# A Hitchin-féle rendszer és tükörszimmetria

Szabó Szilárd

Budapesti Műszaki Egyetem
és
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Integrálhatóság Nyári Iskola
Budapest, 2008. augusztus 30.

# Jelölések

- $X$: kompakt Riemann-felület, $g \geq 2$: $X$ neme, $\mathrm{Jac}(X) = \mathrm{Pic}^0(X) \cong \mathbf{C}^{2g}/\Lambda$: $X$ Jacobi-sokasága ($\Lambda \subset \mathbf{C}^{2g}$: a periódus-rács)
- $G$: összefüggő reduktív algebrai csoport $\mathbf{C}$ felett (néha $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$), $Z(G)$: $G$ centruma, $\mathfrak{g}$: $G$ Lie-algebrája
- $K$: egy maximális kompakt részcsoport $G$-ben, $\mathfrak{k}$: $K$ Lie-algebrája
- $\mathcal{O}_X, \Omega^k_X, \mathbf{\Omega}^1_X$: a holomorf függvények, a sima $k$-formák és a holomorf 1-formák kévéje $X$ felett
- $H^j(X, \mathcal{S})$: az $\mathcal{S}$ kéve $X$ feletti $j$-edik kohomológia-csoportja

# Konnexiók $G$-nyalábokon

Legyen

$$p : E \rightarrow X$$

egy principális $G$-nyaláb $X$-en, jobb oldali hatással

$$R_g : E \rightarrow E.$$

Jelöljük $V$-vel $TE$ "függőleges" disztribúcióját:

$$V_{(x,e)} = T(p^{-1}x).$$

# Konnexiók $G$-nyalábokon

Legyen

$$p : E \to X$$

egy principális $G$-nyaláb $X$-en, jobb oldali hatással

$$R_g : E \to E.$$

Jelöljük $V$-vel $TE$ "függőleges" disztribúcióját:

$$V_{(x,e)} = T(p^{-1}x).$$

Egy konnexió $E$-n az érintő-nyaláb egy

$$TE = V \oplus H$$

hasítása $V$ és egy "vízszintes" $H$ disztribúció összegébe, amely $G$-ekvivariáns: bármely $e \in E$-re és $g \in G$-re

$$H_{eg} = d(R_g)_e H_e.$$

# Integrálhatóság

Egy $D$ konnexió $E$-n integrálható ha a $H$ disztribúció integrálható (azaz létezik egy fóliázás amelynek érintője minden $e$-ben $H_e$). Az $(E, D)$ párost ekkor lapos principális $G$-nyalábnak nevezzük.

# Integrálhatóság

Egy $D$ konnexió $E$-n integrálható ha a $H$ disztribúció integrálható (azaz létezik egy fóliázás amelynek érintője minden $e$-ben $H_e$). Az $(E, D)$ párost ekkor lapos principális $G$-nyalábnak nevezzük. Tetszőleges trivializációban $D$ előáll

$$D = d + a$$

alakban, ahol $a \in \Omega^1_X(U, \mathrm{ad}(E))$. Ismert, hogy $D$ akkor és csak akkor integrálható ha

$$da + a \wedge a = 0.$$

Itt a bal oldalon álló mennyiség független a trivializációtól, és $D$ görbületének nevezzük, továbbá $F_D$-vel jelöljük.

# Konnexiók felbontása

Legyen $z$ egy lokális holomorf koordináta $X$-en. Ekkor az $X$ feletti sima 1-formákat lokálisan generálja $dz$ és $d\bar{z}$. Ez indukálja az 1-formák kévéjének Hodge-felbontását:

$$\Omega^1_X = \Omega^{1,0}_X \oplus \Omega^{0,1}_X,$$

ahol $\Omega^{1,0}_X$-et $dz$ míg $\Omega^{0,1}_X$-et $d\bar{z}$ generálja lokálisan.

# Konnexiók felbontása

Legyen $z$ egy lokális holomorf koordináta $X$-en. Ekkor az $X$ feletti sima 1-formákat lokálisan generálja $dz$ és $d\bar{z}$. Ez indukálja az 1-formák kévéjének Hodge-felbontását:

$$\Omega^1_X = \Omega^{1,0}_X \oplus \Omega^{0,1}_X,$$

ahol $\Omega^{1,0}_X$-et $dz$ míg $\Omega^{0,1}_X$-et $d\bar{z}$ generálja lokálisan.
Ekkor az $a$ formát felbonthatjuk egyértelműen $a = a^{1,0}dz + a^{0,1}d\bar{z}$ alakban. Ez indukálja $D$ felbontását:

$$D = \bar{\partial}^E + \nabla,$$

ahol

$$\bar{\partial}^E = d^{0,1} + a^{0,1}d\bar{z}$$

és

$$\nabla = d^{1,0} + a^{1,0}dz.$$

# Holomorf konnexiók

Ekkor $\bar{\partial}^E$ meghatároz egy holomorf struktúrát $E$-n, és

$$[\bar{\partial}^E, \nabla] = 0.$$

Azaz

$$\nabla : \mathcal{O}_X(E) \to \mathbf{\Omega}^1_X(E),$$

és $\nabla$ teljesíti a Leibniz-formulát:

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + d^{1,0}(f)\sigma$$

minden $f$ lokális holomorf függvényre és $\sigma$ lokális holomorf szelésre.

