A KERR-NEWMAN téridő globális tulajdonságai

1. Az ívelem

- egzakt megoldása a csatolt EM egyenletnek

Boyer-Lindquist koord: (t, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = \frac{\Delta}{R^2}\left(dt - a\sin^2\theta\, d\phi\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{R^2}\left(a\,dt - [r^2+a^2]\,d\phi\right)^2 - R^2\, d\theta^2 - \frac{R^2}{\Delta}\,dr^2$$

és

$$A = -\frac{1}{R^2}\Big(e\,r\left(dt - a\sin^2\theta\, d\phi\right) - g\cos\theta\left(a\,dt - [r^2+a^2]\,d\phi\right)\Big)$$

ahol

$$\Delta := r^2 - 2mr + a^2 + e^2 + g^2$$
$$R^2 := r^2 + a^2\cos^2\theta$$

és

m – tömeg $(m>0)$

am – impulzusmom.

e – elektromos } töltés

g – mágneses } $(g=0)$

$$\left.\begin{aligned}\oint F_{ab} &= 8\pi g\\ \oint {*F_{ab}} &= 8\pi e\end{aligned}\right\}$$

Nyilván

$t \in \mathbb{R}$, $(\theta, \phi) \in S^2$, $r \in ???$

– Szimmetriák:

- $K^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$, $X^a = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a$ – Killing vektorok
  – izometriák

  $a = 0$ esetén gömbszimmetria

$$g_{ab} K^a K^b = \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{R^2} = 1 - \frac{2mr - e^2}{R^2}$$

$$g_{ab} X^a X^b = \frac{\Delta a^2 \sin^2\theta - [r^2 + a^2]^2}{R^2} \sin^2\theta$$

$$g_{ab} K^a X^b = \frac{2mr - e^2}{R^2} a \sin^2\theta$$

– a kauz. jelleg változhat!

- Nemtriviális Killing tenzorok
- Diszkrét szimmetriák:

  $(t, \phi) \longrightarrow (-t, -\phi)$ izometria

  $(e, g) \longrightarrow (g, -e)$ dualitás tr.

  NB: Formálisan r lehet negatív is!

  $(r, m, e) \longrightarrow (-r, -m, -e)$

– Kérdések:

- aszimptotikus síkság $i^0, \mathcal{J}^+$?
- fizikai szingularitások ?
- eseményhorizontok ?
- oksági tulajdonságok ?
- a Killing szimm. kauz. jellege ?

  – ergoszféra és energiakivonás

2. Aszimptotikus alak

- Az ivelem $1/r^2$ pontossággal:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) -$$
$$- \frac{2m}{r}\left(dt^2 + dr^2\right) + \frac{1}{r^2}\left(e^2 dt^2 + [e^2 - 4m^2]\, dr^2\right) -$$
$$- \frac{2\,am}{r^2}\, 2\sin^2\theta\; r\, dt\, d\phi +$$
$$+ \frac{a^2}{r^2}\left(\sin^2\theta\, dr^2 - \cos^2\theta\, r^2 d\theta^2 + r^2 d\phi^2\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

– aszimptotikusan sík, vezető rend $\sim m$
következő r. $\sim e, a$

- Aszimptotikus síkság $\mathcal{I}^0$-ban:
$\Sigma_t := \{t = \text{const}\}$ hiperfelület, – (r, θ, ϕ)

– Indukált metrika:

$$dl^2 = - \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{1}{r^2}(e^2 + a^2)}\, dr^2 - r^2\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right) d\theta^2 -$$
$$- \frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 - \frac{a^2}{r^2}\Delta \sin^2\theta}{1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta}\, r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 =$$
$$= -\left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) +$$
$$+ O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$
– térszerű, aszimpt. sík $|r| \to \infty$ esetén

ADM tömeg: m

– külső görbület: $\chi_{ab} := P_a^c P_b^d \nabla_{(c} t_{d)} \sim \frac{a}{r^2}$

ADM impulzusmom: am.

- **Aszimptotikus síkság $\mathcal{J}^+$-ban:**

  - Kifutó görbeir. radiális null geod.:

$$\dot{\gamma}(r) = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right)$$

– NEM hiperfelület merőleges

affin paraméter: r

örvénye $\omega = -\frac{a\cos\theta}{R^2}$

$$u := t - \int_{r_0}^{r} \frac{\tilde{r}^2+a^2}{\Delta} d\tilde{r} + \text{const}$$

$$\bar{\Phi} := \phi - \int_{r_0}^{r} \frac{a}{\Delta} d\tilde{r} + \text{const}$$

- Új koordináták (Kerr-Newman): $(u, r, \theta, \bar{\Phi})$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr-e^2}{R^2}\right) du^2 + 2\,du\,dr + 2a\sin^2\theta \frac{2mr-e^2}{R^2} du\, d\bar{\Phi} -$$

$$-2a\sin^2\theta\, dr\, d\bar{\Phi} - R^2 d\theta^2 - \frac{[r^2+a^2] - \Delta a \sin^2\theta}{R^2} \sin^2\theta\, d\bar{\Phi}^2 =$$

$$= du^2 + 2\,du\,dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\bar{\Phi}^2) -$$

$$- 2\frac{a\sin^2\theta}{r} r\, dr\, d\bar{\Phi} -$$

$$- \frac{1}{r^2}\left\{ \frac{2mr-e^2}{1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta} du^2 - 2a\sin^2\theta \frac{2mr-e^2}{1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta} dr\, d\bar{\Phi} + \right.$$

$$+ a^2\cos^2\theta\, r^2 d\theta^2 +$$

$$\left. + a^2\sin^2\theta \left(1 + \frac{2mr-e^2}{1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta}\right) d\bar{\Phi}^2 \right\}$$

- aszimptotikusan sík $|r| \to \infty$ esetén, $\mathcal{J}^+$ (fényszerű végtelen) bevezethető

$a=0$-ra: $(u, r, \theta, \bar{\phi}) \longrightarrow$ retardált Eddington-Finkelstein koord. a R-N. téridőben (ill. $a=e=a=0$-ra retardált null Minkowski-ban)

