Az 1D Hubbard-modell

Nevezetes Egzaktul Megoldható Problémák a Fizika Különböző Területeiről
Elméleti Fizikai Nyári Iskola
Budapest, 2008. augusztus 25-30.

Woynarovich Ferenc

Budapest, 2008. augusztus 27.

FELÉPÍTÉS

- A modell
- Az első (történetesen koordináta térbeli) Bethe Ansatz
- A második (történetesen algebrai) Bethe Ansatz
- A Bethe Ansatz egyenletek és megoldási stratégiájuk

A HUBBARD MODELL

Az eredeti modell:

$$H = -\sum_{\{i,j\}} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} t_{i,j} \left(c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + c^\dagger_{j\sigma} c_{i\sigma} \right) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

Itt $c^\dagger_{i\sigma}$ ($c_{i\sigma}$) kelt (eltüntet) egy σ-spinű elektront az i helyen, és $n_{i\sigma} = c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma}$.

Ez egy leegyszerűsített fém modell: az elektronok az ionokon csak egyféle állapotban lehetnek, $t_{i,j}$ amplitúdóval ugorhatnak át a szomszédos i és j helyek között, és csak akkor hatnak kölcsön, ha egy ionon ülnek.

A modell eredetileg a fémek mágnesességének a leírására készült.

Az általunk tárgyalt 1D modell:

$$H = -t \sum_{i=1}^{N} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \left(c^\dagger_{i\sigma} c_{i+1\sigma} + c^\dagger_{i+1\sigma} c_{i\sigma} \right) + U \sum_{i=1}^{N} n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \qquad (N+1 \equiv 1)$$

Miért szeretjük? Mert szép.

Szimmetriák:

- a spinek $SU(2)$ szimmetriája. A generátorok:

$$S^z = \frac{1}{2} \sum (n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow}) \,, \quad S^+ = \sum c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\downarrow} \,, \quad S^- = (S^+)^\dagger$$

- a töltések $SU(2)$ szimmetriája. A generátorok:

$$C^z = \frac{1}{2} \sum (1 - n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow}) \,, \quad C^+ = \sum (-1)^i c_{i\uparrow} c_{i\downarrow} \,, \quad C^- = (C^+)^\dagger$$

További "majdnem" szimmetriák:

- részecske-lyuk szimmetria: ha

$$c_{i\sigma}^\dagger \to (-1)^i c_{i\sigma}, \;\; c_{i\sigma} \to (-1)^i c_{i\sigma}^\dagger$$

$$\text{akkor} \qquad H \to H + 2UC^z$$

- spin-töltés szimmetria: ha

$$c_{i\uparrow}^\dagger \to c_{i\uparrow}, \;\; c_{i\uparrow} \to c_{i\uparrow}^\dagger, \quad c_{i\downarrow}^\dagger \to (-1)^i c_{i\downarrow}^\dagger, \;\; c_{i\downarrow} \to (-1)^i c_{i\downarrow}$$

$$\text{akkor} \quad H \longrightarrow -H + U(N/2 - S^z - C^z)$$

- ha $c_{i\sigma} \to (-1)^i c_{i\sigma}$ valamint $c_{i\sigma}^\dagger \to (-1)^i c_{i\sigma}^\dagger$ akkor $t \to -t$
- a spin-töltés és $t \to -t$ a kombinációja: $U \to -U$

$$H(U) \longrightarrow H(-U) + U(N/2 - S^z - C^z)$$

A szimmetriák következményei:

- A $\uparrow$ és a $\downarrow$ spinű elektronok száma ($N_\uparrow$ ill. $N_\downarrow$) külön-külön megmarad, és az állapotok jellemezhetők velük, illetve az $N_e = N_\uparrow + N_\downarrow$ valamint az $S^z = 1/2(N_\uparrow - N_\downarrow)$ számokkal.
- Elég csak az $N_e \leq N$ valamint $S^z \geq 0$ állapotokat vizsgálni
- A töltés-spin szimmetria miatt $E(N_\uparrow, N_\downarrow) = -E(N_e - N_\uparrow, N_\downarrow) + UN_\downarrow$, ami kombinálva a $t \leftrightarrow -t$ szimmetriával: $E(N_\uparrow, N_\downarrow, U) = E(N_e - N_\uparrow, N_\downarrow, -U) + UN_\downarrow$.

A továbbiakban $t = 1$-et veszünk, és majd az N_e és az $M = N_\downarrow$ kvantumszámokat használjuk, és feltesszük, hogy $N_e \leq N$ illetve $M \leq N_e/2$

Megjegyzés: Különösen szépek a szimmetriák, ha módosítjuk a Hamilton operátort:

$$\begin{aligned} H_m &= H + U(C^z - N/4) \\ &= -t\sum_{i=1}^{N}\sum_{\sigma=\uparrow\downarrow}\left(c^\dagger_{i\sigma}c_{i+1\sigma} + c^\dagger_{i+1\sigma}c_{i\sigma}\right) + U\sum_{i=1}^{N}\left(n_{i\uparrow} - \frac{1}{2}\right)\left(n_{i\downarrow} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ez szimmetrikus a részecske-lyuk transzformációra

$$H_m \longrightarrow H_m,$$

és antiszimmetrikus a töltés-spin transzformációra

$$H_m \longrightarrow -H_m.$$

Ez utóbbi kombinálva a $t \longrightarrow -t$ transzformációval

$$H_m(U) \longrightarrow H_m(-U).$$

Hátrány: itt nem látszik az U-s tag kölcsönhatás jellege (azonos járulékot adnak az üres, és a duplán betöltött helyek).

