A HUBBARD MODELL BETHE ANSATZ EGYENLETEI (LIEB–WU EGYENLETEK)

$N_e \leq N$ részecske $N_e - M$: # ↑ sp. M: # ↓ sp.

$$N k_j + \sum_{\alpha=1}^{M} 2\tan^{-1} \frac{\sin k_j - \lambda_\alpha}{U/4} = 2\pi I_j \qquad j = 1, 2, \dots N_e$$

$$I_j = \frac{M}{2} \pmod 1$$

$$\sum_{j=1}^{N_e} 2\tan^{-1} \frac{\lambda_\alpha - \sin k_j}{U/4} - \sum_{\beta=1}^{M} 2\tan^{-1} \frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}{U/2} = 2\pi J_\alpha$$

$$\alpha = 1, 2 \dots M, \quad J_\alpha = \frac{N_e + M + 1}{2} \pmod 1$$

Megoldás: $\{ k_j,\ j = 1, 2 \dots N_e;\ \lambda_\alpha,\ \alpha = 1, 2 \dots M \}$
csak az jó ha $k_j \neq k_i$ ha $j \neq i$ és $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ ha $\alpha \neq \beta$

$$E = -\sum_{j=1}^{N_e} 2\cos k_j \qquad P = \sum_{j=1}^{N} k_j$$

AZ EGYENLETEK "SZIMMETRIÁI"

1. Ha $\{k_j, \lambda_\alpha\}$ megoldás U mellett
akkor $\{\pi - k_j, \lambda_\alpha\}$ megoldás $-U$ mellett
(más I_j és J_α kvantumszámokkal!)

$$E = -\sum_j 2\cos k_j \qquad \bar{E} = -\sum_j 2\cos(\pi - k_j) = -E$$

Ha E kicsi $\bar{E}$ nagy

U-s spektrum alja ⟷ $-U$-s sp. teteje
és fordítva

2. A k_j-k egyenlete adott $\{\lambda_\alpha\}$ mellett egyismeretlenes, polinom alakba írható:

$$P(x)=0$$

$$P(x)=x^N\prod_{\alpha=1}^{M}\left(x^2-2i(\lambda_\alpha+iU/4)x-1\right)-$$

$$-\prod_{\alpha=1}^{M}\left(x^2-2i(\lambda_\alpha-iU/4)x-1\right) \qquad x=e^{ik}$$

$N+2M$ gyök, pont ennyi nem egyiv. k!

N_e db $k\in\{k_j\}$ a maradék

$N+2M-N_e$ $k\in\{k_g\}$

Ha $\{k_j,\lambda_\alpha\}$ megoldás akkor

$\{k_g,\lambda_\alpha\}$ is megoldás

Biz: Az első egyenlet teljesül. A második log. alakban

$$\sum_j \frac{1}{i}\ln\frac{x_j^2-2i(\lambda_\alpha-iU/4)x_j-1}{x_j^2-2i(\lambda_\alpha+iU/4)x_j-1}-\sum_\alpha\frac{1}{i}\ln\frac{\lambda_\alpha-\lambda_\beta-iU/2}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta+iU/2}=\pi \pmod{2\pi}$$

$$\oint_C \frac{1}{i}\ln\frac{x^2-2i(\lambda_\alpha-iU/4)x-1}{x^2-2i(\lambda_\alpha+iU/4)x-1}\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d\ln P(x)}{dx}\right)dx$$

C körülveszi az $x_j=e^{ik_j}$ gyököket.

kontúrdeformáció: $x_g=e^{ik_g}$ gyökök járuléka + a vágásoké. Eredmény:

$$-\sum_g\frac{1}{i}\ln\frac{x_g^2-2i(\lambda_\alpha-iU/4)-1}{x_g^2-2i(\lambda_\alpha+iU/4)-1}+\sum_\alpha\frac{1}{i}\ln\frac{\lambda_\alpha-\lambda_\beta-iU/2}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta+iU/2}=\pi$$

$$E+\bar{E} = -\sum_j 2\cos k_j - \sum_g 2\cos k_j = -\sum_{j+g} x - \sum_{j+g} \frac{1}{x}$$