- A Killing vektorok $|r| \to \infty$ esetén:

$$g_{ab} K^a K^b = 1 - \frac{2mr - e^2}{r^2\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)} \longrightarrow 1$$

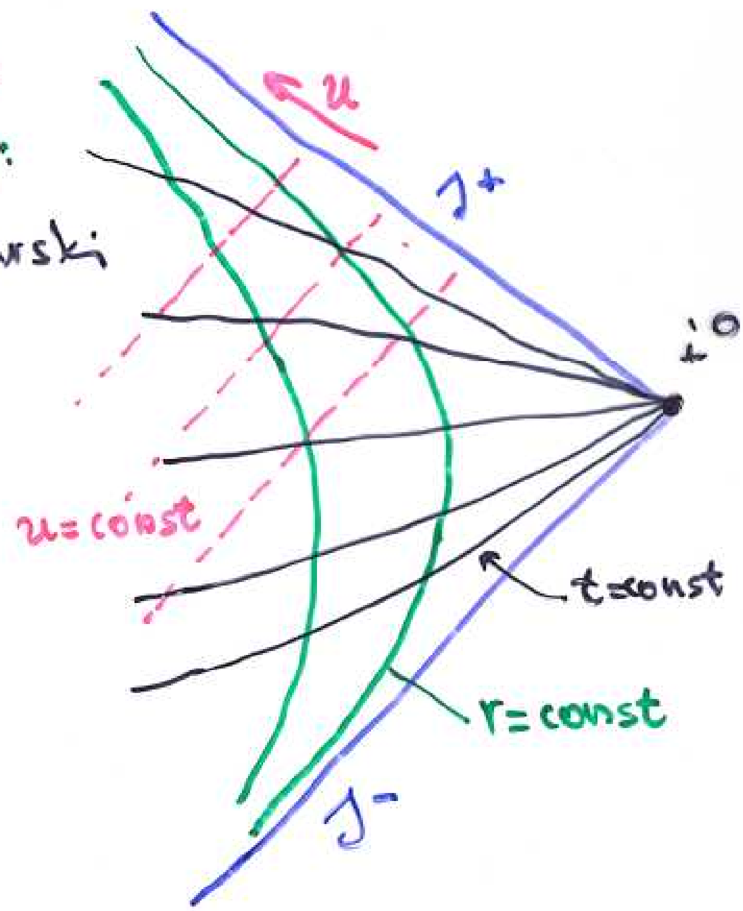
— stacionaritás, normált a ∞-ben

$$g_{ab} X^a X^b = -\left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{r^3}\,\frac{2m - e^2/r}{1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta}\, a^2 \sin^2\theta\right) r^2 \sin^2\theta < 0$$

— térszerű, tengelyszimmetria

- A konformis diagram $|r| \to \infty$ esetén:

az aszimpt. sík tartomány (I): aszimpt. Minkowski jelleg



3. Az ivelem szingularitásai

$$ds^2 = \frac{\Delta}{R^2}(dt - a\sin^2\theta\, d\phi)^2 -$$
$$- \frac{\sin^2\theta}{R^2}(a\,dt - [r^2+a^2]\,d\phi)^2 - \frac{R^2}{\Delta}dr^2 - R^2 d\phi^2$$

szingularitás: $R^2 = 0$, $\Delta = 0$

- A "centrális" szingularitás:

$R^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta = 0 \rightarrow r = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

– nemtriviális ("anizotróp") szing.!

A megoldás $r=0$ körül:

A metrika komponensek viselkedése

∘ $\gamma(r) = (t(r), r, \theta_0, \phi(r))$, $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ mentén:

$$ds^2 \sim \frac{e^2+a^2}{a^2\cos^2\theta_0}(dt - a\sin^2\theta\, d\phi)^2 -$$
$$- \frac{1}{a}\,tg^2\theta_0\,(dt - a\,d\phi)^2 -$$
$$- \frac{a^2\cos^2\theta_0}{e^2+a^2}dr^2 - a^2\cos^2\theta_0\, d\theta^2$$

– REGULÁRIS ha $a \neq 0$, sting. ha $a = 0$

∘ $\gamma(r) = (t(r), r, \frac{\pi}{2}, \phi(r))$ mentén:

$$ds^2 \sim \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{a^2+e^2}{r^2}\right)(dt - a\,d\phi)^2 -$$
$$- \frac{1}{r^2}(a\,dt - [r^2+a^2]\,d\phi)^2 -$$
$$- \frac{r^2}{r^2+e^2}dr^2 - r^2 d\theta^2$$

– FIZIKAI szingularitás $r=0$-ban

Irányfüggő limesz $a \neq 0$-ra, nemtriviális szing. szerkezet !!

- Az ívelem szingularitásai

$$\Delta := r^2 - 2mr + a^2 + e^2 = 0 \quad \text{-ból:}$$

a) Ha $a^2+e^2 > m^2$, akkor $\Delta > 0 \ \forall r \in \mathbb{R}$
- az ívelem reguláris a teljes
$-\infty < r < 0$, $0 < r < \infty$ tartományon

b) Ha $a^2+e^2 = m^2$ ("extrém Kerr-Newman"),
akkor $\Delta = 0$-nak egy gyöke van:
$r_0 = m$-nél, és az ívelem
$-\infty < r < 0$, $0 < r < r_0$, $r_0 < r < \infty$
esetén reguláris
Szingularitás: $r = r_0$

c) Ha $a^2+e^2 < m^2$, akkor $\Delta = 0$-nak két gyöke van:

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}$$

Az ívelem értelmezési tartománya

$-\infty < r < 0$, $0 < r < r_-$, $r_- < r < r_+$, $r_+ < r < \infty$

Szingularitás: $r = r_\pm$

Schwarzschild: $\left.\begin{array}{l} r_+ = 2m \\ r_- = 0 \end{array}\right\}$

• Tehát:

$r=0$ -nál nemtriviális ("anizotróp") FIZIKAI szingularitás $R_{abcd}R^{abcd} \to \infty$

$r=r_0/r_\pm$ -nál KOORDINÁTA szingulár.