AZ ELSŐ (koordináta térbeli) BETHE ANSATZ

A Bethe Ansatz lépései:

1. az egy-részecske hullámfüggvény meghatározása
2. a két-részecske szórásállapotok leírása
3. általánosítás – ha lehetséges – akárhány részecskére

ad1. AZ EGY-RÉSZECSKE HULLÁMFÜGGVÉNY

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \left(c^\dagger_{i\sigma} c_{i+1\sigma} + c^\dagger_{i+1\sigma} c_{i\sigma} \right) + U \sum_{i=1}^{N} n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \quad (N+1 \equiv 1)$$

$$|F\rangle = \sum_n F(n) c^\dagger_n |0\rangle,$$

$$H|F\rangle = E|F\rangle \;\rightarrow\; -(F(n-1) + F(n+1)) = EF(n)$$

$$\text{PHF} \;\rightarrow\; F(N+1) = F(1)$$

megoldás:

$$F(n) = e^{ikn},\; E = -2\cos k, \quad e^{ikN} = 1 \;\rightarrow\; k = \frac{2\pi}{N} I \; (I = egész)$$

ad2. KÉT RÉSZECSKE SZÓRÁSÁLLAPOTA

$$|F\rangle = \sum_{n_1,n_2} \sum_{a_1,a_2} F_{a_1,a_2}(n_1,n_2) c^\dagger_{n_1,a_1} c^\dagger_{n_2,a_2} |0\rangle,$$

$$\begin{aligned} F_{a_1,a_2}(n_1,n_2) &= \mathcal{A} e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2} \left(A_{a_1,a_2}\theta(n_2 > n_1) + B_{a_1,a_2}\theta(n_1 > n_2)\right) \\ &= e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2} \left(A_{a_1,a_2}\theta(n_2 > n_1) + B_{a_1,a_2}\theta(n_1 > n_2)\right) \\ &- e^{ik_1 n_2 + ik_2 n_1} \left(A_{a_2,a_1}\theta(n_1 > n_2) + B_{a_2,a_1}\theta(n_2 > n_1)\right) \end{aligned}$$

($\theta(n_i > n_j) = 1(0)$ ha $n_i > n_j (n_i < n_j)$, A_{a_1,a_2} és B_{a_1,a_2} spinfv-ek.)

E és P megmaradása miatt elég két hullámszám!

$$E = -2\cos k_1 - 2\cos k_2, \quad P = k_1 + k_2$$

Az A_{a_1,a_2} és B_{a_1,a_2} meghatározása:

- $F_{a_1,a_2}(n_1 = n_2)$ egyértelmű,
- a sajátérték egyenlet akkor is teljesül, ha $n_1 = n_2$,
- teljesül a PHF

$F_{a_1,a_2}(n_1=n_2)$ egyértelmű, ha a

$$\begin{aligned} F_{a_1,a_2}(n_1,n_2) &= e^{ik_1n_1+ik_2n_2}\left(A_{a_1,a_2}\theta(n_2>n_1)+B_{a_1,a_2}\theta(n_1>n_2)\right) \\ &- e^{ik_1n_2+ik_2n_1}\left(A_{a_2,a_1}\theta(n_1>n_2)+B_{a_2,a_1}\theta(n_2>n_1)\right) \end{aligned}$$

függvényben $n_1=n_2$ esetén mindegy hogy az $n_1>n_2$ vagy az $n_1<n_2$ alakot vesszük (folytonosság diszkrét analógiája):

$$A_{a_1,a_2}-B_{a_2,a_1}=B_{a_1,a_2}-A_{a_2,a_1}$$

Megjegyzés: ez egyenértékű azzal, hogy a sajátérték egyenlet akkor is teljesül, ha $n_1=n$, $n_2=n+1$ illetve ha $n_1=n+1$, $n_2=n$

$$\begin{aligned} &-F_{a_1,a_2}(n-1,n+1)-F_{a_1,a_2}(n+1,n+1)- \\ &-F_{a_1,a_2}(n,n)-F_{a_1,a_2}(n,n+2)=EF_{a_1,a_2}(n,n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-F_{a_1,a_2}(n,n)-F_{a_1,a_2}(n+1,n)- \\ &-F_{a_1,a_2}(n+1,n-1)-F_{a_1,a_2}(n+1,n+1)=EF_{a_1,a_2}(n+1,n) \end{aligned}$$

(első: $(n_1=n_2)\equiv(n_1<n_2)$, második: $(n_1=n_2)\equiv(n_1>n_2)$)

Szórásmátrix: Ha $n_1 = n_2$, a sajátértékegyenlet

$$\begin{aligned} -F_{a_1,a_2}(n-1,n) - F_{a_1,a_2}(n+1,n) &- \\ -F_{a_1,a_2}(n,n-1) - F_{a_1,a_2}(n,n+1) &+ \quad UF_{a_1,a_2}(n,n) = \\ &= \quad EF_{a_1,a_2}(n,n). \end{aligned}$$

Ez plusz az egyértelműség feltétele együtt :

$$B_{a_1,a_2} = \frac{(\sin k_1 - \sin k_2)A_{a_1,a_2} + \frac{iU}{2}A_{a_2,a_1}}{(\sin k_1 - \sin k_2) + \frac{iU}{2}}$$

$$B_{a_1,a_2} = S_{a_1,a_2}^{b_1,b_2} A_{b_1,b_2},$$

$$S = \frac{(\sin k_1 - \sin k_2)I + \frac{iU}{2}P}{(\sin k_1 - \sin k_2) + \frac{iU}{2}}, \;\; I_{a_1,a_2}^{b_1,b_2} = \delta_{a_1}^{b_1}\delta_{a_2}^{b_2}, \;\; P_{a_1,a_2}^{b_1,b_2} = \delta_{a_2}^{b_1}\delta_{a_1}^{b_2}.$$

$$A_{a_1,a_2} = (S^{-1})_{a_1,a_2}^{b_1,b_2} B_{b_1,b_2}, \;\; S^{-1} = \frac{(\sin k_2 - \sin k_1)I + \frac{iU}{2}P}{(\sin k_2 - \sin k_1) + \frac{iU}{2}}.$$

A PHF $\rightarrow$ eltolásinvariancia

$$\begin{aligned} F_{a_1,a_2}(n_1+1,n_2+1) &= e^{i(k_1+k_2)}F_{a_1,a_2}(n_1,n_2) \quad n_1,n_2<N \\ F_{a_1,a_2}(1,n_2+1) &= e^{i(k_1+k_2)}F_{a_1,a_2}(N,n_2) \quad n_1=N,\ \ n_2<N \end{aligned}$$