$-\sum x$: $P(x)$ $N+2M-1$-ed rendű tagja együtthatója

$-\sum \frac{1}{x}$: $P(x)$ első — " — — " — — " —

$$E+\bar{E} = MU$$

$$P+\bar{P} = \sum_j k_j + \sum_g k_g = \frac{1}{i} \ln \prod_{j+g} x$$

$\prod x$: $(-1)^{N+2M} \cdot P(x)$ 0-ad rendű tagja

$$P+\bar{P} = \pi(N+M+1) \pmod{2\pi}$$

E : spekrum alja $\longrightarrow$ $\bar{E}$: spekrum teteje

KÖVETKEZMÉNY:

Ha $E(\{k_j\})$ u mellett a spektrum alján van, akkor

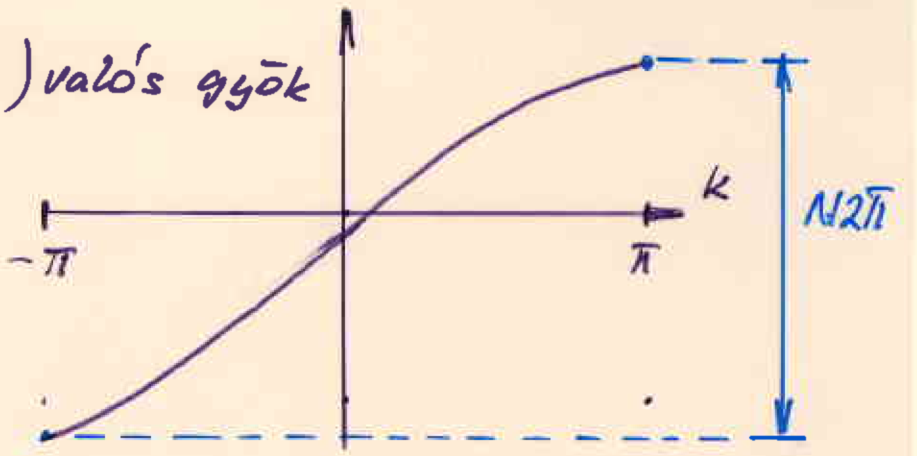
$E(\{k_g\})$ u mellett a spektrum tetején van, és

$E(\{\pi-k_g\})$ $-u$ mellett a spektrum alja

KOMPLEMENTER k KÉSZLETEK SZERKEZETE
(makroszkópikus N mellett)

$$Nk + \sum_{\alpha=1}^{M} 2\tan^{-1}\frac{\sin k - \lambda_\alpha}{U/4} = \pi M \pmod{2\pi}$$

N (nem equivalens) valós gyök



$\Longrightarrow$ 2M db gyök <u>komplex</u>

$$e^{ikN} = \prod_\alpha \frac{\sin k - \lambda_\alpha + iU/4}{\sin k - \lambda_\alpha - iU/4}$$

$\mathrm{Im}\,k > 0$ $\quad \underbrace{e^{-(\mathrm{Im}\,k)N}}_{\sim 0} \cdot e^{i\mathrm{Re}\,k N} = \ldots\ldots$

(Ha N makr.) $\Longrightarrow$ valamelyik kényező ~ 0 azaz

$$\sin k^- = \lambda_\alpha - iU/4 + O(e^{-\alpha N})$$

$\mathrm{Im}\,k < 0$ $\Longrightarrow$ $\sin k^+ = \lambda_\alpha + iU/4 + O(e^{-\alpha' N})$

A 2M komplex gyök:

$$k_\alpha^\pm = \arcsin(\lambda_\alpha \pm iU/4)$$
$$\mp \mathrm{Im}\,k > 0$$

Általában: k_j és k_g valós k-kból és komplex k párokból állnak.