- radiális idő- és null geodetikusok véges affin hossznál elérik $r_0/r_\pm$ -t és a görb. invariánsok regulárisak maradnak

De (látni fogjuk): $r=r_0, r_\pm$ FIZIKAILAG kitüntetett helyek

- esemény / Cauchy horizontok

a) a centrális szingularitás
b), c) a horizontok

vizsgálata

4. Az $a^2+e^2>m^2$ eset

Ekkor $\Delta>0$ $\forall r\neq 0$-ra, szingularitás csak $r=0$-ban

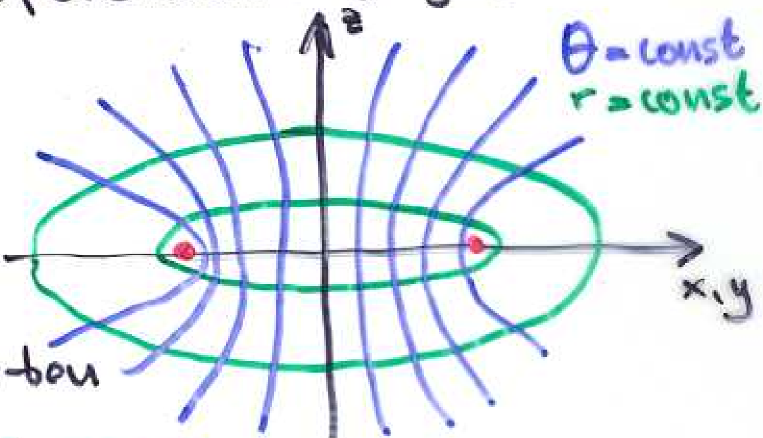
$\sim$ a szing. tulajdonságainak a vizsgálata az ált. esetben is

• Új (Kerr-Schild) koordináták:

$$\bar{t} := u+r$$
$$x := \sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\cos\bar{\Phi}$$
$$y := \sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\sin\bar{\Phi}$$
$$z := r\cos\theta$$

azaz: $(r,\theta,\bar{\Phi})$ szferoidális (x,y,z)-re nézve:

$$\frac{x^2+y^2}{r^2+a^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$



$r=$ const — belapult forgási ellipszoid (x,y,z)-ben

$r=0 \Leftrightarrow x^2+y^2\leq a^2,\ z=0$

Ez: "a" sugarú korong a $z=0$ síkban.

$$\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\bar{\Phi})}\right)=(r^2+a^2\cos^2\theta)\sin\theta$$

– szingularitás: • a z tengelyen : $\theta=0,\pi$
• a "gyűrűn": $r=0,\ \theta=\frac{\pi}{2}$

De: $0<x^2+y^2<a^2,\ z=0$ reguláris!

- Inverz tr.

$$\operatorname{ctg}\bar{\Phi} = \frac{x}{y}$$

$$2r^2 = x^2+y^2+z^2-a^2+\sqrt{(x^2+y^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$

$\Downarrow$

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 -$$

$$-\frac{2mr-e^2}{r^4+a^2z^2}\, r^2 \underbrace{\left(\frac{r(xdx+ydy)-a(xdy-ydx)}{r^2+a^2}+\frac{z}{r}dz+d\bar{t}\right)^2}_{}$$

null a sík metrikára nézve
– Kerr-Schild alak

- Az $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ "gyűrű" FIZIKAI, görbületi szingularitás: $\theta=\frac{\pi}{2}$-re

$$ds^2 = ds^2_{sik} -$$

$$-\frac{2mr-e^2}{r^2}\left(\frac{r(x\,dx+y\,dy)-a(x\,dy-y\,dx)}{r^2+a^2}+d\bar{t}\right)^2$$

– szinguláris

Valóban: • $R_{abcd}R^{abcd} \to \infty$ ha $z=0$, $r\to 0$;

• a $z=0$ ("egyenlítői síkban") futó radiális null / időszerű geod. inkomplettek és a gyűrűn végződnek

• A $D := \{x^2+y^2<a^2,\ z=0\}$ "korong" nem-fizikai, "gyenge" szingularitás:

Ott a metrika

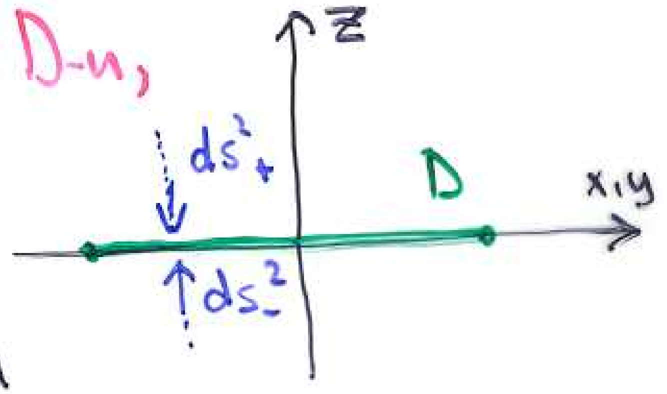
$$ds^2 = ds^2_{sík} - \lim_{z\to 0}\left(\frac{2mr-e^2}{r^2+a^2\left(\frac{z}{r}\right)^2}\left\{\frac{(rx+ay)\,dx+(ry-ax)\,dy}{r^2+a^2}+\frac{z}{r}dz+dt\right\}^2\right)$$

L'Hospital $\rightarrow \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{z}{|z|}\sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2}} \neq 0$