# Holomorf konnexiók

Ekkor $\bar{\partial}^E$ meghatároz egy holomorf struktúrát $E$-n, és

$$[\bar{\partial}^E, \nabla] = 0.$$

Azaz

$$\nabla : \mathcal{O}_X(E) \to \mathbf{\Omega}^1_X(E),$$

és $\nabla$ teljesíti a Leibniz-formulát:

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + d^{1,0}(f)\sigma$$

minden $f$ lokális holomorf függvényre és $\sigma$ lokális holomorf szelésre. Azt mondjuk, hogy $\nabla$ egy holomorf konnexió a $\bar{\partial}^E$ holomorf struktúrára nézve.

# Irreducibilitás vektor-nyalábokra

Legyen $E$ egy holomorf $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-nyaláb $X$ felett és $\nabla$ egy holomorf konnexió $E$-n. Azt mondjuk, hogy $\nabla$ irreducibilis, ha $E$-nek nem létezik $\nabla$-invariáns valódi holomorf résznyalábja.

# Irreducibilitás vektor-nyalábokra

Legyen $E$ egy holomorf $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-nyaláb $X$ felett és $\nabla$ egy holomorf konnexió $E$-n. Azt mondjuk, hogy $\nabla$ irreducibilis, ha $E$-nek nem létezik $\nabla$-invariáns valódi holomorf résznyalábja.
Továbbá, $\nabla$ félig-egyszerű, ha előáll irreducibilis konnexiók direkt összegeként.

# A de Rham-modulustér

Legyen $E$ egy holomorf $G$-nyaláb $X$ felett, $g \in H^0(X, \mathrm{Ad}(E))$ tetszőleges globális holomorf szelése $E$ endomorfizmus-nyalábjának és $\nabla$ tetszőleges holomorf konnexió $E$-n. Ekkor $g$ visszahúzással indukál egy $g \cdot \nabla$ konnexiót $E$-n. Azt mondjuk, hogy $g \cdot \nabla$ a $\nabla$ konnexió $g$-vel vett mérce-transzformáltja.

# A de Rham-modulustér

Legyen $E$ egy holomorf $G$-nyaláb $X$ felett, $g \in H^0(X, \mathrm{Ad}(E))$ tetszőleges globális holomorf szelése $E$ endomorfizmus-nyalábjának és $\nabla$ tetszőleges holomorf konnexió $E$-n. Ekkor $g$ visszahúzással indukál egy $g \cdot \nabla$ konnexiót $E$-n. Azt mondjuk, hogy $g \cdot \nabla$ a $\nabla$ konnexió $g$-vel vett mérce-transzformáltja.

Gauss-Bonnet:

$$\deg(E) = \int_X \mathrm{tr}(F_D) = 0.$$

# A de Rham-modulustér

Legyen $E$ egy holomorf $G$-nyaláb $X$ felett, $g \in H^0(X, \mathrm{Ad}(E))$ tetszőleges globális holomorf szelése $E$ endomorfizmus-nyalábjának és $\nabla$ tetszőleges holomorf konnexió $E$-n. Ekkor $g$ visszahúzással indukál egy $g \cdot \nabla$ konnexiót $E$-n. Azt mondjuk, hogy $g \cdot \nabla$ a $\nabla$ konnexió $g$-vel vett mérce-transzformáltja.

Gauss-Bonnet:

$$\deg(E) = \int_X \mathrm{tr}(F_D) = 0.$$

Jelöljük $\mathcal{M}^s_{\mathrm{dR}}(X, G)$-vel az $E$-n értelmezett stabil holomorf konnexiók halmazát mérce-ekvivalencia erejéig valamely 0-fokú $E$ nyalábra.

# A de Rham-modulustér, II.

**Tétel (N. Nitsure)**

*$\mathcal{M}^s_{\mathrm{dR}}(X, G)$ egy $\dim(G)(2g-2) + 2\dim(Z(G))$-dimenziós kvázi-projektív algebrai sokaság. Többek között, létezik rajta egy természetes $(g, I, \omega_I)$ Kähler-struktúra.*

# Az Abel-féle eset

Legyen $G = \mathbf{C}^*$, ekkor $E$ csak a triviális principális $\mathbf{C}^*$-nyaláb lehet. $E$ egy $\tau$ globális trivializációja indukál egy $D_0$ lapos referencia-konnexiót: $D_0(f\tau) = d(f)\tau$ minden $f$ függvényre. Ekkor minden $D$ konnexió felírható mint

$$D = D_0 + a,$$

ahol $a \in \Omega^1(X, \mathbf{C})$ egy $\mathbf{C}$-értékű sima 1-forma $X$ felett. A $\tau$ trivializációban tehát

$$D = d + a.$$

Ezért $D$ görbülete $da$, tehát $D$ pontosan akkor lapos, ha $da = 0$. Mivel $E$ minden valódi résznyalábja 0 rangú, ezért $E$-n minden konnexió irreducibilis.