Bizonyítás:

$$\sum_l 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\sin k_l}{U/4}+\sum_n 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\sin k_n^+}{U/4}+$$

$$+\sum_n 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\sin k_n^-}{U/4}$$

$$-\sum_\beta 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}{U/2}-\sum_n 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\Lambda_n}{U/2}=2\pi J_\alpha$$

$$\sin k_n^\pm=\Lambda_n\pm iU/4$$

$$2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\Lambda_n-iU/4}{U/4}+2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\Lambda_n+iU/4}{U/4}=$$

$$=2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\Lambda_n}{U/2}+\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_l 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\sin k_l}{U/4}-\sum_\beta 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}{U/2}=2\pi J_\alpha'$$

Az equivalens komplementer egyenletrendszerben ugyanezzel a trükkel a $k_\alpha^\pm$ tüntethető el, tehát:

$$\sum_n 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n-\sin k_n}{U/4}-\sum_m 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n-\Lambda_m}{U/2}=2\pi J_n'$$

q.e.d.

Jelölések:

k_l: valós gyök $\in k_j$

k_h: valós gyök $\in k_g$

A teljes λ készlet: 2 részhalmaz

$$\Lambda_n: \quad k_n^{\pm} = \sin^{-1}(\Lambda_n \pm iU/4) \in k_j$$

$$\lambda_\alpha: \quad k_\alpha^{\pm} = \sin^{-1}(\lambda_\alpha \pm iU/4) \in k_g$$

A komplementer megoldások:

$$\{k_l, k_n^{\pm}; \lambda_\alpha, \Lambda_n\} \text{ és } \{k_h, k_\alpha^{\pm}; \lambda_\alpha, \Lambda_n\}$$

Állítás:

$$N k_{l(h)} + \sum_\alpha 2\tan^{-1}\frac{\sin k_{l(h)} - \lambda_\alpha}{U/4} + \sum_n 2\tan^{-1}\frac{\sin k_{l(h)} - \Lambda_n}{U/4} = 2\pi I_{l(h)}$$

$$\sum_l 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha - \sin k_l}{U/4} - \sum_\beta 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}{U/2} = 2\pi J_\alpha$$

$$\sum_h 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n - \sin k_h}{U/4} - \sum_m 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n - \Lambda_m}{U/2} = 2\pi J_n$$

Csak valós hullámszámok!

λ-k és Λ egyenlete szeparálódik!

KOMPLEMENTER ÁLLAPOTOK SPINJE ÉS IZOSPINJE

$\{k_l, k_n^{\pm}, \lambda_\alpha \Lambda_n\}$ $\qquad$ $\{k_h, k_\alpha^{\pm}, \lambda_\alpha, \Lambda_n\}$

k_l-ek # $n(l)$ $\qquad$ k_h-k # $n(h)$

$$n(l) = N - n(h)$$

λ_α-k # $n(\lambda)$

Λ_n-ek # $n(\Lambda)$

$N_e = n(l) + 2n(\Lambda)$ $\qquad$ $\bar{N}_e = n(h) + 2n(\Lambda)$

$M = \bar{M} = n(\lambda) + n(\Lambda)$

$S^z = \frac{N_e}{2} - M = \frac{n(l)}{2} - n(\lambda)$ $\qquad$ $\bar{S}^z = \frac{n(h)}{2} - n(\Lambda)$

$C^z = \frac{N}{2} - \frac{N_e}{2} = \frac{n(h)}{2} - n(\Lambda)$ $\qquad$ $\bar{C}^z = \frac{n(l)}{2} - n(\lambda)$

GYANU: A két állapotot a spin–töltés transzformáció köti össze

erősíti a gyanút: $E + \bar{E} = MU$

bizonyítja: a hullámfüggvény

($\{k_l, \lambda_\alpha\}$ a kompenzálatlan spinek, a $\{k_h, \Lambda_n\}$ az üres és duplán betöltött helyek eloszlásával hozható kapcsolatba

A komplementer állapotban ez fordítva van.)

AZ $U>0$ ALAPÁLLAPOT:

feltevés: az összes k valós
(komplex $k \to$ duplán betöltött hely: energiaköltséges)

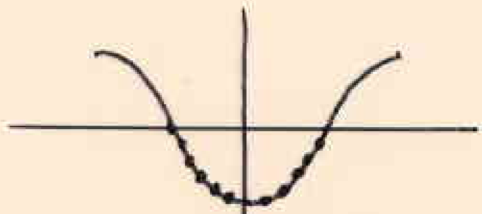
$$k_l + \frac{1}{N}\sum_\alpha 2\tan^{-1}\frac{\sin k_l - \lambda_\alpha}{U/4} = \frac{2\pi}{N}\cdot I_l$$

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_l 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha - \sin k_l}{U/4} - \frac{1}{N}\cdot\sum_\beta 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}{U/2} = \frac{2\pi}{N} J_\alpha$$

feltevés: mind $\{I_l\}$ mind $\{J_\alpha\}$ egymást követő, a 0-ra szimmetrikusan elhelyezett egészek vagy félegészek halmaza.

