Stacionárius tengelyszimmetrikus terek – a Kerr-Newman téridő

Fodor Gyula

MTA KFKI Részecske- és Magfizikai Kutatóintézet

Integrálhatóság Nyári Iskola
Budapest, 2008 augusztus 25

Bevezetés

Forgó csillagok külső tere vagy forgó fekete lyukak

Vákuum vagy elektrovákuum téridő

Izolált forrás – aszimptotikus síkság

Fejlődés végállapota: stacionaritás és tengelyszimmetria

Fekete lyuk: egyértelműen Kerr téridő

Csillag külső tere: lehet Kerr, Tomimatsu-Sato, stb...
– Kerr quadrupólmomentuma túl kicsi

Történeti áttekintés

1915 általános relativitáselmélet
1916 Schwarzschild téridő
1916-18 Reissner-Nordström téridő – töltött Schwarzschild
1916 belső Schwarzschild téridő
– összenyomhatatlan folyadék
1931-35 Chandrasekhar-határ
– fehér törpék tömege $< 1.43\,M_\odot$
1939 Tolman-Oppenheimer-Volkoff határ
– neutroncsillagok tömege $<\sim 2\,M_\odot$
1958 Eddington-Finkelstein koorrdináták – eseményhorizont
1962 Newman-Penrose tetrád/spinor formalizmus
1963 Kerr téridő
1965 Kerr-Newman téridő – töltött Kerr
1967 Wheeler bevezeti a „fekete lyuk” kifejezést
1965-70 Hawking-Penrose szingularitás tételek
1967-68 Boyer-Lindquist, Carter – maximális kiterjesztés

Elektrovákum téridő

$3+1$ dimenziós sokaság, g_{ab} metrika, A_a négyes potenciál

térerősség tenzor

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$$

Einstein-egyenletek

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 2 \left(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right)$$

Maxwell-egyenletek

$$\nabla_b F^{ab} = 0$$

Szimmetria-transzformációk

Legyen ϕ_t diffeomorfizmusok egyparaméteres csoportja amelyet egy v^a vektormező generál

Egy T tenzormező Lie deriváltja

$$\mathcal{L}_v T = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\phi^*_{-t} T - T}{t} \right)$$

Ha ϕ_t egyparaméteres izometria csoport, azaz $\phi^*_t g_{ab} = g_{ab}$, akkor v^a Killing vektor

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a = 0$$

Teljesen szimmetrikus tenzor $K_{a_1 \ldots a_n} = K_{(a_1 \ldots a_n)}$ Killing tenzor, ha

$$\nabla_{(b} K_{a_1 \ldots a_n)} = 0$$

Stacionárius téridő

A téridő stacionárius, ha létezik σ_t egyparaméteres izometriacsoport amelynek pályái időszerű görbék

$\Longleftrightarrow$ létezik időszerű Killing vektor ξ^a

sztatikus téridő: ξ^a hiperfelületre merőleges

Az ergoszférán belül az aszimptotikusan időszerű Killing vektor térszerűvé válik

– a horizonton kívül a forgási Killing vektorral vett lineáris kombinációja viszont időszerű marad

– „lokális stacionaritás”

Stacionárius vákuum téridő

Legyen $f = -\xi^a \xi_a$

Bevezetjük a rotáció vektort: $\omega^a = \epsilon^{abcd} \xi_b \xi_{c;d}$
– mivel $\xi_a \omega^a = 0$ ez egy térszerű vektor

A vákuum Einstein-egyenletekből következik, hogy $\omega_{[a,b]} = 0$
$\longrightarrow$ létezik egy ω függvény, hogy $\omega_a = \omega_{,a}$ *(Papapetrou, 1963)*

ekkor definiálható a komplex Ernst-potenciál:

$$\mathcal{E} = f + i\omega$$

A ξ^a stacionárius Killing vektor pályáin indukált $h_{\mu\nu}$ metrika és $\mathcal{E}$ meghatározza a téridő g_{ab} metrikáját

Stacionárius elektrovákuum

Bevezetjük a komplex önadjungált térerősségtenzort

$$F^*_{ab} = F_{ab} + i\tilde{F}_{ab} \quad , \quad \tilde{F}_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}$$

