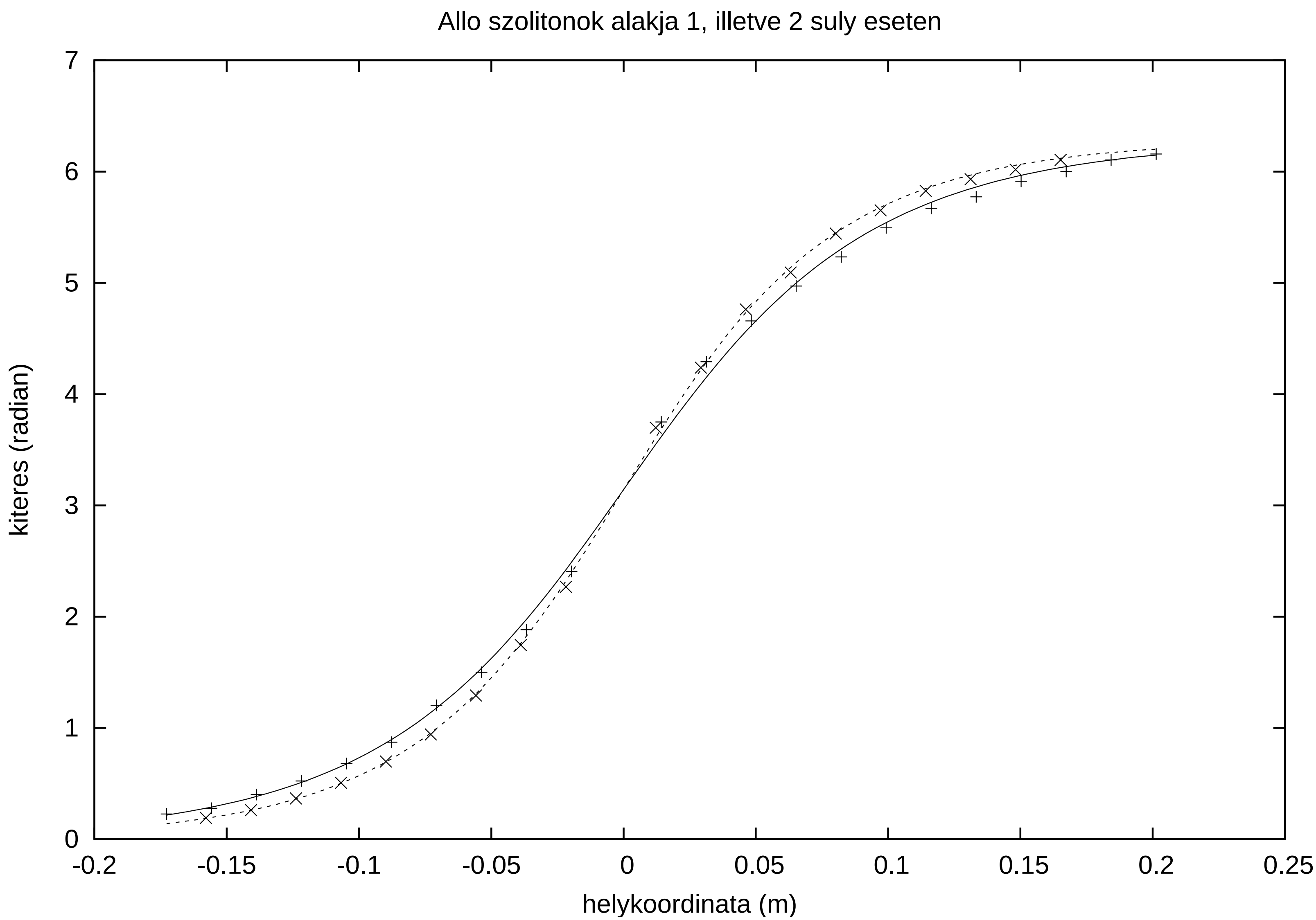
A statikus szoliton:

$$\phi_\pm = 4\,\text{arctan}\, e^{\pm\sqrt{\frac{B}{A}}(x-x_0)} = 4\,\text{arctan}\, e^{\pm\lambda_s(x-x_0)}$$

Az elméletből $\lambda_e = \sqrt{\frac{mgs}{Ka}}$.