# Az Abel-féle eset, II.

A mérce-transzformációk halmaza az $\Omega^0(X, \mathbf{C}^*)$ globális nemeltűnő függvények halmaza. Ez előáll mint

$$\Omega^0(X, \mathbf{C}^*) = (\Omega^0(X, \mathbf{C}^*))^0 \times \pi_0(\Omega^0(X, \mathbf{C}^*)).$$

Továbbá $\pi_0(\Omega^0(X, \mathbf{C}^*)) \cong H^1(X, \mathbf{Z})$ és $(\Omega^0(X, \mathbf{C}^*))^0 = \Omega^0(X, \mathbf{C})$ az exponenciális leképezésen keresztül. Egy $g = \exp(f)$ null-homotóp mérce-transzformáció a $d + a$ konnexión a

$$g \cdot (d + a) = d + a - df$$

képlettel hat.

# Az Abel-féle eset, II.

A mérce-transzformációk halmaza az $\Omega^0(X, \mathbf{C}^*)$ globális nemeltűnő függvények halmaza. Ez előáll mint

$$\Omega^0(X, \mathbf{C}^*) = (\Omega^0(X, \mathbf{C}^*))^0 \times \pi_0(\Omega^0(X, \mathbf{C}^*)).$$

Továbbá $\pi_0(\Omega^0(X, \mathbf{C}^*)) \cong H^1(X, \mathbf{Z})$ és $(\Omega^0(X, \mathbf{C}^*))^0 = \Omega^0(X, \mathbf{C})$ az exponenciális leképezésen keresztül. Egy $g = \exp(f)$ null-homotóp mérce-transzformáció a $d + a$ konnexión a

$$g \cdot (d + a) = d + a - df$$

képlettel hat.
Ezért

$$\mathcal{M}^s_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C}^*) = \frac{\{a \in \Omega^1(X, \mathbf{C}) | \quad da = 0\}}{\{df | \quad f \in \Omega^0(X, \mathbf{C})\} \times H^1(X, \mathbf{Z})},$$

tehát $\mathcal{M}^s_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C}^*) = H^1(X, \mathbf{C}) / H^1(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{C}^{2g} / \mathbf{Z}^{2g}$.

# Metrikák principális nyalábokon

Legyen $E$ egy principális $G$-nyaláb X felett. Egy $h$ metrika $E$-n egy globális szelése az $E/K$ homogén nyalábnak, azaz a struktúra-csoport egy redukciója $K$-ra.

## Példa

A $G = \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$ esetben a maximális kompakt $K = \mathrm{U}(r)$. Egy metrika egy $E$ principális $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-nyalábon egy Hermite-féle metrika az $E$-hez és a $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$ kanonikus reprezentációjához tartozó vektornyalábon.

# Harmonikus metrika

Legyen $(E, D)$ egy lapos $G$-nyaláb $X$ felett. Jelölje $\tilde{X}$ az $X$ univerzális fedőfelületét, amin létezik egy természetes $\pi_1(X)$-hatás. Ugyanakkor $\pi_1(X)$ hat a $G/K$ homogén téren is a $D$-hez tartozó monodrómia-hatáson keresztül. Ezért egy metrikát tekinthetünk úgy, mint egy $\pi_1(X)$-ekvivariáns

$$\tilde{h} : \tilde{X} \to G/K$$

leképezést.

# Harmonikus metrika

Legyen $(E, D)$ egy lapos $G$-nyaláb $X$ felett. Jelölje $\tilde{X}$ az $X$ univerzális fedőfelületét, amin létezik egy természetes $\pi_1(X)$-hatás. Ugyanakkor $\pi_1(X)$ hat a $G/K$ homogén téren is a $D$-hez tartozó monodrómia-hatáson keresztül. Ezért egy metrikát tekinthetünk úgy, mint egy $\pi_1(X)$-ekvivariáns

$$\tilde{h} : \tilde{X} \to G/K$$

leképezést.

## Definíció

Egy $h$ metrika harmonikus, ha a $\tilde{h}$ mint Riemann-sokaságok közötti leképezés harmonikus.

# Harmonikus metrika, II.

**Tétel (C. Corlette – S. Donaldson)**

*$(E, D)$-n akkor és csak akkor létezik harmonikus metrika, ha félig egyszerű. Továbbá, ha $(E, D)$ irreducibilis, akkor a harmonikus metrika egy $Z(G)$-beli elem erejéig egyértelműen meghatározott.*

# Holomorf értelmezés

Tekintsük a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra egy Cartan-felbontását:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m},$$

és jelöljük $\sigma$-val a Cartan-involúciót $\mathfrak{g}$-n:

$$\sigma|_{\mathfrak{k}} = 1, \quad \sigma|_{\mathfrak{m}} = -1.$$

Legyen $h$ egy metrika $E$-n és bontsuk fel a konnexiót $D = D^{+} + \Phi$ alakban, ahol $D^{+}$ egy konnexió amely megőrzi $h$-t és $\Phi$ egy $\mathfrak{m}$-értékű 1-forma. Végül, jelöljük $\bar{\partial}^{\mathcal{E}}$-vel $D^{+}$ Hodge-felbontásbeli $(0,1)$-részét. Ekkor $\bar{\partial}^{\mathcal{E}}$ meghatároz egy holomorf struktúrát az $E$ nyalábon, amely különbözik a $D$ által értelmezett holomorf struktúrától.