Ha $\mathcal{L}_\xi F_{ab} = 0$, definiálhatunk egy komplex Φ potenciált

$$\xi^a F^*_{ab} = \Phi_{,b}$$

az Ernst-potenciál ekkor a következőképpen definiálható *(Harrison, Ernst, 1968)*

$$\mathcal{E}_{,a} = f_{,a} + i\omega_a - 2\bar{\Phi}\Phi_{,a}$$

Stacionárius elektrovákuum téregyenletek

A stacionárius Killing vektor pályáin definiálunk egy konform transzformált indukált metrikát

$$h_{ab} = f g_{ab} + \xi_a \xi_b \quad \longrightarrow \quad \gamma_{ab}\xi^b = 0$$

az ehhez tartozó kovariáns deriváltakat és görbületi tenzort használjuk a téregyenletek felírására
(Harrison, 1968, Neugebauer, Kramer, 1969)

$$\begin{aligned} f\,\Delta\mathcal{E} &= \left(\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi\right)\cdot\nabla\mathcal{E} \\ f\,\Delta\Phi &= \left(\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi\right)\cdot\nabla\Phi \\ R_{ab} &= \frac{1}{2f^2}\left(\mathcal{E}_{,(a} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,(a}\right)\left(\bar{\mathcal{E}}_{,b)} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,b)}\right) + \frac{2}{f}\Phi_{,(a}\bar{\Phi}_{,b)} \end{aligned}$$

ahol $f = \mathrm{Re}\,\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi}$

itt a változók h_{ik} , $\mathcal{E}$ és Φ

Tengelyszimmetrikus téridő

A téridő tengelyszimmetrikus, ha

- létezik χ_ϕ egyparaméteres izometriacsoport amelynek pályái zárt térszerű görbék
- léteznek fixpontjai χ_ϕ-nek – szimmetriatengely

A szimmetriát ψ^a térszerű Killing vektor generálja

Aszimptotikus síkság esetén a tengely létezése garantált

Stacionárius és tengelyszimmetrikus téridő

Ha a téridő stacionárius és tengelyszimmetrikus, belátható, hogy választható σ_t és χ_ϕ úgy, hogy hatásuk felcserélhető:
$\sigma_t \circ \chi_\phi = \chi_\phi \circ \sigma_t$ *(Carter, 1970, Szabados, 1987)*

Killing vektorok kommutálnak $[\xi, \psi] = 0$

Választhatunk illesztett koordinátákat, $x^a = (t, \phi, x^2, x^3)$

$$\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \quad , \quad \psi^a = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a$$

hogy a g_{ab} komponensek ne függjenek t-től és ϕ-től

Tétel: Elektrovákuum téridőben a ξ^a-ra és ψ^a-ra merőleges kétdimenziós síkok integrálhatóak (egy felületsereg érintői) *(Papapetrou, 1966, Kundt, Trümper, 1966)*

Bizonyítás: Frobenius tétel alkalmazása

Stacionárius és tengelyszimmetrikus tér metrikája

$x^a = (t, \phi, x^2, x^3)$ *(Lewis, 1932, Papapetrou, 1953)*

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -f & W & 0 & 0 \\ W & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f}h_{22} & \frac{1}{f}h_{23} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f}h_{23} & \frac{1}{f}h_{33} \end{pmatrix}$$

ahol f, W, X, h_{22}, h_{23} és h_{33} csak x^2 és x^3-tól függenek

$t \to -t \qquad \phi \to -\phi$ invariancia

X helyett vezessük be a ρ függvényt:

$$\rho^2 = fX + W^2 \quad \longrightarrow \quad X = \frac{1}{f}(\rho^2 - W^2)$$

legyen $x^2 = \rho$
legyen $x^3 \equiv z$ a konstans ρ vonalakra merőleges koordináta
$z \to \tilde{z} = f(z)$ szabadság marad

Weyl kanonikus koordináták

új függvény: W helyett $\omega = W/f$

$$ds^2 = -f\,(dt - \omega\, d\phi)^2 + \frac{1}{f}\left[\rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + \Lambda dz^2\right)\right]$$

ahol f, ω, γ és Λ a ρ és z koordináták függvénye

Elektrovákuum téridőben, $T_a{}^a = 0$ miatt $\frac{\partial\Lambda}{\partial\rho} = 0$
$\longrightarrow$ z átskálázható hogy $\Lambda = 1$ legyen

Weyl kanonikus koordináták:

$$ds^2 = -f\,(dt - \omega\, d\phi)^2 + \frac{1}{f}\left[\rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + dz^2\right)\right]$$