↓

ds² NEM folytonos D-n,

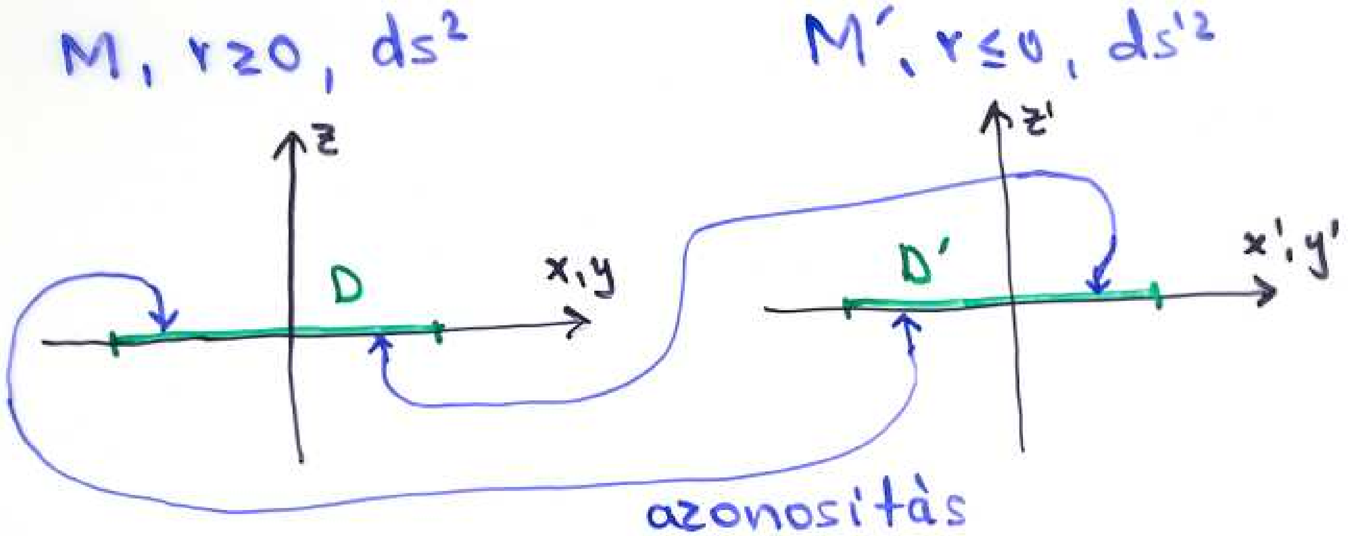
de: az R_{abcd} minden polinom invariánsa korlátos marad



• A "nemfizikai" szingularitás eltüntetése – analitikus folytatással:

A ds^2 nemfolytonosságának az oka: $z \in \mathbb{R}$ de $r \geq 0$

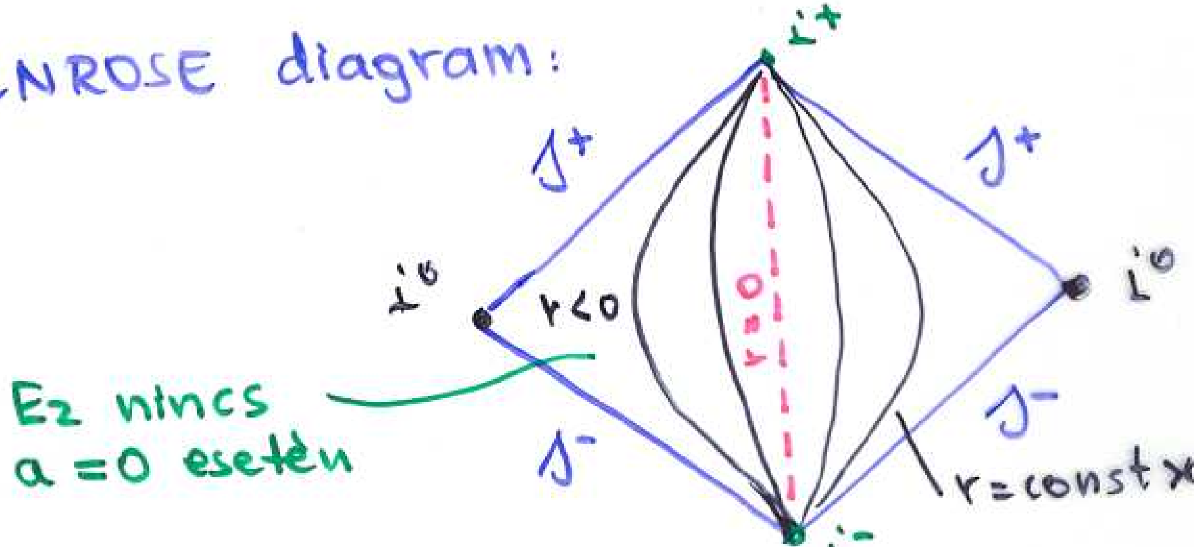
Megoldás: ds^2 kiterjesztése $r<0$ re!



ds'^2: a ds^2 <u>analitikus</u> kiterjesztése lesz $r<$
$-ra$

Inkomplett geod. csak M-ben

• PENROSE diagram:



• Kauzalitássértés:

Az X^a integrálgörbéi: S^1

de $g_{ab}X^aX^b = -\left(r^2 + a^2 + \frac{2mr - e^2}{R^2}a^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta$

– pozitív a gyűrű szing. közelében ($\theta \approx \frac{\pi}{2}$) elég kicsi negatív r ill. $e \neq 0$ esetén elég kicsi pozitív r-re is – zárt időszerű görbe !!

5. Az $a^2+e^2 \leq m^2$ eset

- Boyer-Lindquist koordinátákban görgőirányított ki/befutó nullgeod.:

$$\dot{\gamma}^a_{\mp} = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, \pm 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right)$$

$\Downarrow$

Ha

$$u_\pm := t \pm \int \frac{r^2+a^2}{\Delta} dr$$

$$\phi_\pm := \phi \pm \int \frac{a}{\Delta} dr$$

akkor $u_\pm, \phi_\pm$ konst. $\gamma_\mp$ mentén

— avanzsált / retardált Kerr-Newman koord.: (u_+, r, θ, ϕ_+), (u_-, r, θ, ϕ_-)

Az ívelem:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr - e^2}{R^2}\right) du_\pm^2 \mp 2 du_\pm dr + 2a \sin^2\theta \frac{2mr - e^2}{R^2} du_\pm d\phi_\pm$$

$$\pm 2a \sin^2\theta \, dr \, d\phi_\pm - R^2 d\theta^2 - \frac{[r^2+a^2]^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}{R^2} \sin^2\theta \, d\phi_\pm^2$$

— nemszinguláris $\forall r \in (0, \infty)$ esetén is!