# Holomorf értelmezés, II.

Bontsuk fel továbbá Φ-t a

$$\Phi = \theta + \overline{\sigma(\theta)}$$

alakban, ahol $\theta$ egy ad$(E)$-értékű 1-forma, és a második tag $\sigma(\theta)$ konjugáltja mint 1-forma. Ekkor $h$ harmonikus pontosan akkor, ha

$$\bar{\partial}^{\mathcal{E}}\theta = 0.$$

# Holomorf értelmezés, II.

Bontsuk fel továbbá $\Phi$-t a

$$\Phi = \theta + \overline{\sigma(\theta)}$$

alakban, ahol $\theta$ egy ad$(E)$-értékű 1-forma, és a második tag $\sigma(\theta)$ konjugáltja mint 1-forma. Ekkor $h$ harmonikus pontosan akkor, ha

$$\bar{\partial}^{\mathcal{E}} \theta = 0.$$

Továbbá, az eredeti $D$ konnexió akkor és csak akkor lapos, ha teljesül

$$F_{D^+} - [\theta, \overline{\sigma(\theta)}] = 0.$$

Ezt a két egyenletet Hitchin komplex illetve valós egyenletének hívjuk.

# Higgs-nyalábok és stabilitás

Legyen $\mathcal{E}$ egy holomorf $G$-nyaláb $X$ felett. Egy $\theta \in \mathbf{\Omega}^1_X(X, \mathrm{ad}(\mathcal{E}))$ holomorf endomorfizmus-értékű 1-formát $\mathcal{E}$-n Higgs-mezőnek nevezünk. Az $(\mathcal{E}, \theta)$ párost ekkor Higgs-nyalábnak nevezzük.

# Higgs-nyalábok és stabilitás

Legyen $\mathcal{E}$ egy holomorf $G$-nyaláb $X$ felett. Egy $\theta \in \mathbf{\Omega}^1_X(X, \mathrm{ad}(\mathcal{E}))$ holomorf endomorfizmus-értékű 1-formát $\mathcal{E}$-n Higgs-mezőnek nevezünk. Az $(\mathcal{E}, \theta)$ párost ekkor Higgs-nyalábnak nevezzük.

Legyen $G = \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$, és $\mathcal{E}$ egy holomorf $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-nyaláb $X$ felett. Ekkor a

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\deg \mathcal{E}}{\mathrm{rang}\, \mathcal{E}}$$

számot $\mathcal{E}$ meredekségének hívjuk.

Azt mondjuk, hogy $(\mathcal{E}, \theta)$ stabil, ha $\mathcal{E}$ minden $\mathcal{F}$ valódi $\theta$-invariáns résznyalábjára teljesül

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}).$$

Továbbá, $(\mathcal{E}, \theta)$ poli-stabil ha előáll azonos meredekségű stabil Higgs-nyalábok direkt összegeként.

# Stabilitás általános csoportra

Tetszőleges csoportra hasonlóképpen értelmezhető a stabilitás-fogalom: ekkor az $\mathrm{ad}(\mathcal{E})$ vektor-nyalábon indukált Higgs-mező stabilitását értjük alatta.

# Hermite-Einstein metrikák

Legyen $h$ egy metrika $\mathcal{E}$-n, és jelöljük $D^+$-vel a $h$-hoz és $\bar{\partial}^{\mathcal{E}}$-hez tartozó Chern-konnexiót. Azt mondjuk, hogy $h$ teljesíti a Hermite-Einstein egyenletet, ha

$$F_{D^+} - [\theta, \overline{\sigma(\theta)}] = 0.$$

# Hermite-Einstein metrikák

Legyen $h$ egy metrika $\mathcal{E}$-n, és jelöljük $D^+$-vel a $h$-hoz és $\bar{\partial}^{\mathcal{E}}$-hez tartozó Chern-konnexiót. Azt mondjuk, hogy $h$ teljesíti a Hermite-Einstein egyenletet, ha

$$F_{D^+} - [\theta, \overline{\sigma(\theta)}] = 0.$$

### Tétel (N. Hitchin, C. Simpson)

*Egy $(\mathcal{E}, \theta)$ Higgs-nyalábon akkor és csak akkor létezik Hermite-Einstein metrika, ha $(\mathcal{E}, \theta)$ poli-stabil. Továbbá, ha $(\mathcal{E}, \theta)$ stabil akkor a Hermite-Einstein metrika egy $Z(G)$-beli elem erejéig egyértelmű.*

# A Dolbeault-modulustér

Legyen $(\mathcal{E}, \theta)$ egy Higgs-nyaláb $X$ felett és $g \in H^0(X, \mathcal{E})$ egy globális holomorf endomorfizmusa $\mathcal{E}$-nek. Ekkor

$$g \cdot \theta = g\theta g^{-1}$$

is egy Higgs-mező $g^*\mathcal{E}$-n. A $(g^*\mathcal{E}, g \cdot \theta)$ párt $\theta$ $g$-vel vett mérce-transzformáltjának nevezzük.