Kísérleti adatokból fitteléssel $\lambda_s$meghatározható.

Mérés vs. elmélet ~ *1%-on belül*


Allo szolitonok alakja 1, illetve 2 suly eseten
kiteres (radian)
helykoordinata (m)
0
1
2
3
4
5
6
7
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25

Mozgó szoliton:

$$\phi_{s,as} = 4\arctan e^{\pm\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{x+vt-x_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{A}}}}$$

Határsebesség: $v_{max} = \sqrt{A}$

- $t = 0$ időpillanatban az alak:

$$4\arctan e^{\pm\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{x-x_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{A}}}} = 4\arctan e^{\pm\lambda_m(x-x_0)}$$

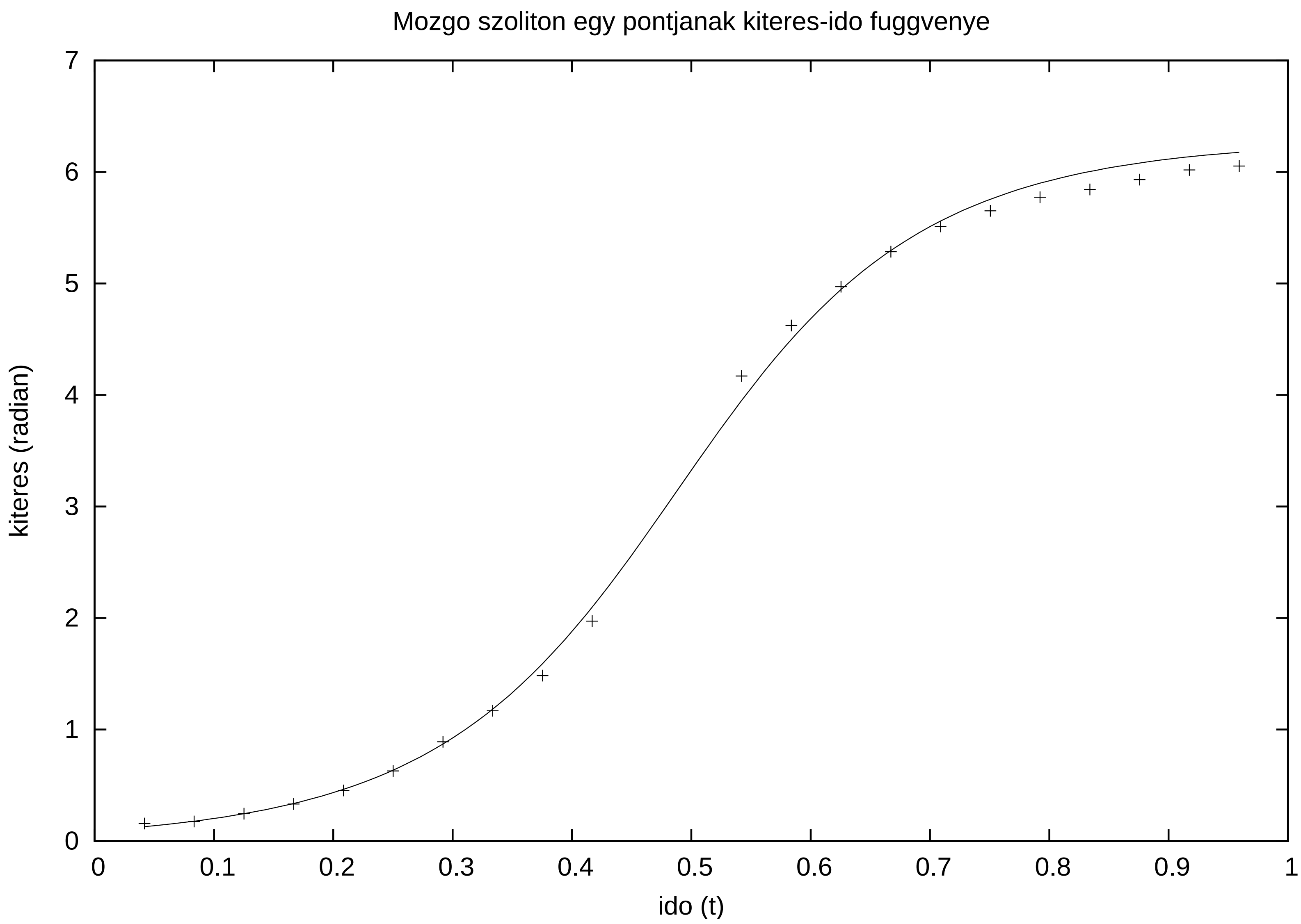
- Egy inga kitérés-idő függvénye

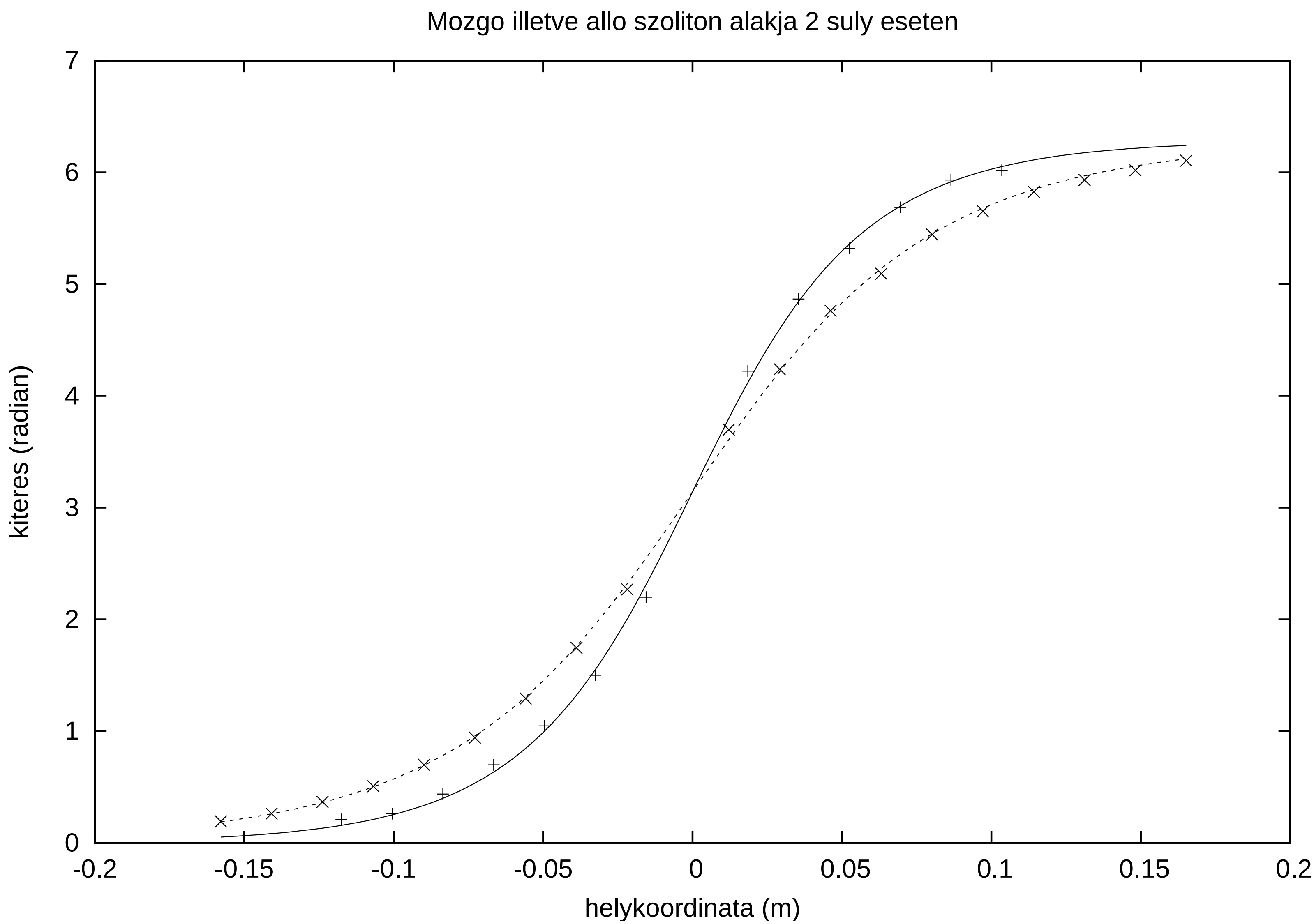
$$4\,\mathrm{arctan}\, e^{\pm\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{v(t-t_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{A}}}} = 4\,\mathrm{arctan}\, e^{\pm\alpha(t-t_0)}$$