Stacionárius és tengelyszimmetrikus téregyenletek

$$ds^2 = -f\,(dt - \omega\, d\phi)^2 + \frac{1}{f}\left[\rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + dz^2\right)\right]$$

a stacionárius Killing pályákon indukált konform metrika

$$h_{ij} = fg_{ij} + \xi_i \xi_j = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\gamma} \end{pmatrix}$$

az Ernst egyenletekből kiesik a γ függvény

$$\begin{aligned} (\mathrm{Re}\,\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi})\Delta\mathcal{E} &= \left(\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi\right)\cdot\nabla\mathcal{E} \\ (\mathrm{Re}\,\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi})\Delta\Phi &= \left(\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi\right)\cdot\nabla\Phi \end{aligned}$$

sík háttéren felírt egyenletként értelmezhetők

vákuum esetén: $\mathrm{Re}\,\mathcal{E}\Delta\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E}\cdot\nabla\mathcal{E}$ *(Ernst,1968)*

Kerr-Newman téridő (1963, 1965)

Boyer-Lindquist koordináták: (t, ϕ, r, θ)

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{2a \sin^2\theta \left(r^2 + a^2 - \Delta\right)}{\Sigma}\, dt\, d\phi \\
&\quad + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right] \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\
A &= -\frac{Qr}{\Sigma}\left(dt - a \sin^2\theta\, d\phi\right) + \frac{P\cos\theta}{\Sigma}\left[a\, dt - (r^2 + a^2) d\phi\right]
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2\theta \\
\Delta &= r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr
\end{aligned}
$$

konstansok: M, a és $e = \sqrt{Q^2 + P^2}$

Boyer-Lindquist koordináták: (t, ϕ, r, θ)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{\Sigma}\left[dt - a\sin^2\theta d\phi\right]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[(r^2+a^2)d\phi - adt\right]^2 \\ &\quad + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ A &= -\frac{Qr}{\Sigma}\left(dt - a\sin^2\theta\, d\phi\right) + \frac{P\cos\theta}{\Sigma}\left[a\,dt - (r^2+a^2)d\phi\right] \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta &= r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr \end{aligned}$$

konstansok: M, a és $e = \sqrt{Q^2+P^2}$

A Kerr-Newman téridő Ernst potenciálja (P=0)

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{2M}{r - ia\cos\theta} \quad , \quad \Phi = \frac{e}{r - ia\cos\theta}$$

áttérés (r, θ) Boyer-Lindquist koordinátákról (ρ, z) hengerkordinátákra

$$\rho = \sqrt{\Delta}\,\sin\theta \quad , \quad z = (r - m)\cos\theta$$

ahol $\Delta = r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr$

A Kerr téridő Ernst potenciálja

Bevezetünk egy transzformált Ernst potenciált

$$\xi = \frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}$$

ekkor a Kerr téridőre *(Ernst, 1968)*

$$\xi = \frac{1}{px - iqy} \ , \quad p^2 + q^2 = 1 \ , \quad a = Mq$$

Az áttérés (x, y) lapult szferoidális kordinátákról (ρ, z) hengerkoordinátákra

$$\rho^2 = \sigma^2(x^2-1)(1-y^2) \ , \quad z = xy$$

ahol σ egy konstans (Kerr esetén $\sigma = Mp$)

Tomimatsu-Sato téridők *(1972)*

Ernst-potenciál tört-polinom alakú lapult szferoidális kordinátákban

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha}$$

paraméterek: $p^2 + q^2 = 1$ és δ pozitív egész

$\delta = 1$: $\alpha = px - iqy$, $\beta = 1$ (Kerr)

$\delta = 2$:

$$\begin{aligned}\alpha &= p^2(x^4 - 1) - 2ipqxy(x^2 - y^2) + q^2(y^4 - 1)\\ \beta &= 2px(x^2 - 1) - 2iqy(1 - y^2)\end{aligned}$$

$\delta = 3$: ...

Tetrádok

Ortonormált tetrád

$$\{\mathbf{E}_a\} = \{\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{t}\} \;\;,\quad \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \;\;,\quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = -1 \;\;,\quad \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{t} = 0$$

Komplex null-tetrád *(Newman-Penrose,1962)*

$$\{\mathbf{e}_a\} = (\mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}, \mathbf{l}, \mathbf{k}) \;\;,\quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1 \;\;,\quad \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 1 \;\;,\quad \text{többi } 0$$

kapcsolat

$$\sqrt{2}\,\mathbf{m} = \mathbf{E}_1 - i\,\mathbf{E}_2 \;\;,\quad \sqrt{2}\,\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{E}_1 + i\,\mathbf{E}_2$$
$$\sqrt{2}\,\mathbf{l} = \mathbf{E}_4 - \mathbf{E}_3 \;\;,\qquad \sqrt{2}\,\mathbf{k} = \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_3$$