Behelyettesítés, átrendezés után

$$\left(A_{a_1,a_2}-e^{ik_1N}B_{a_1,a_2}\right)e^{ik_2n_2}=\left(B_{a_2,a_1}-e^{ik_2N}A_{a_2,a_1}\right)e^{ik_1n_2}$$

minden n_2-re

$$\begin{aligned} \left(e^{ik_1N}B_{a_1,a_2}-A_{a_1,a_2}\right)=0 \quad &\text{azaz} \quad \left(e^{ik_1N}S-I\right)A=0, \\ \left(e^{ik_2N}A_{a_1,a_2}-B_{a_1,a_2}\right)=0 \quad &\text{azaz} \quad \left(e^{ik_2N}I-S\right)A=0. \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\left(e^{ik_1N}S - I\right)A = 0 \quad \left(e^{ik_2N}I - S\right)A = 0$$

triplet: $A_{a_1,a_2} = A_{a_2,a_1} \rightarrow S \equiv 1,$

$$e^{ik_1N} = 1, \quad e^{ik_2N} = 1, \quad k_1 = \frac{2\pi}{N}I_1, \; k_2 = \frac{2\pi}{N}I_2, \; (I_{1,2} = egész)$$

singlet: $A_{a_1,a_2} = -A_{a_2,a_1} \;\rightarrow\; S \equiv \dfrac{(\sin k_1 - \sin k_2) - iU/2}{(\sin k_1 - \sin k_2) + iU/2}$

$$e^{ik_1N}\frac{(\sin k_1 - \sin k_2) - \frac{iU}{2}}{(\sin k_1 - \sin k_2) + \frac{iU}{2}} = 1, \; e^{ik_2N}\frac{(\sin k_2 - \sin k_1) - \frac{iU}{2}}{(\sin k_2 - \sin k_1) + \frac{iU}{2}} = 1$$

$$k_{1,2} \neq \frac{2\pi}{N}egész, \; \text{de} \; k_1 + k_2 = \frac{2\pi}{N}egész!$$

ad3. ÁLTALÁNOSÍTÁS $r > 2$ RÉSZECSKÉRE

$$F_{a_1,a_2\dots a_r}(n_1, n_2, \dots n_r) =$$
$$= \mathcal{A} e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2 \dots + ik_r n_r} \sum_Q A_{a_1,a_2\dots a_r}(Q)\theta(n_Q)$$

$Q: \; Q_1, Q_2, \dots Q_r$
Az $1 \le n_i \le N, i = 1 \dots r$ teret az $n_i = n_j$ síkok $r!$ részre osztják.
Egy szegmenst Q jellemez ha a belsejében $n_{Q1} < n_{Q2} < \dots < n_{Qr}$.
$\theta(n_Q) = 1$ ha $n_1, n_2, \dots n_r$ a Q szegmensben van, egyébként nulla.
A Q és Q' szegmensek határosak/szomszédosak, ha

$$\begin{aligned} Q: &\quad n_{Q1} < n_{Q2} < \dots < n_{Ql} < n_{Ql+1} < \dots < n_{Qr} \\ Q': &\quad n_{Q1} < n_{Q2} < \dots < n_{Ql+1} < n_{Ql} < \dots < n_{Qr} \end{aligned}$$

Jelölés: ha $Ql = i$, $Ql + 1 = j$, akkor $Q' = P^{i,j} Q$ (nem igazi szorzás!)

A szegmensek belseje: szabad részecskék

$E = \sum_l (-2\cos k_l)$, $\quad P = \sum_l k_l$

A szegmensek határa: két részecske (az előbbi Q és Q' esetében i és j) szóródik egymáson

Sajátértékegyenlet(*) $\longrightarrow$ ha $Q' = P^{i,j}Q$, akkor

$$\begin{aligned} A_{a_1\ldots a_i\ldots a_j\ldots a_r}(Q') &= \left(S^{i,j}\right)^{b_1\ldots b_i\ldots b_j\ldots b_r}_{a_1\ldots a_i\ldots a_j\ldots a_r} A_{b_1\ldots b_i\ldots b_j\ldots b_r}(Q) \\ &= \left(S^{i,j}\right)^{b_i b_j}_{a_i a_j} A_{a_1\ldots b_i\ldots b_j\ldots a_r}(Q) \end{aligned}$$

$$\left(S^{i,j}\right)^{b_1\ldots b_i\ldots b_j\ldots b_r}_{a_1\ldots a_i\ldots a_j\ldots a_r} = \left(S^{i,j}\right)^{b_i,b_j}_{a_i,a_j} \prod_{k\neq i,j} \delta^{b_k}_{a_k},$$

$$S^{i,j} = \frac{(\sin k_i - \sin k_j) I^{i,j} + \frac{iU}{2} P^{i,j}}{(\sin k_i - \sin k_j) + \frac{iU}{2}}, \; (I^{i,j})^{b_i,b_j}_{a_i,a_j} = \delta^{b_i}_{a_i}\delta^{b_j}_{a_j}, \; (P^{i,j})^{b_i,b_j}_{a_i,a_j} = \delta^{b_i}_{a_j}\delta^{b_j}_{a_i}.$$

$S^{i,j}$ mindig arra az $A(Q)$-ra hat, amely Q-jában $n_i < n_j$!

A sajátérték egyenlet:

$$\left(\hat{H} - E\right) F(n_1, n_2, \ldots n_r) = 0$$

Itt $\hat{H}$ valamilyen rend szerint eggyel lépteti a koordinátákat $(n_i \to n_i \pm 1)$, illetve egy számmal szorozza az egészet (ha azonos koordináták vannak). Ezzel a hullámfüggvény

$$F_{a_1,a_2\ldots a_r}(n_1, n_2, \ldots n_r) = \\ = \mathcal{A} e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2 \cdots + ik_r n_r} \sum_Q A_{a_1,a_2\ldots a_r}(Q)\theta(n_Q)$$

alakja lényegében nem változik, amennyiben továbbra is független síkhullámok lineáris kombinációja marad. Az $A_{a_1,a_2\ldots a_r}(Q)$ együtthatók (spinfüggvények) közötti összefüggéseket az adja, hogy minden – a többitől lineárisan független – síkhullám együthatója nulla kell hogy legyen.