$\Downarrow$ Két Lorentz sokaság: $(M_\pm, ds^2_\pm)$, ahol $u_\pm \in \mathbb{R}$, $r \in (0,\infty)$, $(\theta, \phi_\pm) \in S^2$,

és ha

$$I := \left(\{ (t, r, \theta, \phi) \mid t \in \mathbb{R}, r \in (r_+, \infty), (\theta, \phi) \in S^2 \}, ds^2 \right)$$

$\Downarrow$

$I \subset (M_\pm, ds^2_\pm)$ — izometrikusan beágyazott nyílt alsokaság

- Az $I \subset (M_-, ds^2_-)$ kiterjesztése:

$H_\pm := \{(u_-, r_\pm, \theta, \phi_-) \in M_-\}$ ~

$r = \text{const} = r_\pm$ – fényszerű hiperfelület
(r_0) (M_-, ds^2_-)-ban

Ha $p = (u^0_-, r^0, \theta^0, \phi^0_-)$, $r^0 > r_+$,

↓ a p-n átmenő jövőirányított kifutó nullgeod.:

$$\gamma_-(s) = (u^0_-, r^0 + s, \theta^0, \phi^0_-)$$

↓

- H_+ a p-ből a $\gamma_-(s)$ mentén múlt irányban van,
- H_- a $H_+ \cap \gamma_-$-ból a $\gamma_-(s)$ mentén múlt irányban van.

↓

$$II_- := \{(u_-, r, \theta, \phi_-) \in M_- \mid r \in (r_-, r_+)\}$$

~ izometrikus Boyer-Lindquist $r_- < r < r_+$

$$III_- := \{(u_-, r, \theta, \phi_-) \in M_- \mid r \in (0, r_-)\}$$

~ izometr. B.-L. $0 < r < r_-$

↓

$$III_- \subset \mathcal{J}^-[II_-], \quad II_- \subset \mathcal{J}^-[I]$$

és

$$M_- = I \cup \overline{II_-} \cup \overline{III_-}.$$

• Az $\mathrm{I} \subset (M_+, ds_+^2)$ kiterjesztése:

$H_\pm := \{ r = \underset{(r_0)}{r_\pm} \} \subset M_+$ – fényszerű hiperfel.

Ha $p = (u_+^0, r^0, \theta^0, \phi_+^0)$, $r^0 > r_+$,

↓

a p-n átmenő jövőirányított befutó nullgeod.:

$$\gamma_+(s) = (u_+^0, r^0 - s, \theta^0, \phi_+^0)$$

↓

• H_+ a p-ből a $\gamma_+(s)$ mentén jövő irányban van,

• H_- a $H_+ \cap \gamma_+$-tól a $\gamma_+(s)$ mentén jövő irányban van.

↓

$\mathrm{II}_+ := \{ (u_+, r, \theta, \phi_+) \in M_+ \mid r \in (r_-, r_+) \}$

$\sim$ izometrikus a B.-L. $r_- < r < r_+$;