  Elméleti összefüggések a fittelt λ_m, λ_s, α értékek között:

- $\frac{\alpha}{\lambda_m} = v$ ~ *1%-on belül*

- $\frac{\lambda_s}{\lambda_m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{A}}$ ~ *10%*


Mozgo szoliton egy pontjanak kiteres-ido fuggvenye
kiteres (radian)
ido (t)
0
1
2
3
4
5
6
7
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



Mozgo illetve allo szoliton alakja 2 suly eseten
kiteres (radian)
helykoordinata (m)
0
1
2
3
4
5
6
7
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2

Szuszogó:

$\phi = 4\arctan \frac{\sqrt{A}}{v} \frac{\sin \lambda_t \cdot t}{\cosh \lambda_x \cdot x}$, ahol

- $\lambda_t = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{A}}}$

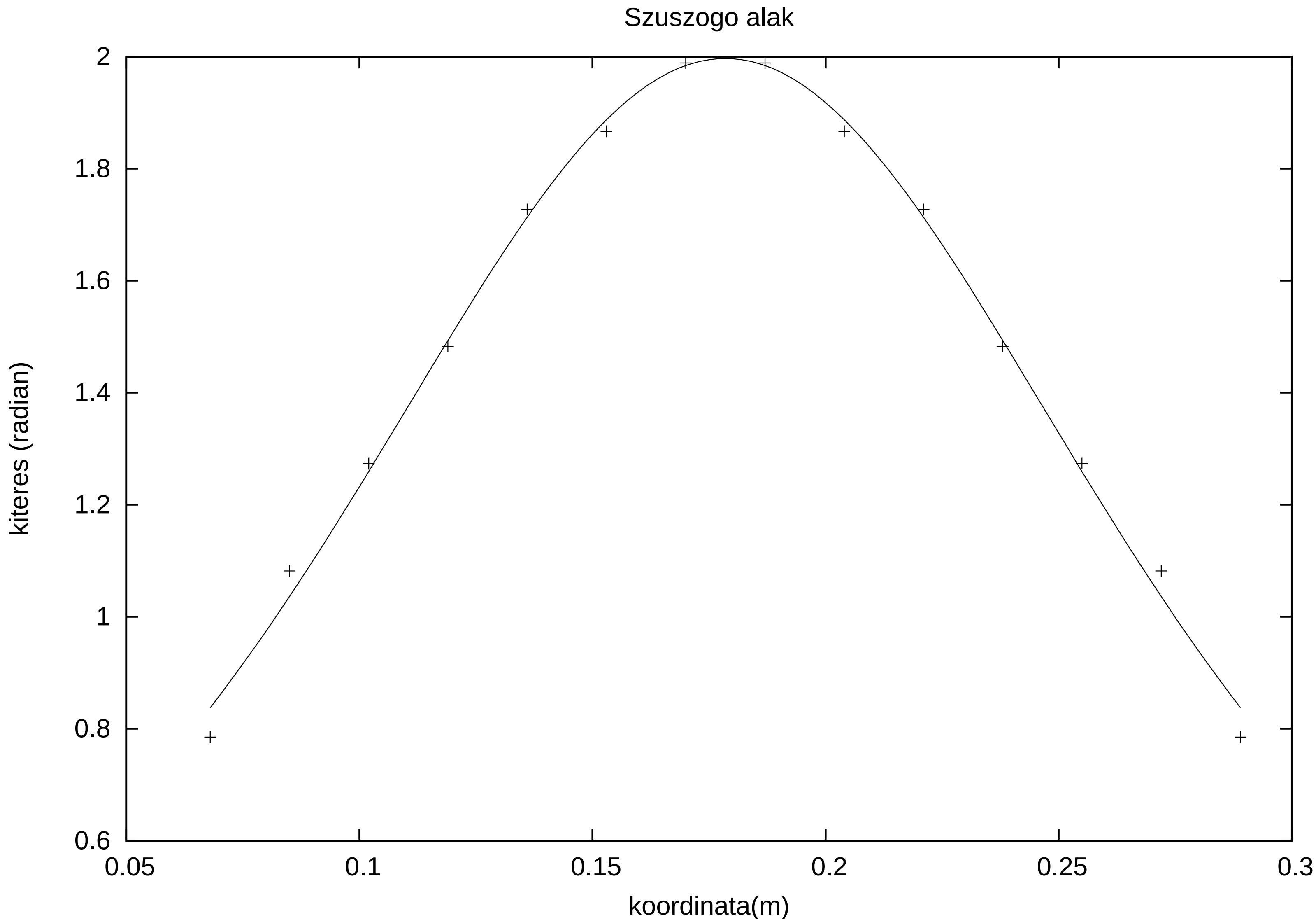
- $\lambda_x = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{A}}}$