Konzisztencia. A konfigurációs tér bármely Q szegmenséből bármely Q' szegmensébe el lehet jutni határos szegmenseken keresztül $\Longrightarrow$ bármely $A(Q)$-ból bármely $A(Q')$ legyártható az S-ek segítségével. Az út nem egyértelmű! És az eredmény?
Az egyértelmű, ha:

$$S^{j,i}S^{i,j} = I^{i,j},$$
$$S^{j,k}S^{i,k}S^{i,j} = S^{i,j}S^{i,k}S^{j,k}, \quad \text{Yang-Baxter egyenlet (YBE)},$$
$$S^{j,i}S^{k,l} = S^{k,l}S^{j,i}, \text{ ha } i,j \neq k,l.$$

Példa: $Q_1 : n_1 < n_2 < n_3$, $Q_2 : n_3 < n_2 < n_1$

$$n_1 < n_2 < n_3 \overset{n_1 = n_2}{\longrightarrow} n_2 < n_1 < n_3 \overset{n_1 = n_3}{\longrightarrow} n_2 < n_3 < n_1 \overset{n_2 = n_3}{\longrightarrow} n_3 < n_2 < n_1$$
$$A(Q_2) = S^{2,3}S^{1,3}S^{1,2}A(Q_1)$$
$$n_1 < n_2 < n_3 \overset{n_2 = n_3}{\longrightarrow} n_1 < n_3 < n_2 \overset{n_1 = n_3}{\longrightarrow} n_3 < n_1 < n_2 \overset{n_1 = n_2}{\longrightarrow} n_3 < n_2 < n_1$$
$$A(Q_2) = S^{1,2}S^{1,3}S^{2,3}A(Q_1)$$

PHF

$$F(n_1+1, n_2+1\dots n_j+1\dots n_r+1) = e^{i\sum k_l} F(n_1, n_2\dots n_j\dots n_r)$$

Ha $n_j = N$, akkor $n_j + 1 = 1$

$$F(n_1+1, n_2+1\dots 1\dots n_r+1) = e^{i\sum k_l} F(n_1, n_2\dots N\dots n_r)$$

Mindkét oldal $r!$ különböző síkhullám összege $\longrightarrow$ $r!$ egyenlet az együtthatókra

$$A_{a_1,a_2\dots a_r}(Q_l) = e^{ik_lN} A_{a_1,a_2\dots a_r}(Q'_l) \quad l = 1, 2, \dots r \quad \text{és}$$

$$Q_l : \ n_l < n_{Q2} < n_{Q3} \dots < n_{Qr} \ \ Q'_l : \ n_{Q2} < n_{Q3} \cdots < n_{Qr} < n_l.$$

$$S^Q S^{1,l} S^{2,l} \dots S^{l-1,l} A(Q_0) = e^{ik_lN} S^Q S^{l,r} \dots S^{l,l+2} S^{l,l+1} A(Q_0)$$

S^Q: az $1, 2, 3\dots l-1, l+1\dots r$ elemek Q permutációjának megfelelő S,
Q_0: az alapsorrend $(1, 2, \dots l \dots r)$

$$e^{ik_l N} S^{l,l-1} S^{l,l-2} \dots S^{l,1} S^{l,r} \dots S^{l,l+2} S^{l,l+1} A(Q_0) = A(Q_0)$$

Interpretáció: az l-edik részecskét körbe visszük, az szóródik az összes többin, és a momentuma miatt változik a fázis, eredményként azonban a hullámfüggvény nem változhat.

$$\begin{aligned} e^{ik_l N} Z_l A(Q_0) &= A(Q_0), \quad (l = 1, 2, \dots r) \\ Z_l &= S^{l,l-1} S^{l,l-2} \dots S^{l,1} S^{l,r} \dots S^{l,l+2} S^{l,l+1} \end{aligned}$$

$A(Q_0)$ r db Z sajátfüggvénye. Van megoldás, mert

$$\text{YBE} \longrightarrow [Z_j, Z_l] = 0$$

Ha $z_l(k_1, k_2 \dots k_r)$ a Z^l $A(Q_0)$-hoz tartozó sajátértéke, akkor a Bethe Ansatz egyenletek:

$$e^{ik_l N} z_l(k_1, k_2 \dots k_r) = 1 \quad \longrightarrow \quad \{k_j\}$$

MIÉRT MŰKÖDIK A BETHE ANSATZ A HUBBARD MODELLRE:

a hullámfüggvény alakja

$$F_{a_1,a_2\ldots a_r}(n_1, n_2 \ldots n_r) =$$
$$= \mathcal{A} e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2 \cdots + ik_r n_r} \sum_Q A_{a_1,a_2\ldots a_r}(Q)\theta(n_Q)$$

- Minden szórás folyamat 2-részecskés szórásokra faktoriálódik: csak két részecske kölcsonhatások vannak (Pauli elv). $\Longrightarrow$ A hullámszámok külön-külön megmaradnak. Ezt a teljes E és teljes P megmaradása nem indokolja: további megmaradó mennyiségek a háttérben (összesen annyi, ahány k)
- A 2-részecskés S-mátrixok kielégítik a Yang-Baxter egyenletet: van megoldás az $A_{a_1,a_2\ldots a_r}(Q)$ spin-függvényekre

Megj.: bozonok esetében a két-részecske S-mátrixok kielégítik a YBE-t, de nem minden többrészecskés folyamat faktorizálódik (pl 3 részecske egy rácsponton): a BA nem működik!