$\mathrm{III}_+ := \{ (u_+, r, \theta, \phi_+) \in M_+ \mid r \in (0, r_-) \}$

$\sim$ izometr. B.-L. $0 < r < r_-$

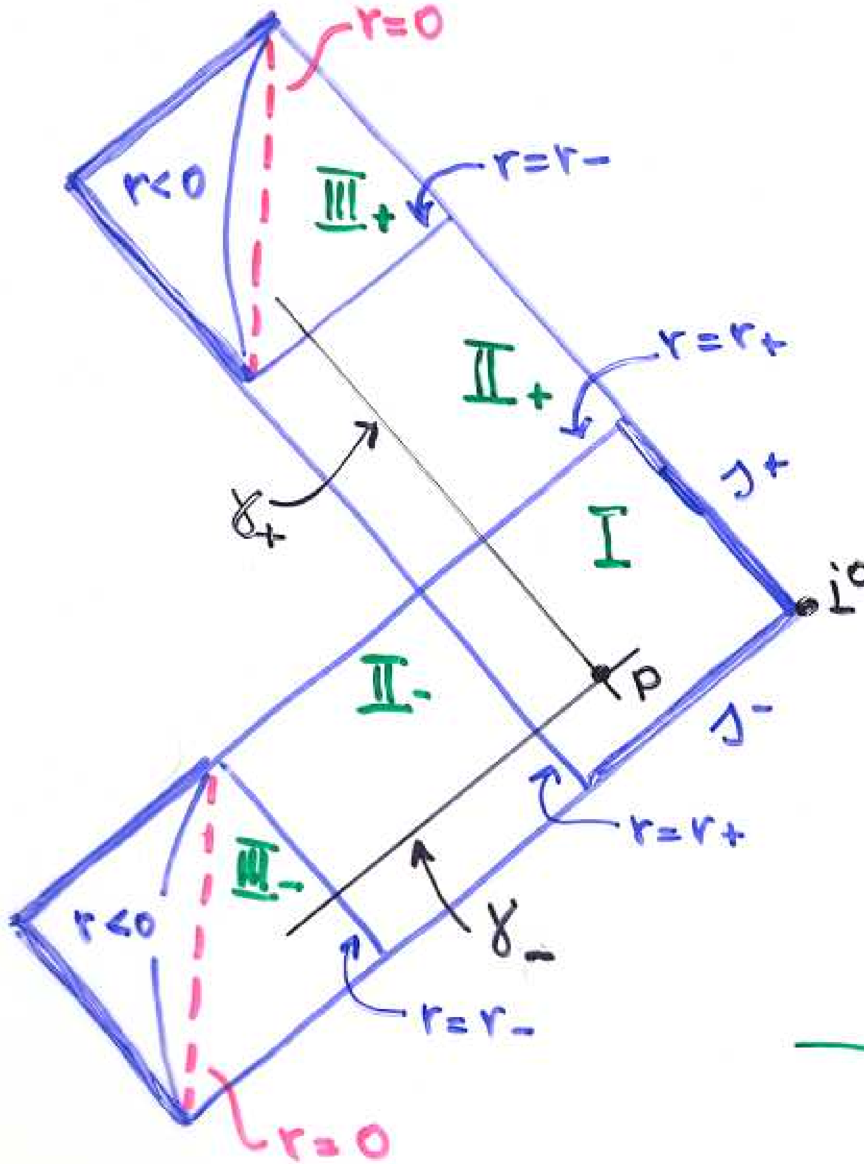
↓

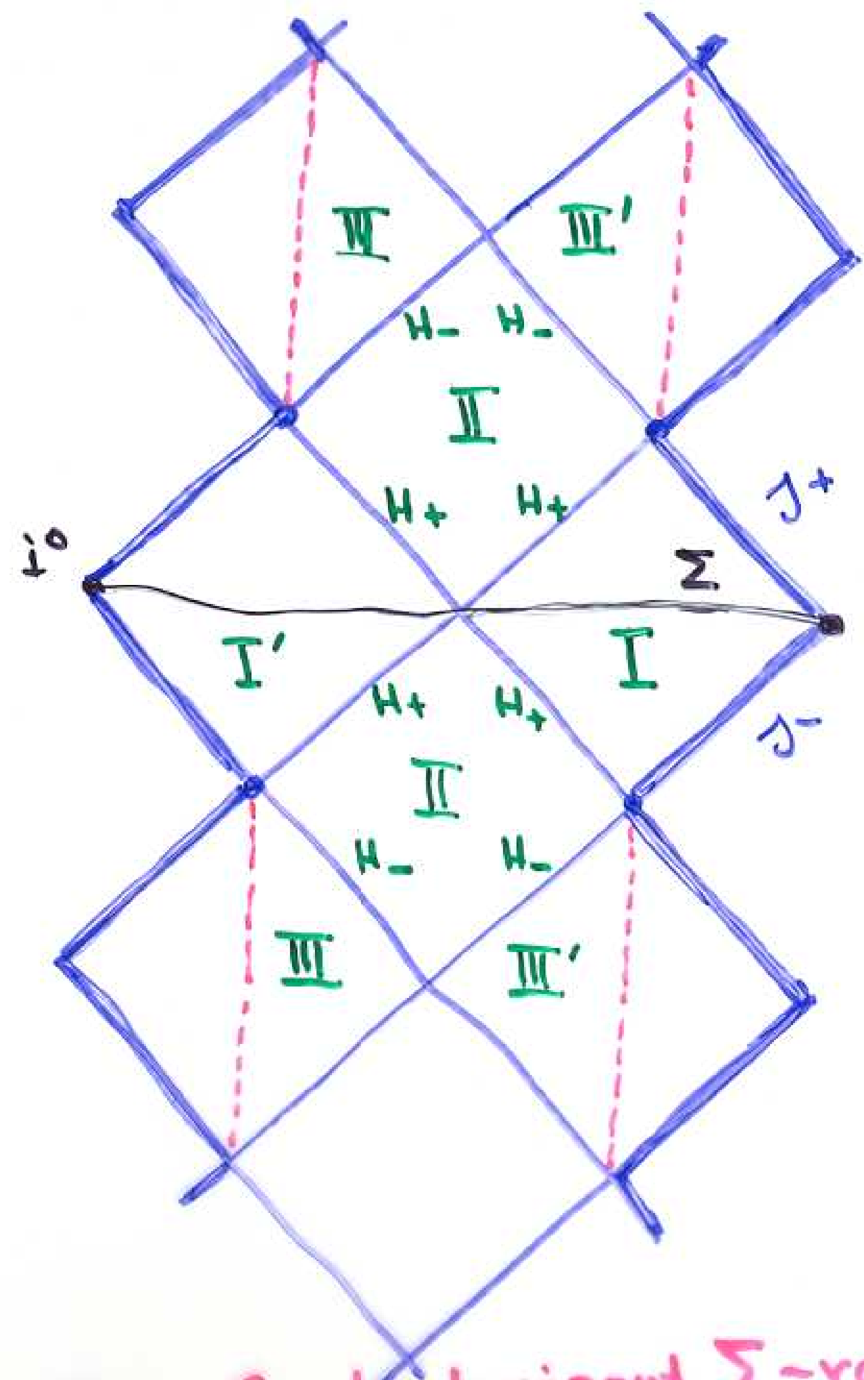
$\mathrm{III}_+ \subset J^+[\mathrm{II}_+]$, $\mathrm{II}_+ \subset J^+[\mathrm{I}]$