Alak, illetve kitérés mérés esetén:

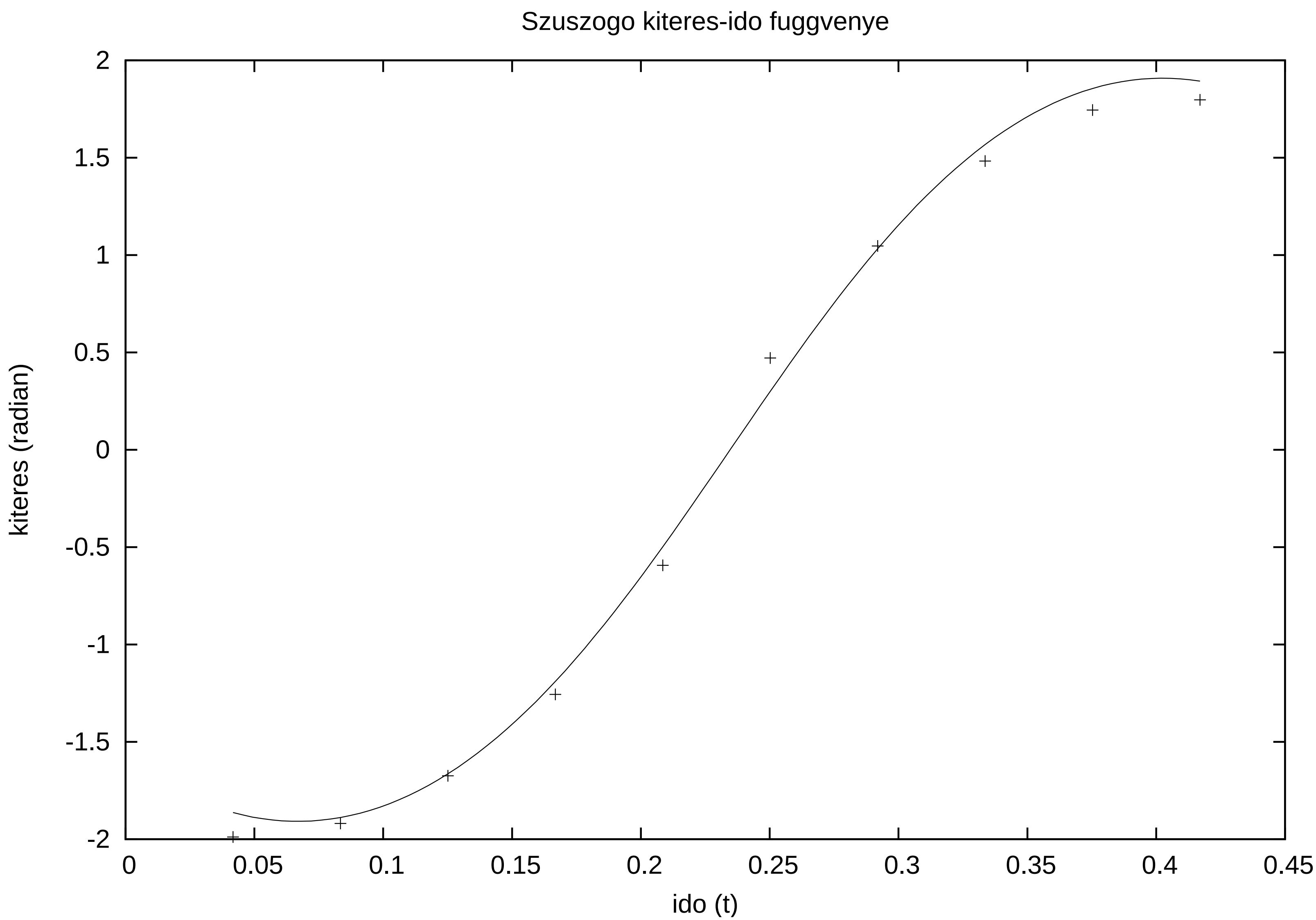
- $\phi = 4 \arctan \frac{\sqrt{A}}{v} \frac{1}{\cosh \lambda_x \cdot x}$

- $\phi = 4 \arctan \frac{\sqrt{A}}{v} \sin \lambda_t \cdot t$

Jellemző eltérések $\sim$ 5%, 25%, 25%



Szuszogo alak
kiteres (radian)
koordinata(m)
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3


Szuszogo kiteres-ido fuggvenye
kiteres (radian)
ido (t)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45

Szoliton-szoliton ütközés:

Két v sebességgel mozgó szoliton ütközése:

$$\phi = 4\,\mathrm{arctan}\,\frac{v}{\sqrt{A}}\frac{\sinh \lambda_m x}{\cosh \lambda_m v t}$$

Kitranszformálva egy olyan rendszerbe ahol az egyik szoliton áll:

$$\phi = 4\,\mathrm{arctan}\,\frac{v}{\sqrt{A}}\frac{\sinh \frac{\lambda_m^2}{\lambda_s}(x+vt)}{\cosh \frac{\lambda_m^2}{\lambda_s}v(\frac{v}{A}x+t)}$$

t időpillanatban egy inga kitérése $-\pi$, egy másiké π. Legyen e két inga koordinátái x_1, x_2.