A MÁSODIK BETHE ANSATZ

A feladat a Z_l spin operátorok diagonalizálása

$$(Z_l)_{a_1,a_2\dots a_r}^{b_1,b_2\dots b_r}=\left(S^{l,l-1}S^{l,l-2}\dots S^{l,1}S^{l,r}\dots S^{l,l+2}S^{l,l+1}\right)_{a_1,a_2\dots a_r}^{b_1,b_2\dots b_r}$$

$$S^{i,j}=\frac{(\sin k_i-\sin k_j)I^{i,j}+\frac{iU}{2}P^{i,j}}{(\sin k_i-\sin k_j)+\frac{iU}{2}},\ (I^{i,j})_{a_i,a_j}^{b_i,b_j}=\delta_{a_i}^{b_i}\delta_{a_j}^{b_j},\ (P^{i,j})_{a_i,a_j}^{b_i,b_j}=\delta_{a_j}^{b_i}\delta_{a_i}^{b_j}.$$

Z_l a V^r r-spin térben hat:

$$A_{a_1,a_2\dots a_r}\in V^r=\prod_j V_j,\ \text{ahol } V_j=C^2 \text{ a } j\text{-edik spin tere}$$

C. N. Yang: második koordináta térbeli Bethe Ansatz
(Phys.Rev.Lett. **19**, 1312 (1967))
mi: algebrai Bethe Ansatz

A Z_j MINT EGY MONODRÓMIA MÁTRIX SPÚRJA

Legyen $V_A = C^2$ egy segéd(spin)tér és legyen

$$S^{A,j}(\alpha-\alpha_j)=\frac{(\alpha-\alpha_j)I^{A,j}+\frac{iU}{2}P^{A,j}}{(\alpha-\alpha_j)+\frac{iU}{2}},\ (I^{i,j})^{v,b_j}_{u,a_j}=\delta^v_u\delta^{b_j}_{a_j},\ (P^{i,j})^{v,b_j}_{u,a_j}=\delta^v_{a_j}\delta^{b_j}_u.$$

$(\alpha_j = \sin k_j)$ legyen továbbá

$$\Gamma(\alpha;\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r) = S^{A,r}(\alpha-\alpha_r)S^{A,r-1}(\alpha-\alpha_j)\dots S^{A,1}(\alpha-\alpha_1)$$

Γ a $V_A \otimes V^r$ direktszorzat téren hat

$$\Gamma^{A,1\dots r}(\alpha): \quad \Gamma(\alpha;\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r)^{v,b_1\dots b_r}_{u,a_1\dots a_r} = \Gamma(\alpha)^{v,\underline{b}}_{u,\underline{a}} =$$

$$=(S^{A,r}(\alpha-\alpha_r))^{u_{r-1},b_r}_{v,a_r}(S^{A,r-1}(\alpha-\alpha_{r-1}))^{u_{r-2},b_{r-1}}_{u_{r-1},a_{r-1}}\dots(S^{A,1}(\alpha-\alpha_1))^{u,b_1}_{u_1,a_1}$$

Γ a monodrómia mátrix, α a spektrál paraméter.

$$Z_j = \mathrm{Tr}_A\,\Gamma(\alpha=\alpha_j) \qquad \left(S^{A,j}(0) = P^{A,j}\right)$$

A $\mathrm{Tr}_A \Gamma(\alpha = \alpha_j) = Z_j$ bizonyítása:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_A \Gamma(\alpha = \alpha_j) &= \Gamma(\alpha_j; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r)^{u,b_1\ldots b_r}_{u,a_1\ldots a_r} = \\
= (S(\alpha_j - \alpha_r))^{u_{r-1},b_r}_{u,a_r} & (S(\alpha_j - \alpha_{r-1}))^{u_{r-2},b_{r-1}}_{u_{r-1},a_{r-1}} \ldots (S(\alpha_j - \alpha_{j+1}))^{u_j,b_{j+1}}_{u_{j+1},a_{j+1}} \cdot \\
& \cdot P^{u_{j-1},b_j}_{u_j,a_j} (S(\alpha_j - \alpha_{j-1}))^{u_{j-2},b_{j-1}}_{u_{j-1},a_{j-1}} \ldots (S(\alpha_j - \alpha_1))^{u,b_1}_{u_1,a_1} = \\
& = \left(S^{j,j-1} S^{j,j-2} \ldots S^{j,1} S^{j,r} \ldots S^{j,j+2} S^{j,j+1}\right)^{b_1,b_2\ldots b_r}_{a_1,a_2\ldots a_r}
\end{aligned}
$$

Következmény: a $\mathrm{Tr}_A \Gamma(\alpha)$ az α spektrálparaméter segítségével interpolál a Z_j-k között.

A $\Gamma(\alpha)$ a YANG-BAXTER ALGEBRA REPREZENTÁCIÓJA

Belátandó: $\exists$ a $V_A \otimes V_B$-n ható $R^{A,B}(\alpha-\beta)$ úgy, hogy

$$R^{A,B}(\alpha-\beta)\Gamma^{A,1,\dots r}(\alpha)\Gamma^{B,1,\dots r}(\beta) = \Gamma^{A,1,\dots r}(\beta)\Gamma^{B,1,\dots r}(\alpha)R^{A,B}(\alpha-\beta)$$

Segítség: A YBE szerint $S^{i,j}S^{i,k}S^{j,k} = S^{j,k}S^{i,k}S^{i,j}$, azaz

$$\begin{aligned} S^{A,B}(\alpha-\beta)S^{A,k}(\alpha-\alpha_k)S^{B,k}(\beta-\alpha_k) &= \\ &= \underbrace{S^{B,k}(\beta-\alpha_k)S^{A,k}(\alpha-\alpha_k)}_{P^{A,B}S^{A,k}(\beta-\alpha_k)S^{B,k}(\alpha-\alpha_k)P^{A,B}} S^{A,B}(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

tehát
$$\begin{aligned} R^{A,B}(\alpha-\beta)S^{A,k}(\alpha-\alpha_k)S^{B,k}(\beta-\alpha_k) &= \\ &= S^{A,k}(\beta-\alpha_k)S^{B,k}(\alpha-\alpha_k)R^{A,B}(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

ahol
$$R^{A,B}(\alpha-\beta) = P^{A,B}S^{A,B}(\alpha-\beta) = \frac{(\alpha-\beta)P^{A,B} + \frac{iU}{2}I^{A,B}}{(\alpha-\beta)+\frac{iU}{2}}$$