és

$$M_+ = \mathrm{I} \cup \mathrm{II}_+ \cup \mathrm{III}_+$$

↓



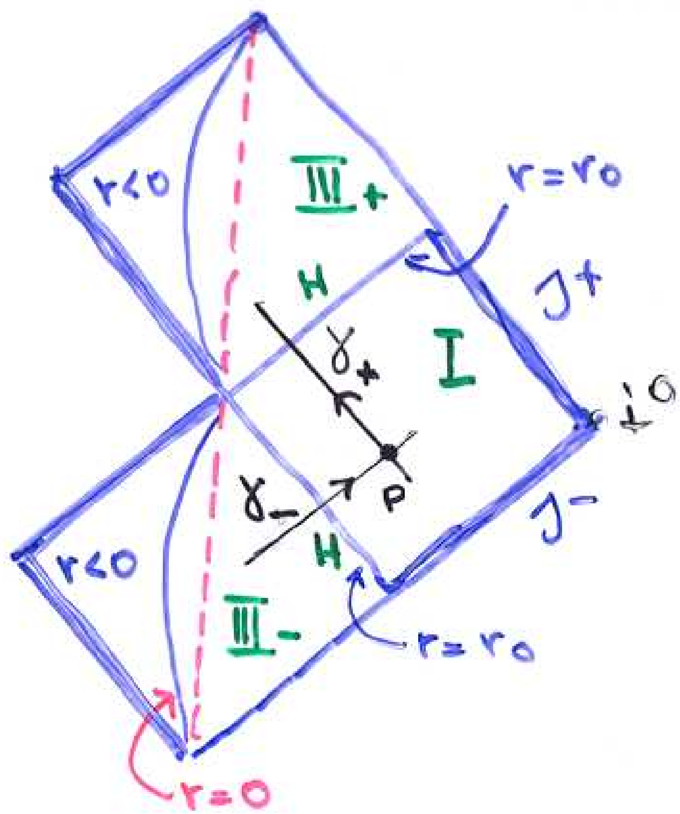


H_+ – eseményhorizont J^+-ra nézve

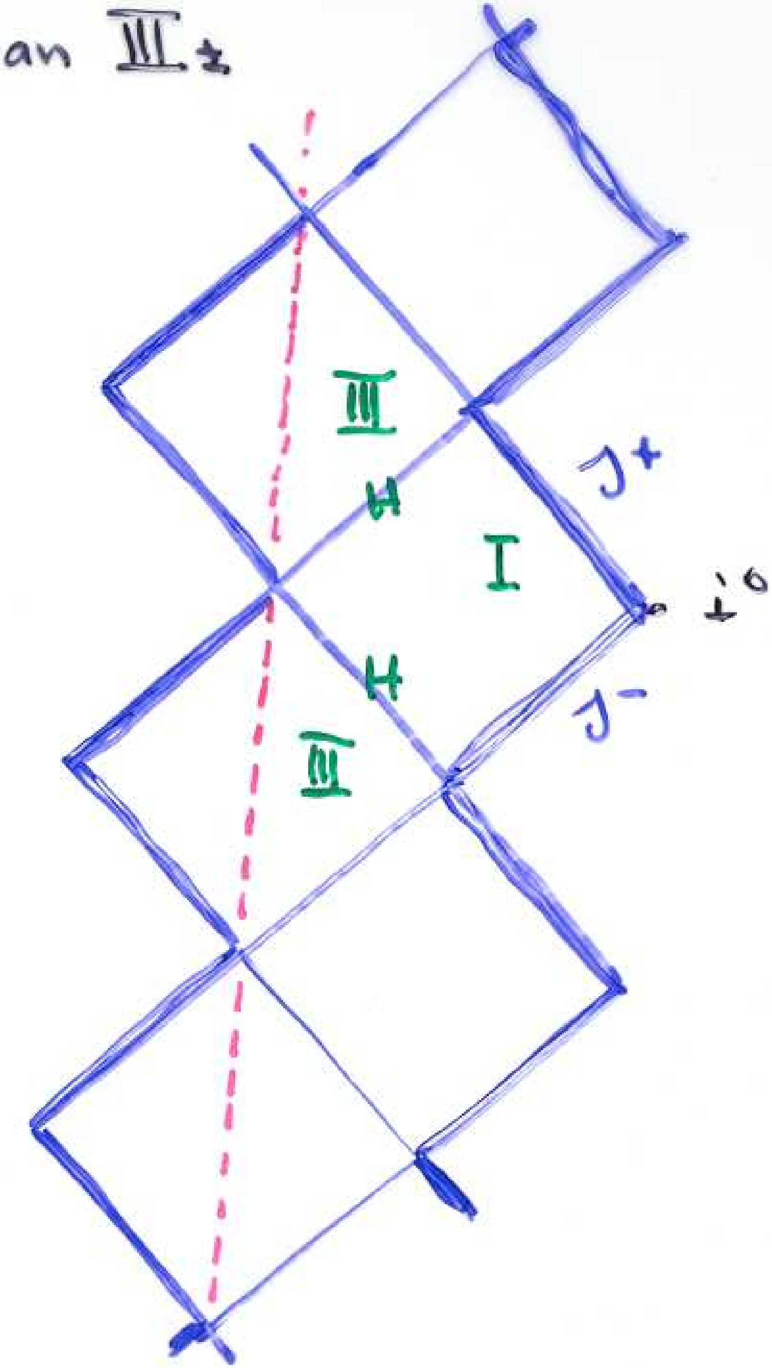
H_- – Cauchy horizont Σ-ra

<u>NB</u>: Reissner–Nordström : $r<0$ nincs

- A_2 $a^2+e^2=m^2$ (extrém) K.-N.:
  - csak egy belső tartomány van $\mathrm{III}_\pm$



$\xrightarrow[\text{kiterj.}]{\text{komplett}}$



$H := \{r = r_0\}$ – eseményhorizont $\mathcal{J}^+$-ra nézve

NB.: Reissner-Nordström: $r<0$ nincs

6. Az ergoszféra

• Láttuk: nagy r-re

$K^a = \frac{\partial}{\partial t}$ időszerű — stacionaritás

$X^a = \frac{\partial}{\partial \phi}$ térszerű + S^1 orbitok — tengelyszimm

De

$$g_{ab}K^aK^b = \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{R^2} = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta - 2mr + e^2}{R^2}$$

$\Downarrow$

K^a • fényszerű, ha

$$r = \varrho_\pm := m \pm \sqrt{m^2 - e^2 - a^2\cos^2\theta}$$

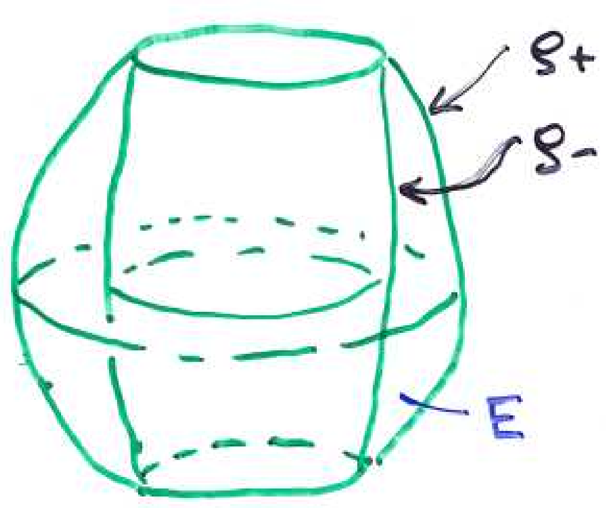
• térszerű az

$E := \{\varrho_- < r < \varrho_+\}$ tartományon (ergoszféra)