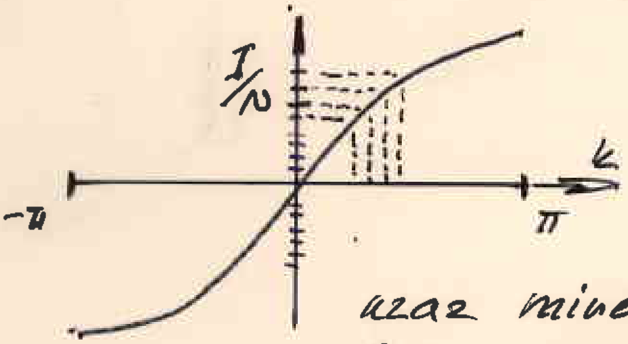
kvázi indok:

$$E = -\sum 2\cos k_l$$



k-k az origó körül sűrűsödjenek
(I_l-ek az origó körül)

$$z(k) = \left\{k + \frac{1}{N}\cdot\sum 2\tan^{-1}\frac{\sin k - \lambda_\alpha}{U/4}\right\}\frac{1}{2\pi} \qquad z(k_l) = \frac{I_l}{N}$$



A k-k annál jobban sűrűsödnek az origó körül, minél meredekebb ott a z azaz minél sűrűbben vannak a λ-k a 0 körül: J_α-k az origó körül.

SŰRŰSÉGEK

$$z(k) = \frac{1}{2\pi}\left\{k + \frac{1}{N}\cdot\sum_\alpha 2\tan^{-1}\frac{\sin k - \lambda_\alpha}{u/4}\right\}$$

$$z(k_l) = \frac{I_l}{N}$$

$$s(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{N}\cdot\sum_l 2\tan^{-1}\frac{\lambda - \sin k_l}{u/4} - \frac{1}{N}\cdot\sum_\beta 2\tan^{-1}\frac{\lambda-\lambda_\beta}{u/2}\right\}$$

$$s(\lambda_\alpha) = \frac{J_\alpha}{N}$$

TERMODINAMIKAI LIMESZ: $N \gg 1$

$$k_{l+1} - k_l \sim O(1/N) \qquad \lambda_{\alpha+1} - \lambda_\alpha \sim O(1/N)$$

$$\# k_l : k < k_l < k + dk = N\rho(k)\,dk \qquad \rho(k) = \frac{dz}{dk}$$

$$\# \lambda_\alpha : \lambda < \lambda_\alpha < \lambda + d\lambda = N\sigma(\lambda)\,d\lambda \qquad \sigma(\lambda) = \frac{ds(\lambda)}{d\lambda}$$

$$\frac{1}{N}\sum f(k_l) \longrightarrow \int f(k)\rho(k)\,dk$$

$$\frac{1}{N}\sum g(\lambda) \longrightarrow \int g(\lambda)\sigma(\lambda)\,d\lambda$$

$$\rho(k) = \frac{1}{2\pi} + \cos k \int_{-B}^{B} K_1(\sin k - \lambda)\sigma(\lambda)\,d\lambda$$

$$\sigma(\lambda) = \int_{-Q}^{Q} K_1(\lambda - \sin k)\rho(k)\,dk - \int_{-B}^{B} K_2(\lambda - \lambda')\sigma(\lambda')\,d\lambda'$$

$$K_n(x) = \frac{2n(u/4)}{(n u/4)^2 + x^2} \qquad \int_{-Q}^{Q}\rho(k) = \frac{N_e}{N} \qquad \int_{-B}^{B}\sigma(\lambda) = \frac{M}{N}$$

HATÁROK:

A ϱ és σ egyenleteket integrálva

$$\int_B^\infty \sigma(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2}\frac{N_e}{N} - \frac{M}{N} = \frac{S^z}{N}$$ alapállapot $S^z = 0$

$$\int_{-Q}^{Q} \varrho(k) = \frac{N_e}{N} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \varrho(k) = 1$$

A TOVÁBBIAKBAN

$B: \infty$-t vesszük: $S^z = 0$

$Q = \pi$-t — " — $N_e = N$ (félig töltött)

Ez analitikusan is kezelhető:

MEGOLDÁS:

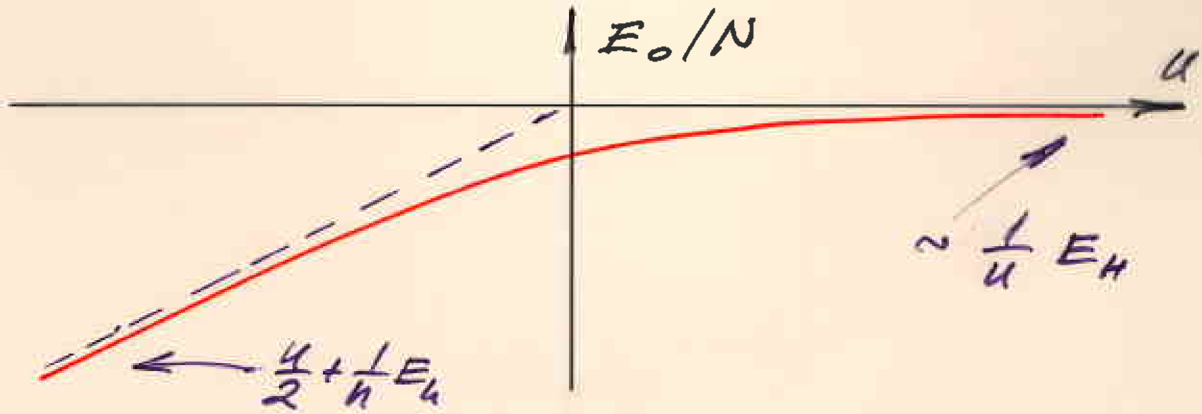
$$\varrho_0(k) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\cos k \int_0^\infty \frac{e^{-\omega U/4}}{\mathrm{ch}\,\frac{\omega U}{4}}\, \mathcal{J}_0(\omega)\cos(\omega \sin k)\, d\omega$$

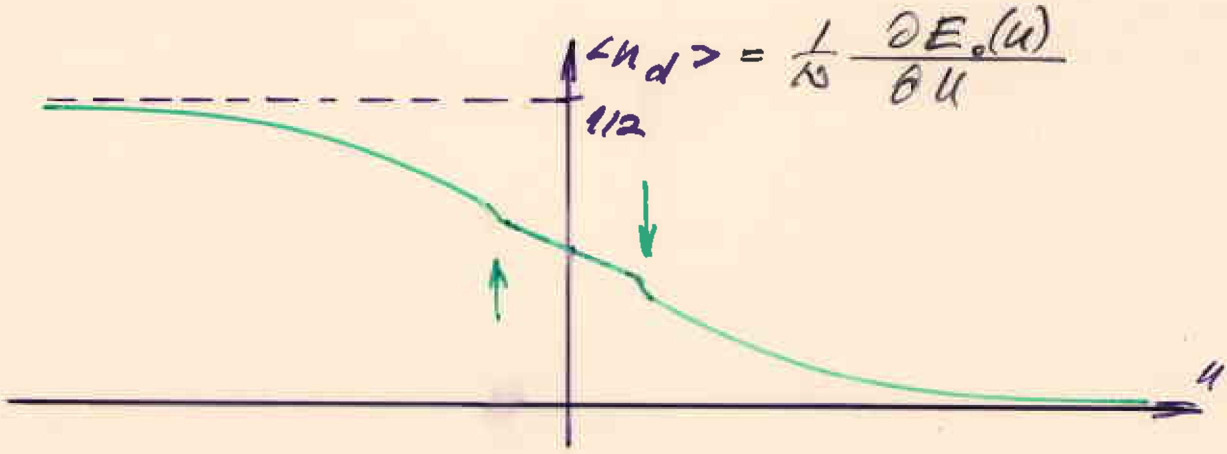
$$\sigma_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathcal{J}_0(\omega)\cos\omega\lambda}{\mathrm{ch}\,\frac{\omega U}{4}}\, d\omega$$