# A Dolbeault-modulustér

Legyen $(\mathcal{E}, \theta)$ egy Higgs-nyaláb $X$ felett és $g \in H^0(X, \mathcal{E})$ egy globális holomorf endomorfizmusa $\mathcal{E}$-nek. Ekkor

$$g \cdot \theta = g\theta g^{-1}$$

is egy Higgs-mező $g^*\mathcal{E}$-n. A $(g^*\mathcal{E}, g \cdot \theta)$ párt $\theta$ $g$-vel vett mérce-transzformáltjának nevezzük.
Legyen

$$\mathcal{M}^s_{\mathrm{Dol}}(X, G)$$

az $(\mathcal{E}, \theta)$ Higgs-nyalábok halmaza mérce-transzformáció erejéig, valamely 0-fokú $\mathcal{E}$ holomorf $G$-nyalábra.

# A Dolbeault-modulustér, II.

**Tétel (N. Hitchin)**

$\mathcal{M}^s_{\mathrm{Dol}}(X, G)$ *egy* $\dim(G)(2g-2) + 2\dim(Z(G))$*-dimenziós kvázi-projektív algebrai sokaság. Többek között, létezik rajta egy természetes* $(g, J, \omega_J)$ *Kähler-struktúra.*

# A Hitchin-modulustér

Legyen $E_K$ egy $K$-principális nyaláb $X$ felett és $E$ az indukált $G$-principális nyaláb. Legyen

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X, K)$$

az olyan $(\mathcal{E}, \theta)$ párosok halmaza, amelyek teljesítik a

$$F_{D^+} - [\theta, \overline{\sigma(\theta)}] = 0, \quad \bar{\partial}^{\mathcal{E}} \theta = 0$$

valós és komplex Hitchin-egyenleteket, $\mathrm{Ad}(E_K)$-beli mérce-transzformációk erejéig.

# A Hitchin-modulustér

Legyen $E_K$ egy $K$-principális nyaláb $X$ felett és $E$ az indukált $G$-principális nyaláb. Legyen

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X, K)$$

az olyan $(\mathcal{E}, \theta)$ párosok halmaza, amelyek teljesítik a

$$F_{D^+} - [\theta, \overline{\sigma(\theta)}] = 0, \quad \bar{\partial}^{\mathcal{E}} \theta = 0$$

valós és komplex Hitchin-egyenleteket, $\mathrm{Ad}(E_K)$-beli mérce-transzformációk erejéig.

## Tétel (N. Hitchin)

*$\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X, K)$ mint $\mathbf{R}$-analitikus sokaság megegyezik $\mathcal{M}^s_{\mathrm{dR}}(X, G)$-vel és $\mathcal{M}^s_{\mathrm{Dol}}(X, G)$-vel is. Az $I$ és $J$ komplex struktúrák teljesítik az $IJ = -JI$ relációt.*

# Hiper-Kähler és komplex szimplektikus

Egy olyan sima sokaságot, amelyen létezik két $(g, I, \omega_I)$ és $(g, J, \omega_J)$ Kähler-struktúra amelyek komplex szorzásaira teljesül $IJ = -JI$, hiper-Kähler sokaságnak nevezünk. Tehát, az $I, J$ de Rham és Dolbeault komplex struktúrák ellátják $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X, K)$-t egy hiper-Kähler struktúrával.

# Hiper-Kähler és komplex szimplektikus

Egy olyan sima sokaságot, amelyen létezik két $(g, I, \omega_I)$ és $(g, J, \omega_J)$ Kähler-struktúra amelyek komplex szorzásaira teljesül $IJ = -JI$, hiper-Kähler sokaságnak nevezünk. Tehát, az $I, J$ de Rham és Dolbeault komplex struktúrák ellátják $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X, K)$-t egy hiper-Kähler struktúrával.
Legyen

$$K = IJ,$$

és $u \in \{I, J, K\}$-ra

$$\omega_u = g(u., .).$$

Legyen továbbá

$$\Omega_I = \omega_J + i\omega_K, \quad \Omega_J = \omega_K - i\omega_I.$$

Ekkor $\Omega_u$ egy $u$-holomorf komplex szimplektikus struktúra.

# Karakterisztikus polinom

Legyen $G = \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$ és $(\mathcal{E}, \theta)$ egy $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-Higgs nyaláb $X$ felett. A Higgs-mezőt tekintsük egy

$$\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes K_X$$

leképezésnek, ahol $K_X$ az $X$ kanonikus nyalábját jelöli. Ekkor $\theta$ karakterisztikus polinomja a $t \in K_X$ változóban

$$\chi_\theta(t) = \det(\theta + t\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = t^r + a_1(x)t^{r-1} + \cdots + a_{r-1}(x)t + a_r(x)$$

valamely $a_j \in H^0(X, K_X^{\otimes j})$ szelésekre.

# Hitchin-fibrálás a modulustéren

## Definíció

A

$$H : \mathcal{M}^{s}_{\mathrm{Dol}}(X, \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})) \to \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(X, K_X^{\otimes j})$$

$$(\mathcal{E}, \theta) \mapsto (a_1, \dots, a_r)$$

leképezést $\mathcal{M}^{s}_{\mathrm{Dol}}(X, \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C}))$ Hitchin-leképezésének, az affin képteret a leképezés alapjának nevezzük. Az alap egy rögzített bázisában $H$ komponenseit $H_1, \dots, H_d$-vel jelöljük.