Ha $R^{A,B}(\alpha-\beta)S^{A,k}(\alpha)S^{B,k}(\beta) = S^{A,k}(\beta-\alpha_k)S^{B,k}(\alpha)R^{A,B}(\alpha)$ igaz, akkor

$$R^{A,B}(\alpha-\beta)\Gamma^{A,1,\dots r}(\alpha)\Gamma^{B,1,\dots r}(\beta) = \Gamma^{A,1,\dots r}(\beta)\Gamma^{B,1,\dots r}(\alpha)R^{A,B}(\alpha-\beta)$$

$$\begin{aligned}
R^{A,B}(\alpha-\beta)\,\overbrace{S^{A,r}(\alpha)\dots S^{A,1}(\alpha)}^{\Gamma^{A,1,\dots r}(\alpha)}\,\overbrace{S^{B,r}(\beta)\dots S^{B,1}(\beta)}^{\Gamma^{B,1,\dots r}(\beta)} &= \\
\underbrace{R^{A,B}(\alpha-\beta)S^{A,r}(\alpha)S^{B,r}(\beta)}\dots S^{A,1}(\alpha)S^{B,1}(\beta) &= \\
S^{A,r}(\beta)S^{B,r}(\alpha)R^{A,B}(\alpha-\beta)\dots S^{A,1}(\alpha)S^{B,1}(\beta) &= \\
\vdots \\
S^{A,r}(\beta)S^{B,r}(\alpha)\dots \underbrace{R^{A,B}(\alpha-\beta)S^{A,1}(\alpha)S^{B,1}(\beta)} &= \\
S^{A,r}(\beta)S^{B,r}(\alpha)\dots S^{A,1}(\beta)S^{B,1}(\alpha)R^{A,B}(\alpha-\beta) &= \\
\underbrace{S^{A,r}(\beta)\dots S^{A,1}(\beta)}_{\Gamma^{A,1,\dots r}(\beta)}\,\underbrace{S^{B,r}(\alpha)\dots S^{B,1}(\alpha)}_{\Gamma^{B,1,\dots r}(\alpha)}\,R^{A,B}(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

Következmény #1:

$$\mathrm{Tr}_A\,\Gamma^A(\alpha)\mathrm{Tr}_B\,\Gamma^B(\beta) = \mathrm{Tr}_A\,\Gamma^A(\beta)\mathrm{Tr}_B\,\Gamma^B(\alpha) \quad \forall\ \alpha \text{ és } \beta\text{-ra}$$

$$R^{A,B}(\alpha-\beta)\Gamma^A(\alpha)\Gamma^B(\beta) = \Gamma^A(\beta)\Gamma^B(\alpha)R^{A,B}(\alpha-\beta)$$

$$\mathrm{Tr}_A\mathrm{Tr}_B\Gamma^A(\alpha)\Gamma^B(\beta) =$$

$$= \mathrm{Tr}_A\mathrm{Tr}_B(R^{A,B}(\alpha-\beta))^{-1}\Gamma^A(\beta)\Gamma^B(\alpha)R^{A,B}(\alpha-\beta)$$

Speciel, ha $\alpha = \sin k_j$ és $\beta = \sin k_l$, akkor ez épp $[Z_j, Z_l] = 0$

Következmény #2: hasznos felcserélési relációk: az $R\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma R$ az A és B terekre vonatkozó indexek szerint egy 4×4-es mátrix egyenlet, ahol a mátrixok elemei a V^r-en ható operátorok $\longrightarrow$ 16 "kommutátor".

Jelölések:

$$\left(R^{A,B}(\alpha-\beta)\right)_{v_A,v_B}^{u_A,u_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)+iU/2}$$

$$b = \frac{iU/2}{(\alpha-\beta)+iU/2}$$

Itt az u_A, u_B ill. v_A, v_B indexek rendre $\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$, $\downarrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow$.

$$\left(\Gamma^{A,V^r}(\alpha)\right)_{v,\underline{a}}^{u,\underline{b}} = \begin{pmatrix} A_{\underline{a}}^{\underline{b}} & B_{\underline{a}}^{\underline{b}} \\ C_{\underline{a}}^{\underline{b}} & D_{\underline{a}}^{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

$A(B,C,D)_{\underline{a}}^{\underline{b}} = A(B,C,D)_{a_1,a_2\ldots a_r}^{b_1,b_2\ldots b_r}$ az r spin terén ható operátorok

$A(\alpha)(B(\alpha)\text{ stb}) = A(B\text{ stb})$, $A(\beta)(B(\beta)\text{stb}) = A'(B'\text{stb})$ jelölésekkel az $R\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma R$ reláció 4×4-es formában

$$\begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ bAC'+aCA' & bAD'+aCB' & bBC'+aDA' & bBD'+aDB' \\ aAC'+bCA' & aAD'+bCB' & aBC'+bDA' & aBD'+bDB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A'A & bA'B+aB'A & aA'B+bB'C & B'B \\ A'C & bA'D+aB'C & aA'D+bB'C & B'D \\ C'A & bC'B+aD'A & aC'B+bD'A & D'B \\ C'C & bC'D+aD'C & aC'D+bD'C & D'D \end{pmatrix}$$

$$A(\alpha)B(\beta) = u(\beta-\alpha)B(\beta)A(\alpha) + v(\beta-\alpha)B(\alpha)A(\beta)$$

$$D(\alpha)B(\beta) = u(\alpha-\beta)B(\beta)D(\alpha) + v(\alpha-\beta)B(\alpha)D(\beta)$$

$$B(\alpha)B(\beta) = B(\beta)B(\alpha)$$

$$u(\alpha-\beta) = \frac{1}{a} = \frac{(\alpha-\beta)+iU/2}{(\alpha-\beta)}, \qquad v(\alpha-\beta) = -\frac{b}{a} = -\frac{iU/2}{(\alpha-\beta)}$$

A $\mathrm{Tr}\Gamma(\alpha) = A(\alpha) + D(\alpha)$ DIAGONALOZÁLÁSA

Az $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ és $D(\alpha)$ szerkezete

Az $S^{A,j}(\alpha-\alpha_j)$ 4×4-es formában (indexek rendre $\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$, $\downarrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha-\alpha_j)}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2} & \frac{iU/2}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2} & 0 \\ 0 & \frac{iU/2}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2} & \frac{(\alpha-\alpha_j)}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^j_{++}(\alpha-\alpha_j) & t^j_{+-}(\alpha-\alpha_j) \\ t^j_{-+}(\alpha-\alpha_j) & t^j_{--}(\alpha-\alpha_j) \end{pmatrix}$$