$$E = -\sum 2\cos k = -N\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\, \varrho(k) =$$

$$= -2N\int_0^\infty \frac{e^{-\omega U/4}\,\mathcal{J}_0(\omega)\,\mathcal{J}_1(\omega)}{\omega\,\mathrm{ch}\,\frac{\omega U}{4}}\, d\omega$$

Ha $U<0$ $\quad E_0(U<0) = E_d(|U|) - |U|N/2$





MEGJEGYZÉS: AZ E_0 MINDEN DERIVÁLTJA FOLYTONOS AZ $U=0$-BAN, DE A TAYLOR SOR <u>NEM</u> KONVERGENS.

PERTURBÁCIÓ SZÁMÍTÁS?

GERJESZTETT ÁLLAPOTOK:

Lehetőségek: lyukak a k_j sorozatban: k_h

komplex k párok $k_h^{\pm} = \sin^{-1}(\Lambda_h \pm iU/4)$

lyukak a λ_α sorban: λ_ξ

komplex λ-k

1) Minden paraméter egyenlettel meghatározott!
pl: ha az I_j sorozatban hiányzik az I_h:

akkor

$$k_h + \frac{1}{N} \cdot \sum_\alpha 2\tan^{-1}\frac{\sin k_h - \lambda_\alpha}{U/4} + \frac{1}{N}\sum_h 2\tan^{-1}\frac{\sin k_h - \Lambda_h}{U/4} = \frac{2\pi I_h}{N}$$

2) $$\frac{1}{N} \cdot \sum_j f(k_j) = \int_{-\pi}^{\pi} f(k)\rho(k)\,dk - \frac{1}{N} \cdot \sum_h f(k_h)$$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_\alpha g(\lambda_\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\sigma(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{N} \cdot \sum_\xi g(\lambda_\xi)$$

3) A $\rho(k)$ és $\sigma(\lambda)$ egyenletében a gerjesztéseknek megfelelő, $1/N$-nel arányos inhom. tagok $\Longrightarrow$

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{N}(\text{gerj.}) \qquad \sigma = \sigma_0 + \frac{1}{N}(\text{gerj.})$$

4) A gerjesztések $(k_h, \lambda_\xi, \ldots)$ egyenleteiből a valós k_j-k és λ_α-k ρ és σ segítségével kiküszöbölhető $\Longrightarrow$ HLBA egyenletek

A MAGASABB SZINTŰ BA EGYENLETEK:

CSAK A GERJESZTÉSEK PARAMÉTEREI!

$$N\int_0^\infty \frac{J_0(\omega)\sin(\omega\lambda_\xi)}{\mathrm{ch}\,\frac{\omega u}{4}}\frac{d\omega}{\omega} = 2\pi \mathcal{J}_\xi - \sum_{\xi'}\phi(\lambda_\xi-\lambda_{\xi'})$$

$$+\sum_h 2\tan^{-1}\left(\mathrm{th}\frac{(\lambda_\xi-\sin k_h)\pi}{u}\right)+\sum_\mu 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\xi-\chi_\mu}{u/4}$$

$$\sum_\xi 2\tan^{-1}\frac{\chi_\mu-\lambda_\xi}{u/4} = 2\pi \mathcal{J}_\mu + \sum_{\mu'} 2\tan^{-1}\frac{\chi_\mu-\chi_{\mu'}}{u/2}$$

$$N\left(k_h+\int_0^\infty \frac{J_0(\omega)e^{-\omega u/4}\sin(\omega\sin k_h)}{\mathrm{ch}\,\omega u/4}\frac{d\omega}{\omega}\right) = 2\pi I_h +$$

$$+\sum_{h'}\phi(\sin k_h-\sin k_{h'})+\sum_\xi 2\tan^{-1}\left(\mathrm{th}\frac{(\sin k_h-\lambda_\xi)\pi}{u}\right)$$

$$-\sum_n 2\tan^{-1}\frac{\sin k_h-\Lambda_n}{u/4}$$

$$\sum_h 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n-\sin k_h}{u/4} = 2\pi \mathcal{J}_n + \sum_{n'} 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n-\Lambda_{n'}}{u/2}$$

$$\phi(x)=\frac{1}{i}\ln\frac{\Gamma\left(\frac12-\frac{ix}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{ix}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac12+\frac{ix}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{ix}{2}\right)}$$