A görbületi tenzor felbontása

$$R_{abcd} = C_{abcd} + E_{abcd} + G_{abcd}$$

ahol

$$\begin{aligned} E_{abcd} &= \frac{1}{2}\left(g_{ac}S_{bd} + g_{bd}S_{ac} - g_{ad}S_{bc} - g_{bc}S_{ad}\right) \\ G_{abcd} &= \frac{1}{12}R\left(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}\right) \\ S_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} \end{aligned}$$

C_{abcd} Weyl tenzor, spurmentes: $C^{a}{}_{bad} = 0$

A Weyl tenzor komplex null-tetrád komponensei

$$\Psi_0 = C_{abcd} k^a m^b k^c m^d \quad , \quad \Psi_3 = C_{abcd} k^a l^b \bar{m}^c l^d$$
$$\Psi_1 = C_{abcd} k^a l^b k^c m^d \quad , \quad \Psi_4 = C_{abcd} \bar{m}^a l^b \bar{m}^c l^d$$
$$\Psi_2 = C_{abcd} k^a m^b \bar{m}^c l^d$$

Ψ_0 változása **l** vektor körüli komplex null-forgatásokra

$$\Psi_0' = \Psi_0 + 4E\Psi_1 + 6E^2\psi_2 + 4E^3\Psi_3 + E^4\Psi_4$$

ahol az E komplex szám megválasztásával **k** az **l** vektoron kívül bármely valós null-vektorba átvihető

A Petrov osztályozás

A Wely tenzor **k** principális null-irányait keressük
(Petrov, 1954, Penrose, 1960)

$$k_{[e}C_{a]bc[d}k_{f]}k^bk^c = 0 \iff \Psi_0 \equiv C_{abcd}k^am^bk^cm^d = 0$$

ez egy **l** körüli komplex null-forgatással érhető el

$$\Psi_0 + 4E\Psi_1 + 6E^2\psi_2 + 4E^3\Psi_3 + E^4\Psi_4 = 0$$

a negyedfokú egyenlet többszörös gyökei többszörös sajátirányoknak felelnek meg

A többszörös gyökök száma szerint kerülnek különböző Petrov osztályokba a téridők

Algebrailag speciális téridők

Ha van többszörös sajátirány, akkor a téridő algebrailag speciális

$$\begin{array}{ll} (1,1,1,1) & \textit{Petrov} \;\; I \\ (2,2) & \textit{Petrov} \;\; D \\ (2,1,1) & \textit{Petrov} \;\; II \\ (3,1) & \textit{Petrov} \;\; III \\ (4) & \textit{Petrov} \;\; N \end{array}$$

A Kerr-Newman téridő Petrov D osztályú

Ismert az általános Petrov D Einstein-Maxwell megoldás kozmológiai konstanssal *(Debever, Garcia,* 1982 – 84*)*

a kozmológiai konstanson kívül 6 paraméter (tömeg, NUT, forgás, gyorsulás, elektromos és mágneses töltés)

A Kerr-Newman téridő principális null-irányai

két ismételt sajátirány $\longrightarrow$ Petrov D

$$
\begin{aligned}
l^a &= \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{a}{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \\
n^a &= \frac{r^2+a^2}{2\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{a}{2\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a - \frac{\Delta}{2\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta \\
\Delta &= r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr
\end{aligned}
$$

Killing tenzor: $K_{ab} = 2\Sigma l_{(a}n_{b)} + r^2 g_{ab} \quad , \quad \nabla_{(a}K_{bc)} = 0$

A Kerr-Newman metrika Kerr-Schild alakja

$g_{ab} = \eta_{ab} - 2Sk_a k_b$ ahol η_{ab} sík és $\eta_{ab}k^a k^b = g_{ab}k^a k^b = 0$

a metrika:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2Mr^3 - e^2 r^2}{r^4 + a^2 z^2}\Bigg[dt + \frac{z}{r}dz \\ &\quad + \frac{r}{r^2+a^2}(xdx + ydy) - \frac{a}{r^2+a^2}(xdy - ydx)\Bigg]^2 \end{aligned}$$

a térerősség tenzor

$$(F_{xt} - iF_{yz}, F_{yt} - iF_{zx}, F_{zt} - iF_{xy}) = \frac{er^3}{(r^2 + iaz)^3}(x, y, z + ia)$$

ahol

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

A Kerr metrika aszimptotikus alakja

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2M}{r}(dt^2 + dr^2) \\ &\quad - \frac{4Ma}{r^3}(xdy - ydx)dt + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

ahool $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

- M a tömeg
- $\mathbf{J} = (0, 0, Ma)$ az impulzusmomentum vektor

Paraméterek a Kerr-Newman metrikában

ξ^a stacionárius és ψ_a forgási Killing vektor

válasszunk egy távoli S gömbfelületet

$\frac{1}{2}\int_S \epsilon_{abcd} F^{cd} = 4\pi e$	elektromos töltés
$-\frac{1}{8\pi}\int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d = M$	tömeg
$\frac{1}{16\pi}\int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d = Ma$	impulzusmomentum