Itt $+ =\uparrow$, $- =\downarrow$ a segédtérre vonatkozó indexek

A $t^j_{\pm\pm}(\alpha-\alpha_j)$-k a j-edik spinre ható 2×2-es mátrixok

$$t^j_{++} = \frac{(\alpha-\alpha_j)+iU/4}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2} + \frac{iU/4}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2}\sigma^z_j$$
$$t^j_{+-} = \frac{iU/2}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2}\sigma^-_j$$
$$t^j_{-+} = \frac{iU/2}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2}\sigma^+_j$$
$$t^j_{--} = \frac{(\alpha-\alpha_j)+iU/4}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2} - \frac{iU/4}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2}\sigma^z_j$$

$$A(\alpha) = \sum_{v_i=\pm} t^r_{+v_1} t^{r-1}_{v_1 v_2} \dots t^1_{v_{r-1}+} \quad S^z\text{-t megőrzi}$$
$$B(\alpha) = \sum_{v_i=\pm} t^r_{+v_1} t^{r-1}_{v_1 v_2} \dots t^1_{v_{r-1}-} \quad S^z\text{-t eggyel csökkenti}$$
$$C(\alpha) = \sum_{v_i=\pm} t^r_{-v_1} t^{r-1}_{v_1 v_2} \dots t^1_{v_{r-1}+} \quad S^z\text{-t eggyel növeli}$$
$$D(\alpha) = \sum_{v_i=\pm} t^r_{-v_1} t^{r-1}_{v_1 v_2} \dots t^1_{v_{r-1}-} \quad S^z\text{-t megőrzi}$$

A TÉNYLEGES ALGEBRAI BETHE ANSATZ

Referencia állapot $|f\rangle = |\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{r}\rangle$

$$A|f\rangle = |f\rangle \qquad \left(A(\alpha) = \sum_{v_i=\pm} t^r_{+v_1} t^{r-1}_{v_1 v_2} \ldots t^1_{v_{r-1}+}, \qquad t^j_{++}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \right)$$

(Csak az a tag hat, ahol csak t_{++} van. Minden más tagban van $t_{-+} \sim \sigma^+$ ami 0-át ad.)

$$D|f\rangle = \underbrace{\prod_{j=1}^{r} \frac{(\alpha - \alpha_j)}{(\alpha - \alpha_j) + iU/2}}_{\Delta(\alpha)} |f\rangle = \Delta(\alpha)|f\rangle$$

$$\left(D(\alpha) = \sum_{v_i=\pm} t^r_{-v_1} t^{r-1}_{v_1 v_2} \ldots t^1_{v_{r-1}-}, \qquad t^j_{--}|\uparrow\rangle = \frac{(\alpha - \alpha_j)}{(\alpha - \alpha_j) + iU/2} |\uparrow\rangle \right)$$

$$(A + D)|f\rangle = (1 + \Delta(\alpha))|f\rangle$$

Egy lefordított spin: $|\beta\rangle = B(\beta)|f\rangle$

$$\begin{aligned} A(\alpha)B(\beta)|f\rangle &= u(\beta-\alpha)B(\beta)A(\alpha)|f\rangle + v(\beta-\alpha)B(\alpha)A(\beta)|f\rangle \\ &= u(\beta-\alpha)B(\beta)|f\rangle + v(\beta-\alpha)B(\alpha)|f\rangle \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} D(\alpha)B(\beta)|f\rangle &= u(\alpha-\beta)B(\beta)D(\alpha)|f\rangle + v(\alpha-\beta)B(\alpha)A(\beta)|f\rangle \\ &= u(\alpha-\beta)\Delta(\alpha)B(\beta)|f\rangle + v(\alpha-\beta)\Delta(\beta)B(\alpha)|f\rangle \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} (A(\alpha)+D(\alpha))|\beta\rangle &= (u(\beta-\alpha)+v(\alpha-\beta)\Delta(\alpha))\,|\beta\rangle \\ \text{NEM AKART TAG} \longrightarrow \quad & + (v(\beta-\alpha)+v(\alpha-\beta)\Delta(\beta))\,|\alpha\rangle \end{aligned}$$

Nyilván, a $|\beta\rangle = B(\beta)|F\rangle$ sajátvektor, ha a nem kívánt $|\alpha\rangle = B(\alpha)|F\rangle$ együtthatója nulla, tehát:

$$\Delta(\beta) = -\frac{u(\beta-\alpha)}{u(\alpha-\beta)} \text{ azaz } \prod_{j=1}^{r} \frac{(\beta-\alpha_j)}{(\beta-\alpha_j)+iU/2} = 1$$

Ekkor:

$$\begin{aligned}
(A(\alpha)+D(\alpha))|\beta\rangle &= G(\alpha,\beta)|\beta\rangle \\
G(\alpha,\beta) &= (u(\beta-\alpha)+v(\alpha-\beta)\Delta(\alpha)) \\
&= \frac{(\beta-\alpha)+iU/2}{(\beta-\alpha)} + \frac{(\alpha-\beta)+iU/2}{(\alpha-\beta)}\Delta(\alpha)
\end{aligned}$$

m átfordított spin: $|\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m\rangle = B(\beta_1)B(\beta_2)\dots B(\beta_m)|f\rangle$

$$
\begin{aligned}
&A(\alpha)|\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m\rangle = A(\alpha)B(\beta_1)B(\beta_2)\dots B(\beta_m)|f\rangle = \\
&= \left(\prod_{i=1}^{m} u(\beta_i - \alpha)\right) B(\beta_1)B(\beta_2)\dots B(\beta_m)A(\alpha)|f\rangle + \\
&+ v(\beta_1 - \alpha)\left(\prod_{i=2}^{m} u(\beta_i - \beta_1)\right) B(\alpha)B(\beta_2)\dots B(\beta_m)A(\beta_1)|f\rangle + \\
&\qquad \vdots \\
&+ v(\beta_j - \alpha)\left(\prod_{i \neq j}^{m} u(\beta_i - \beta_j)\right) B(\beta_1)\cdots \overset{j}{B}(\alpha)\dots B(\beta_m)A(\beta_j)|f\rangle + \\
&\qquad \vdots \\
&+ v(\beta_m - \alpha)\left(\prod_{i=1}^{m-1} u(\beta_i - \beta_m)\right) B(\beta_1)\dots B(\beta_{m-1})B(\alpha)A(\beta_m)|f\rangle
\end{aligned}
$$

azaz

$$A(\alpha)|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle = \left(\prod_{i=1}^{m} u(\beta_i-\alpha)\right)|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} v(\beta_j-\alpha)\left(\prod_{i\neq j}^{m} u(\beta_i-\beta_j)\right)|\beta_1\ldots\beta_{j-1}\alpha\beta_{j+1}\ldots\beta_m\rangle$$