# Hitchin-fibrálás, II.

Tetszőleges $G$ struktúra-csoport esetén válasszunk a $\mathfrak{g}$ feletti ad-invariáns polinomoknak egy $p_1, \ldots, p_k$ bázisát, és legyen $d_j = \deg(p_j)$. Ekkor minden $\theta$ Higgs-mezőre pontonként alkalmazva a polinomokat kapjuk a

$$H : \mathcal{M}^s_{\mathrm{Dol}}(X, G) \to \bigoplus_{j=1}^{k} H^0(X, K_X^{\otimes d_j})$$
$$(\mathcal{E}, \theta) \mapsto (p_1(\theta(x)), \ldots, p_k(\theta(x)))$$

mérce-invariáns Hitchin-leképezést.

## Példa

$G = \mathrm{Sl}(r, \mathbf{C})$ esetén egy Higgs-nyaláb egy olyan $(\mathcal{E}, \theta)$ páros, ahol $\mathcal{E}$ determináns-nyalábja rögzített és $\mathrm{tr}(\theta) = 0$. Tehát, itt a leképezés alapja $\oplus_{j=2}^{r} H^0(X, K_X^{\otimes j})$.

# Az integrálható rendszer

## Tétel (N. Hitchin)

*A $H$ leképezés az $\mathcal{M}^s_{\mathrm{Dol}}(X, G)$ téren egy algebrailag teljesen integrálható Hamilton-féle rendszert alkot. Azaz:*

- *A leképezés alapjának $d$ dimenziója megegyezik $\frac{1}{2}\dim(\mathcal{M}^s_{\mathrm{Dol}}(X, G))$-vel.*
- *$H_1, \ldots, H_d$ az $\Omega_J$ komplex szimplektikus struktúrára nézve Poisson-kommutálnak.*
- *$dH_1 \wedge \cdots \wedge dH_d$ majdnem mindenhol nemeltűnő.*
- *A leképezés fibrumai majdnem minden pontban $d$-dimenziós Abel-féle sokaságok nyílt halmazai, az $X_{H_1}, \ldots, X_{H_d}$ Hamilton-féle vektormezők pedig lineárisak.*

# Az Abel-féle eset

Legyen $E$ egy triviális principális $\mathbf{C}^*$-nyaláb $X$ felett. Ekkor $\deg(E) = 0$, és az $E$-n értelmezett holomorf struktúrákat ekvivalencia erejéig a $\mathrm{Jac}(X) \cong T^{2g}$ Jacobi-sokaság paraméterezi. Rögzített $\mathcal{E}$ holomorf vonal-nyalábon egy $\theta$ Higgs-mező egy holomorf 1-forma: $\theta \in H^0(X, \boldsymbol{\Omega}^1_X)$. Minden Higgs-nyaláb stabil. Ismert, hogy

$$T_{\mathcal{E}} \mathrm{Jac}(X) \cong H^{0,1}(X, \mathbf{C}),$$

ami a Serre dualitás miatt izomorf $H^{1,0}(X, \mathbf{C})^*$-val. Tehát,

$$\mathcal{M}^s_{\mathrm{Dol}}(X, G) \cong T^* \mathrm{Jac}(X),$$

a Liouville holomorf-szimplektikus struktúrával: ha $q^1, \ldots, q^g$ holomorf koordináták $\mathrm{Jac}(X)$-en és $p_1, \ldots, p_g$ a duális koordináták $T^*_{q^1,\ldots,q^g} \mathrm{Jac}(X)$-en, akkor

$$\Omega_J = \sum dq^j \wedge dp_j.$$

# Az Abel-féle eset, II.

A Hitchin-leképezés

$$H : T^* \operatorname{Jac}(X) \to H^{1,0}(X, \mathbf{C}),$$
$$(q^1, \ldots, q^g, p_1, \ldots, p_g) \mapsto (p_1, \ldots, p_g)$$

fibrumai $\operatorname{Jac}(X)$-szel izomorf holomorf Lagrange-féle tóruszok $(J, \Omega_J)$-re nézve. A $H_j = p_j$-hez rendelt $X_{H_j}$ Hamilton-féle vektormező $\operatorname{Jac}(X)$-en $\frac{\partial}{\partial q^j}$.

# Az Abel-féle eset, II.

A Hitchin-leképezés

$$H : T^* \operatorname{Jac}(X) \to H^{1,0}(X, \mathbf{C}),$$
$$(q^1, \ldots, q^g, p_1, \ldots, p_g) \mapsto (p_1, \ldots, p_g)$$

fibrumai $\operatorname{Jac}(X)$-szel izomorf holomorf Lagrange-féle tóruszok $(J, \Omega_J)$-re nézve. A $H_j = p_j$-hez rendelt $X_{H_j}$ Hamilton-féle vektormező $\operatorname{Jac}(X)$-en $\frac{\partial}{\partial q^j}$.
Topologikusan

$$T^* \operatorname{Jac}(X) \cong (S^1)^{2g} \times \mathbf{R}^{2g} \cong (S^1 \times \mathbf{R}_+)^{2g} = (\mathbf{C}^*)^{2g}$$

az exponenciális leképezésen keresztül, és az $I$ komplex struktúra a $\mathbf{C}^*$-komponenseket hagyja invariánsan.