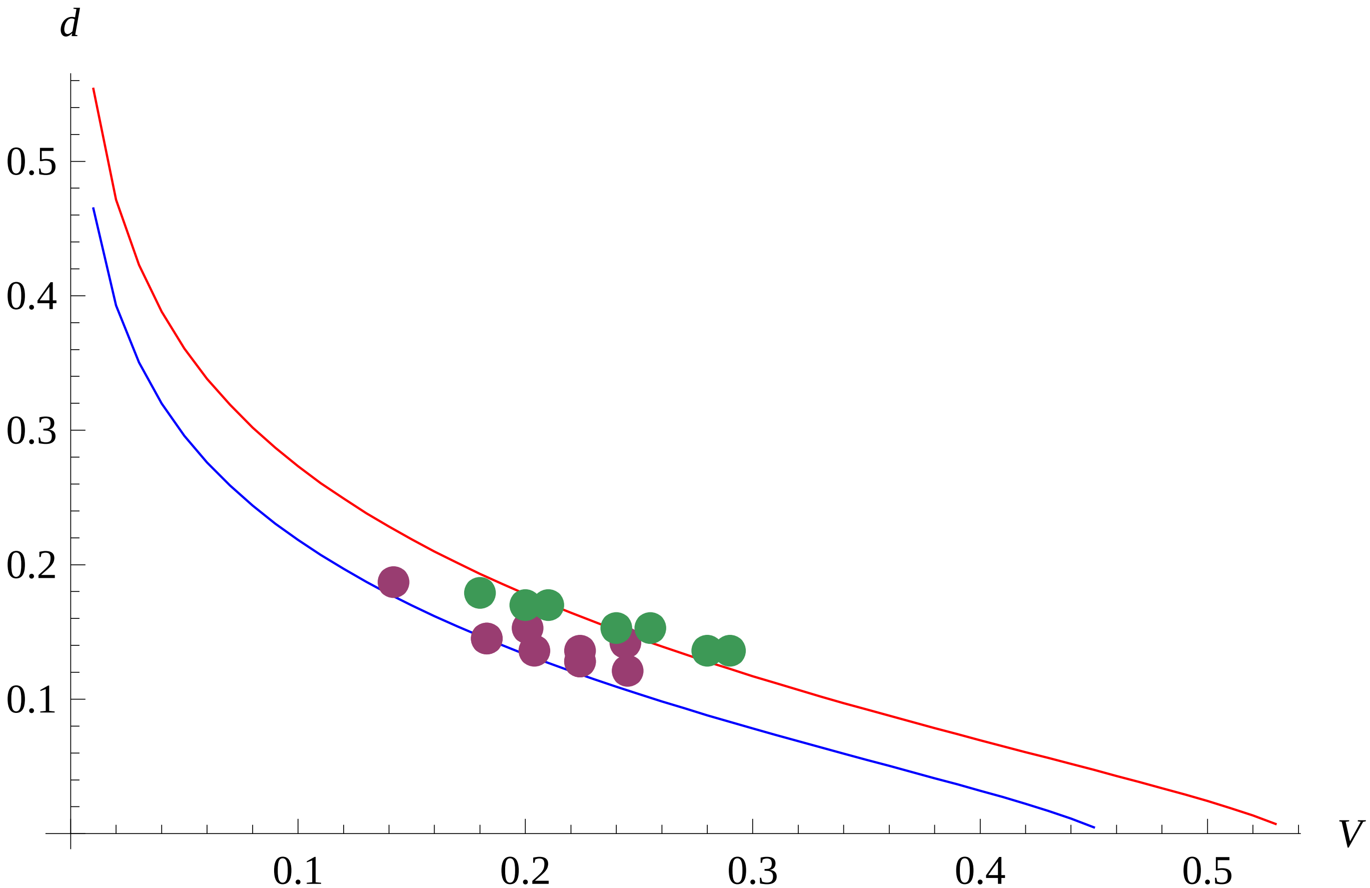
- Két szoliton távolsága: $d = |x_1 - x_2|$

- d az idő páros függvénye$\Rightarrow t = 0$ időpillanatban minimális

Egyenlet d_m-re:

$$1 = \frac{v}{\sqrt{A}} \frac{\sinh \frac{\lambda_m^2}{\lambda_s} \frac{d}{2}}{\cosh \frac{\lambda_m^2}{\lambda_s} \frac{v^2}{A} \frac{d}{2}} \Longrightarrow \text{numerikus elméleti jóslat}$$

~ átlagban 10%-20% eltérés


d
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
V

Zárt perem:

Falnak ütköző szoliton: szoliton-szoliton szóráshoz hasonló vizsgálat. $\sim 10\%$