Teljesen analóg módon

$$D(\alpha)|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle = \left(\prod_{i=1}^{m} u(\alpha-\beta_i)\right)\Delta(\alpha)\,|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} v(\alpha-\beta_j)\left(\prod_{i\neq j}^{m} u(\beta_j-\beta_i)\right)\Delta(\beta_j)\,|\beta_1\ldots\beta_{j-1}\alpha\beta_{j+1}\ldots\beta_m\rangle$$

$$(A(\alpha)+D(\alpha))\,|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle =$$
$$=\left(\prod_{i=1}^{m}u(\beta_i-\alpha)+\Delta(\alpha)\prod_{i=1}^{m}u(\alpha-\beta_i)\right)|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle +$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left(v(\beta_j-\alpha)\prod_{i\neq j}^{m}u(\beta_i-\beta_j)+v(\alpha-\beta_j)\Delta(\beta_j)\prod_{i\neq j}^{m}u(\beta_j-\beta_i)\right)\cdot$$
$$\cdot|\beta_1\ldots\beta_{j-1}\alpha\beta_{j+1}\ldots\beta_m\rangle$$

$|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle$ akkor sajátvektor, ha $\forall\ |\beta_1\ldots\beta_{j-1}\alpha\beta_{j+1}\ldots\beta_m\rangle$ együtthatója 0, azaz

$$\Delta(\beta_j) = -\frac{v(\beta_j-\alpha)}{v(\alpha-\beta_j)}\prod_{i\neq j}^{m}\frac{u(\beta_i-\beta_j)}{u(\beta_j-\beta_i)}$$
$$\prod_{l=1}^{r}\frac{(\beta_j-\alpha_l)}{(\beta_j-\alpha_l)+iU/2} = \prod_{i=1}^{m}\frac{(\beta_j-\beta_i)-iU/2}{(\beta_j-\beta_i)+iU/2}$$

Fontos: ez a feltétel nem függ(het) α-tól!

$$(A(\alpha)+D(\alpha))\,|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle = G(\alpha;\beta_1\ldots\beta_m)\,|\beta_1,\beta_2\ldots\beta_m\rangle$$

$$G(\alpha;\beta_1\ldots\beta_m) = \left(\prod_{i=1}^{m} u(\beta_i-\alpha) + \Delta(\alpha)\prod_{i=1}^{m} u(\alpha-\beta_i)\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{(\beta_i-\alpha)+iU/2}{(\beta_i-\alpha)} + \Delta(\alpha)\prod_{i=1}^{m} \frac{(\alpha-\beta_i)+iU/2}{(\alpha-\beta_i)}$$

$$\Delta(\alpha) = \prod_{j=1}^{r} \frac{(\alpha-\alpha_j)}{(\alpha-\alpha_j)+iU/2}$$

$$\Delta(\alpha_l) = 0 \quad \forall\ l\text{-re!}$$

$$G(\alpha_l;\beta_1\ldots\beta_m) = \prod_{i=1}^{m} \frac{(\beta_i-\alpha_l)+iU/2}{(\beta_i-\alpha_l)}$$

VISSZA A HUBBARD MODELLHEZ!

$$\begin{array}{rcl} \left(e^{ik_l N} Z_l - 1\right) \ A(Q_0) & = & 0 \\ \uparrow \qquad\qquad A(Q_0) & = & |\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m\rangle \\ \mathrm{Tr}\Gamma(\sin k_l) = A(\sin k_l) & + & B(\sin k_l) \\ \Downarrow & & \\ \left(e^{ik_l N} G(\sin k_l; \beta_1 \ldots \beta_m) - 1\right) & = & 0 \end{array}$$

Az $A_{a_1, a_2 \ldots a_m}(1, 2 \ldots m)$ értéke az $\{a_1, a_2 \ldots a_m\}$ ($a_i =\uparrow$ v. $\downarrow$) konfiguráció súlya a $|\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m\rangle$-ben.

$$\begin{array}{rcl} e^{ik_l N} \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \frac{(\beta_i - \sin k_l) + iU/2}{(\beta_i - \sin k_l)} & = & 1 \\ \displaystyle\prod_{l=1}^{r} \frac{(\beta_j - \sin k_l)}{(\beta_j - \alpha_l) + iU/2} & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \frac{(\beta_j - \beta_i) - iU/2}{(\beta_j - \beta_i) + iU/2} \end{array}$$

(Szokásos átalakítások: $\beta = \lambda - iU/4$, és ln)

A BETHE ANSATZ EGYENLETEK:

(N_e-részecske, M lefordított spin, $N \geq N_e \geq 2M$)

$$N k_j = 2\pi I_j - \sum_{\alpha=1}^{M} 2\tan^{-1}\frac{\sin k_j - \lambda_\alpha}{U/4}, \qquad j = 1, 2 \ldots N_e,$$

$$\sum_{j=1}^{N_e} 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha - \sin k_j}{u/4} = 2\pi J_\alpha + \sum_{\beta=1}^{M} 2\tan^{-1}\frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}{U/2}, \quad \alpha = 1, 2 \ldots M,$$

$$I_j = \frac{M}{2}(mod 1), \qquad J_\alpha = \frac{N_e + M + 1}{2}(mod 1).$$

$$E = \sum_{j=1}^{N_e} -2\cos k_j, \qquad P = \sum_{j=1}^{N_e} k_j$$

$$S^z = \frac{N_e}{2} - M, \qquad S^2 = S^z(S^z + 1)$$

$$C^z = \frac{N}{2} - \frac{N_e}{2}$$