Aszimptotikusan sík téridők

A ξ^a stacionárius Killing vektor pályái definiálnak egy $\mathcal{M}$ háromdimenziós sokaságot, és rajta egy konform transzformált indukált metrikát, $h_{ab} = fg_{ab} + \xi_a \xi_b$

$(\mathcal{M}, h_{ik})$ sokaság aszimptotikusan sík, ha létezik $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{h}_{ik})$

1. $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \Lambda$, ahol Λ a térbeli végtelennek megfelelő pont
2. $\tilde{h}_{ik} = \Omega^2 h_{ik}$, ahol Ω C^2 függvény $\tilde{\mathcal{M}}$-n
3. Ω-ra teljesül, hogy

$$\Omega|_\Lambda = 0, \quad \tilde{D}_i \Omega|_\Lambda = 0,$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}_k \Omega|_\Lambda = 2\tilde{h}_{ik}|_\Lambda,$$

ahol $\tilde{D}_i$ a $\tilde{h}_{ik}$-hoz tartozó deriváló operátor

(Penrose, 1965, Geroch, 1970)

Multipólus-momentumok

Ernst potenciálok konform transzformációja

$$\xi = \frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}\,, \quad \tilde{\xi} = \Omega^{-1/2}\xi \,, \quad q = \Phi(1+\xi)\,, \quad \tilde{q} = \Omega^{-1/2} q$$

Definiáljuk az alábbi tenzormezőket az $\tilde{\mathcal{M}}$ sokaságon *(Geroch 1970, Hansen 1974)*

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= \tilde{\xi} \quad \text{vagy} \quad \tilde{q} \\ P^{(1)}_i &= \tilde{D}_i P^{(0)} \\ &\vdots \\ P^{(n+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} &= \mathcal{C}\left[\tilde{D}_{i_{n+1}} P^{(n)}_{i_1 \ldots i_n} - \frac{1}{2} n(2n-1) \tilde{R}_{i_1 i_2} P^{(n-1)}_{i_3 \ldots i_{n+1}}\right] \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{C}$ a szimmetrikus spurmentes rész képzését jelenti,
$\tilde{D}_i$ a $\tilde{h}_{ik}$-nak megfelelő kovariáns deriválás,
$\tilde{R}_{ij}$ a $\tilde{h}_{ik}$-hoz tartozó Ricci-tenzor.

Multipólus-momentumok (2)

A multipólus-momentum tenzorok a $P^{(n)}_{i_1 \dots i_n}$ tenzormezőknek a Λ pontban felvett értékei

$$M^{(n)}_{i_1 \dots i_n} = P^{(n)}_{i_1 \dots i_n} \big|_\Lambda$$

valós rész tömeg, képzetes rész forgási momentumok

Tengelyszimmetrikus tér esetén legyen n^a a tengely irányú egységvektor a Λ pontban $\longrightarrow$ a momentumtenzorok konstans szorzótól eltekintve $\mathcal{C}\left[n^{i_1} \dots n^{i_n}\right] \big|_\Lambda$ alakúak

Skalár momentumok

$$P_n = \frac{1}{n!} M^{(n)}_{i_1 \dots i_n} n^{i_1} \dots n^{i_n}$$

Kerr-Newman téridő: $P_n = M(ia)^n \quad , \quad Q_n = e(ia)^n$

Unicitás tételek

Stacionárius fekete lyuk horizontja S^2 topológiájú
(Hawking, 1972, Hawking, Ellis 1973, Chrusciel, Wald, 1994)

stacionárius (elektro)vákuum téridő:
ha van ergoszféra akkor tengelyszimmetrikus
ha nincs ergoszféra akkor sztatikus
(Lichnerovitz, 1955, Hawking, Ellis 1973, Hajicek, 1973 Müller zum Hagen, 1970, Carter, 1973)

sztatikus vákuum: Schwarzschild téridő *(Israel, 1967, Müller zum Hagen, Robinson, Seifert, 1973, Robinson, 1977)*

sztatikus elektrovákuum: Reissner-Nordström *(Israel, 1968)*

tengelyszimmetrikus stacionárius (elektro)vákuum:
Kerr-Newman téridő
(Carter, 1971, Robinson 1975, Mazur, 1982, Bunting)