# Az Abel-féle eset

Rögzítsünk egy $x_0 \in X$ pontot. Ekkor kapunk egy izomorfizmust:

$$\mathrm{Pic}^0(X) \cong \mathrm{Pic}^1(X).$$

Továbbá, az

$$\begin{aligned} i : X &\to \mathrm{Jac}(X) \\ x &\mapsto \mathcal{O}_X(x - x_0) \end{aligned}$$

Abel-Jacobi leképezés indukál egy

$$\pi_1^{ab}(X, x_0) \cong \pi_1(\mathrm{Jac}(X)) \cong \mathbf{Z}^{2g},$$

izomorfizmust, ahonnan pedig

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C}^*) \cong \mathcal{R}(\pi_1(\mathrm{Jac}(X)), \mathbf{C}^*) &\cong (\mathbf{C}^*)^{2g} \\ D &\mapsto F_D. \end{aligned}$$

# Az Abel-féle eset, II.

Legyen

$$H_1 = \{(x, L, L(x))\} \subset X \times \mathrm{Jac}(X) \times \mathrm{Jac}(X),$$

a következő vetítésekkel:

$$\pi_3(x, L, L(x)) = L(x) \quad \pi_{12}(x, L, L(x)) = (x, L).$$

# Az Abel-féle eset, II.

Legyen

$$H_1 = \{(x, L, L(x))\} \subset X \times \mathrm{Jac}(X) \times \mathrm{Jac}(X),$$

a következő vetítésekkel:

$$\pi_3(x, L, L(x)) = L(x) \quad \pi_{12}(x, L, L(x)) = (x, L).$$

Legyen

$$\mathcal{H}_1 : \mathcal{R}(\pi_1(\mathrm{Jac}(X)), \mathbf{C}^*) \to \mathcal{R}(\pi_1(X \times \mathrm{Jac}(X)), \mathbf{C}^*)$$
$$F \mapsto (\pi_{12})_* \pi_3^* F$$

az 1-rangú Hecke-operátor.

## Állítás

*Ekkor minden $D \in \mathcal{M}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C})$-re $F_D$ egy Hecke-sajátkéve $D$ sajátértékkel, azaz $\mathcal{H}_1(F_D) \cong D \boxtimes F_D$.*

# A magasabb rangú eset

Legyen $G = \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$ és nevezzük $\mathcal{M}(X, G)$-nek az $E$-n értelmezett holomorf nyalábok modulusterét valamely $E$ principális $G$-nyalábra. Legyen most minden $1 \leq i \leq r$-re

$$H_r^i = \{(x, L, L')\} \subset X \times \mathcal{M}(X, G) \times \mathcal{M}(X, G),$$

ahol

$$0 \to L \to L' \to \oplus^i \mathbf{C}_x \to 0.$$

# A magasabb rangú eset

Legyen $G = \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$ és nevezzük $\mathcal{M}(X, G)$-nek az $E$-n értelmezett holomorf nyalábok modulusterét valamely $E$ principális $G$-nyalábra. Legyen most minden $1 \leq i \leq r$-re

$$H_r^i = \{(x, L, L')\} \subset X \times \mathcal{M}(X, G) \times \mathcal{M}(X, G),$$

ahol

$$0 \to L \to L' \to \oplus^i \mathbf{C}_x \to 0.$$

Hasonlóan $\mathcal{H}_1$-hez, értelmezhető a

$$\mathcal{H}_r^i : D^b(\mathcal{M}(X, E)) \to D^b(X \times \mathcal{M}(X, E))$$

Hecke-operátor, ahol $D^b$ a $\mathcal{D}$-modulusok derivált kategóriája.

# A magasabb rangú eset, II.

Legyen $D$ egy irreducibilis lapos $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-konnexió $X$-en. Azt mondjuk, hogy $F \in D^b(\mathcal{M}(X, G))$ egy Hecke-sajátkéve $D$ sajátértékkel, ha minden $i$-re

$$\mathcal{H}_r^i(F) \cong (\wedge^i D) \boxtimes F.$$

# A magasabb rangú eset, II.

Legyen $D$ egy irreducibilis lapos $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-konnexió $X$-en. Azt mondjuk, hogy $F \in D^b(\mathcal{M}(X, G))$ egy Hecke-sajátkéve $D$ sajátértékkel, ha minden $i$-re

$$\mathcal{H}_r^i(F) \cong (\wedge^i D) \boxtimes F.$$

**Tétel (Frenkel-Gaitsgory-Vilonen)**

*Minden $D$ irreducibilis lapos $\mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$-konnexióra létezik egy $F_D$ irreducibilis Hecke-sajátkéve $\mathcal{M}(X, G)$-n $D$ sajátértékkel.*

# Fizikai interpretáció

Hitchin-fibrálás: $T^*\mathcal{M}(X, G) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X, G)$ nyílt részhalmaz.

# Fizikai interpretáció

Hitchin-fibrálás: $T^*\mathcal{M}(X,G) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$ nyílt részhalmaz.