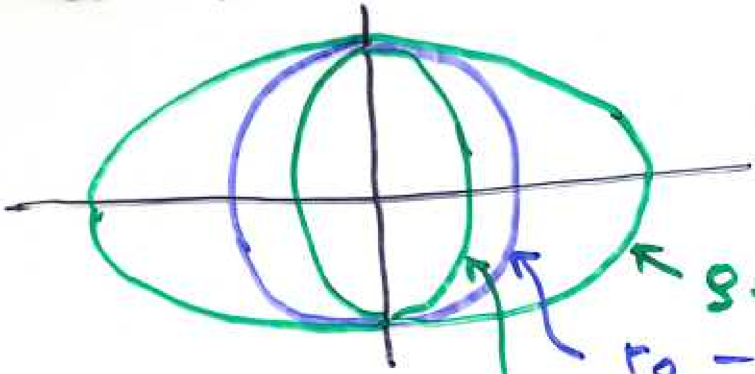
NB.:

$$\varrho_+ \geq m + \sqrt{m^2 - e^2 - a^2} = r_+ \geq$$
$$\geq r_- = m - \sqrt{m^2 - e^2 - a^2} \geq \varrho_-$$

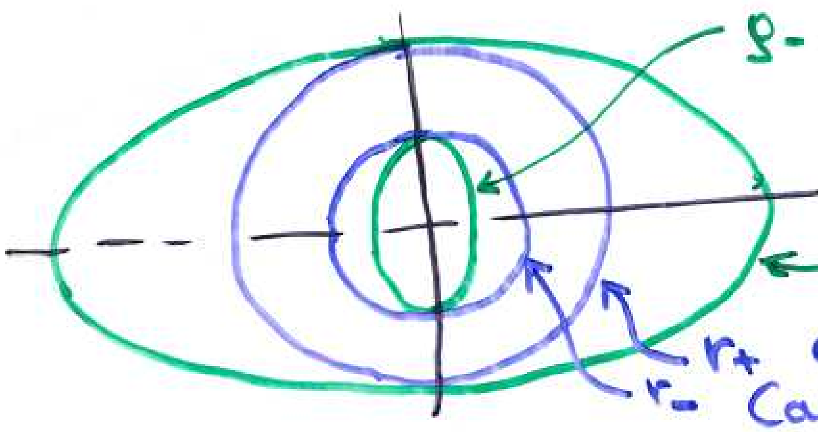
• Példa: Ha $m^2 < e^2 + a^2$ de $m^2 \geq e^2$:



Ha $m^2 = a^2 + e^2$:

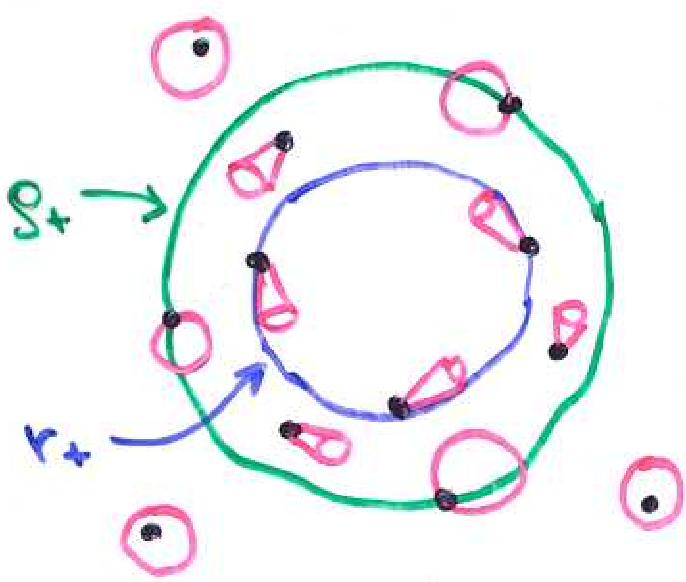


Ha $m^2 > a^2 + e^2$:



NB.: ha $a = 0$, akkor $\rho_\pm = r_\pm$

• „Felülnézet" $(m^2 \geq a^2 + e^2)$:



ρ_+ és r_+ között

$K^a = \frac{\partial}{\partial t}$ térszerű

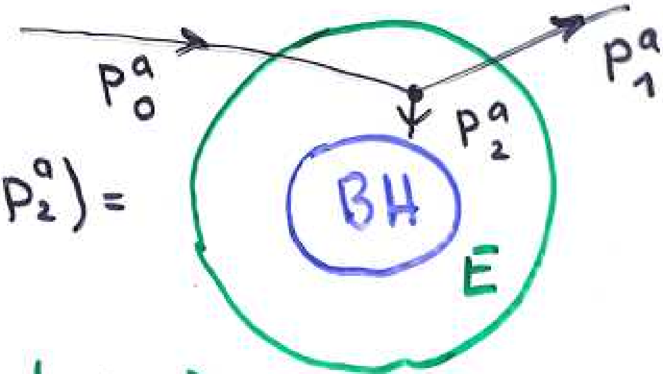
↓

anyagi részecske nem lehet nyugalomban a végtelen távoli megfigyelőhöz képest

• Energiakivonás K-N fekete lyukból

- Penrose procedura:

$$p_0^a = p_1^a + p_2^a$$



$$E_0 := K_a p_0^a = K_a(p_1^a + p_2^a) =$$

$$= E_1 + K_a p_2^a$$

De: K^a térszerű E-ben →

$K_a p_2^a < 0$ elérhető → $E_0 < E_1$

- Térelméleti változat:

skalár, Maxwell, grav. perturbáció szóródása KN fekete lyukon

• A fekete lyukon kívüli tartomány stacionaritása:

A $K^{[a}X^{b]}$ Killing bivektor normája:

$$K^a X^b K_{[a} X_{b]} = -\frac{1}{2} \Delta \sin^2\theta$$

– időszerű $r > r_+$ esetén

↓

Az I tartomány stacionárius:

$$T^a := K^a + \frac{a}{r_+^2 + a^2} X^a$$

időszerű Killing vektor ha $r > r_+$, és null érintője az $r = r_+$ eseményhorizontnak