λ_ξ: lyukak a λ_α eloszlásban

χ_μ: ezek reprezentálják a komplex λ-kat

k_h: lyukak a valós k-k eloszlásában

Λ_n: ezek határozzák meg a komplex $k^{\pm}$-kat

ENERGIA, IMPULZUS, SPIN, IZOSPIN

$$E = E_0 + \sum_h \varepsilon_c(k_h) + LU + \sum_\xi \varepsilon_s(\lambda_\xi)$$

L: komplex k párok száma

$$\varepsilon_c = 2\cos k + 2\int_0^\infty \frac{e^{-\omega U/4} J_1(\omega)\cos(\omega \sin k)}{\omega \, ch\, \omega U/4} d\omega$$

$$\varepsilon_s = 2\int_0^\infty \frac{J_1(\omega)\cos\omega\lambda}{\omega \, ch\, \omega U/4} d\omega$$

$$P = \pi(N - N_e/2 + 1) - \sum_h p_c(k_h) + \sum_\xi p_s(\lambda_\xi)$$

$$p_c = k + \int_0^\infty \frac{e^{-\omega U/4} J_0(\omega)\sin(\omega \sin k)}{ch\, \omega U/4} \frac{d\omega}{\omega}$$

$$0 < p_s(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{J_0(\omega)\sin(\omega\lambda)}{ch\, \omega U/4} \frac{d\omega}{\omega} < \pi$$

A LYUKAK (k_h, λ_ξ) AZ IGAZI GERJESZTÉSEK, χ_μ és Λ_h A SZIMMETRIÁÉRT FELEL:

$$S^z = \frac{n(\lambda_\xi)}{2} - n(\chi) \qquad S^2 = S^z(S^z+1)$$

$$C^z = \frac{n(k_h)}{2} - n(\Lambda_h) \qquad C^2 = C^z(C^z+1)$$

(páros N esetén) $n(\lambda_\xi) + n(k_h) =$ PÁROS!

(Töltés-spin szeparáció)

MAGASABB SZINTŰ BA EGYENLETEK KVANTÁLJÁK AZ IMPULZUSOKAT:

$$N\,p(k_n) + \left(O(1)\ \text{tagok}(k_{n'}, \lambda_\xi, \Lambda_n)\right) = 2\pi I_n$$

$$\sum_k 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n - \sin k_n}{u/4} - \sum_{n'} 2\tan^{-1}\frac{\Lambda_n - \Lambda_{n'}}{u/2} = 2\pi J_n$$

$$N\,p(\lambda_\xi) + \left(O(1)\ \text{tagok}(\lambda_{\xi'}, k_n, \chi_\mu)\right) = 2\pi J_\xi$$

$$\sum_\xi 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\xi - \chi_\mu}{u/4} - \sum_{\mu'} 2\tan^{-1}\frac{\chi_\mu - \chi_{\mu'}}{u/2} = 2\pi J_\mu$$

2 GERJESZTÉS ESETÉN: $O(1)$ tagok AZ ADOTT SZÓRÁS FÁZISTOLÁSAI

Pl: 2spin, triplett: $\varphi = -\phi(\lambda - \lambda')$

szinglett $\varphi = -\phi(\lambda - \lambda') - 2\,\mathrm{ctg}^{-1}\frac{\lambda - \lambda'}{u/2}$

2isospin triplett: $\varphi = \phi(\lambda - \lambda')$

szinglett: $= \phi(\lambda - \lambda') + 2\,\mathrm{ctg}^{-1}\frac{\lambda - \lambda'}{u/2}$

spin–isospin: $2\tan^{-1}\left(\mathrm{th}\frac{(\lambda - \sin k)\pi}{u}\right)$