$A$-modell: $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$, szimplektikus struktúra: $\omega_K$;
$\mathcal{D}$-modulusok $\mathcal{M}(X,G)$-n $\leftrightsquigarrow$ $A$-hártyák $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$-en;
Hecke-operátor $\leftrightsquigarrow$ 't Hooft-operátor;
Hecke-sajátkéve $\leftrightsquigarrow$ mágneses sajáthártya.

# Fizikai interpretáció

Hitchin-fibrálás: $T^*\mathcal{M}(X,G) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$ nyílt részhalmaz.

$A$-modell: $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$, szimplektikus struktúra: $\omega_K$;
$\mathcal{D}$-modulusok $\mathcal{M}(X,G)$-n $\leftrightsquigarrow$ $A$-hártyák $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$-en;
Hecke-operátor $\leftrightsquigarrow$ 't Hooft-operátor;
Hecke-sajátkéve $\leftrightsquigarrow$ mágneses sajáthártya.

$B$-modell: $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,{}^L G)$, komplex struktúra: $I$;
$(E,D) \in \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,{}^L G) \cong \mathcal{M}_{\mathrm{dR}}(X,{}^L G)$ $\leftrightsquigarrow$ $B$-hártya.

# Fizikai interpretáció

Hitchin-fibrálás: $T^*\mathcal{M}(X,G) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$ nyílt részhalmaz.

$A$-modell: $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$, szimplektikus struktúra: $\omega_K$;
$\mathcal{D}$-modulusok $\mathcal{M}(X,G)$-n $\leftrightsquigarrow$ $A$-hártyák $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$-en;
Hecke-operátor $\leftrightsquigarrow$ 't Hooft-operátor;
Hecke-sajátkéve $\leftrightsquigarrow$ mágneses sajáthártya.

$B$-modell: $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,{}^LG)$, komplex struktúra: $I$;
$(E,D) \in \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,{}^LG) \cong \mathcal{M}_{\mathrm{dR}}(X,{}^LG)$ $\leftrightsquigarrow$ $B$-hártya.

T-dualitás: $B$-hártya $(E,D) \mapsto A$-mágneses sajáthártya $F_D$;

# Fizikai interpretáció

Hitchin-fibrálás: $T^*\mathcal{M}(X,G) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$ nyílt részhalmaz.

$A$-modell: $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$, szimplektikus struktúra: $\omega_K$;
$\mathcal{D}$-modulusok $\mathcal{M}(X,G)$-n $\leftrightsquigarrow$ $A$-hártyák $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,G)$-en;
Hecke-operátor $\leftrightsquigarrow$ ’t Hooft-operátor;
Hecke-sajátkéve $\leftrightsquigarrow$ mágneses sajáthártya.

$B$-modell: $\mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,{}^L G)$, komplex struktúra: $I$;
$(E,D) \in \mathcal{M}_{\mathrm{Hit}}(X,{}^L G) \cong \mathcal{M}_{\mathrm{dR}}(X,{}^L G) \leftrightsquigarrow B$-hártya.

T-dualitás: $B$-hártya $(E,D) \mapsto A$-mágneses sajáthártya $F_D$;
Geometriai Langlands $\leftrightsquigarrow$ 4-d elektromos-mágneses dualitás!

# Langlands-dualitás

Legyen $(\mathfrak{z}^\vee \oplus \mathfrak{h}^\vee, X, R)$ a $G$ gyökrendszere, ahol

- $\mathfrak{z}$ a $\mathfrak{g}$ centruma
- $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{g}$ félig-egyszerű részének egy Cartan-részalgebrája
- $X \subset \mathfrak{z}^\vee \oplus \mathfrak{h}^\vee$ a $G$ megfelelő maximális tóruszának karakter-rácsa
- $R \subset \mathfrak{h}^\vee$ pedig a gyökök halmaza.

Egy összefüggő reduktív algebrai csoportot egyértelműen meghatároz a gyökrendszere.

# Langlands-dualitás

Legyen $(\mathfrak{z}^\vee \oplus \mathfrak{h}^\vee, X, R)$ a $G$ gyökrendszere, ahol

- $\mathfrak{z}$ a $\mathfrak{g}$ centruma
- $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{g}$ félig-egyszerű részének egy Cartan-részalgebrája
- $X \subset \mathfrak{z}^\vee \oplus \mathfrak{h}^\vee$ a $G$ megfelelő maximális tóruszának karakter-rácsa
- $R \subset \mathfrak{h}^\vee$ pedig a gyökök halmaza.

Egy összefüggő reduktív algebrai csoportot egyértelműen meghatároz a gyökrendszere.

### Definíció

A $G$ csoport Langlands-duálisa az a ${}^LG$ csoport, amely gyökrendszere $(\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}, X^\vee, R^\vee)$.

# Néhány Langlands-duális pár

## Példa

- $G = \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$, ${}^L G = \mathrm{Gl}(r, \mathbf{C})$.
- $G = \mathrm{Sl}(r, \mathbf{C})$, ${}^L G = \mathrm{PGl}(r, \mathbf{C})$.
- $G = \mathrm{SO}(2r+1, \mathbf{C})$, ${}^L G = \mathrm{Sp}(2r, \mathbf{C})$.
- $G = G_2$, ${}^L G = G_2$.
- ${}^L({}^L G) \cong G$.
- $Z(G) \cong \pi_1({}^L G)$ minden félig-egyszerű $G$-re.