Faktorizálható szórás a hiperbolikus Sutherland modellben

Hegedűs Árpád (MTA-KFKI-RMKI)

Tematika

- **Modellek**
- **Klasszikus elmélet:**
- Megmaradó mennyiségek
- 2-részecske szórás
- N-részecske szórás
- **Kvantummechanika:**
- Megmaradó mennyiségek
- 2-részecske szórás
- N-részecske szórás

CMS modellek

Mozgásegyenletek: $(m = 1), \quad \dot{x}_i = p_i, \qquad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$

$$\dot{p}_i = -\sum_{i=1}^{n} v'(x_i - x_j), \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$v(x) = \frac{g/2}{x^2} \quad \text{v.} \quad \frac{g/2}{\sinh^2 x}$$

L-M pár: $L = L^+, \quad M = -M^+, \qquad \dot{L} = [M, L]$

$$L_{ij} = p_i \, \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \, \alpha(x_i - x_j) \quad i \leq j \quad L_{ij} = L^*_{ji}$$

$$M_{ij} = \delta_{ij} \cdot \sum_{m=1, m \neq i}^{n} \beta(x_i - x_m) - (1 - \delta_{ij}) \, \alpha'(x_i - x_j)$$

$\alpha(x)$ és $\beta(x)$ függvényegyenleteket elégítenek ki:

$$\alpha'(y) \, \alpha(z) - \alpha(y) \, \alpha'(z) = \alpha(y + z) \left(\beta(y) - \beta(z) \right)$$

$$\beta(y) = \beta(-y)$$

$$v(x) = \alpha(x) \, \alpha(-x)$$

$L = L^+$ hermitikus $\implies$ λ_i sajátértékek valósak

$\dot{L} = [M, L]$ $\implies$ $\dot{\lambda}_i(t) = 0$ sajátértékek mozgásállandók is.

$v(x) \xrightarrow{x \to 0} \frac{g/2}{x^2}$ "végtelenül" taszító magú kölcsönhatás

$v(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$ így azt várom, hogy $t \to \pm\infty$-ben az összes részecske végtelenül távol lesz egymástól:

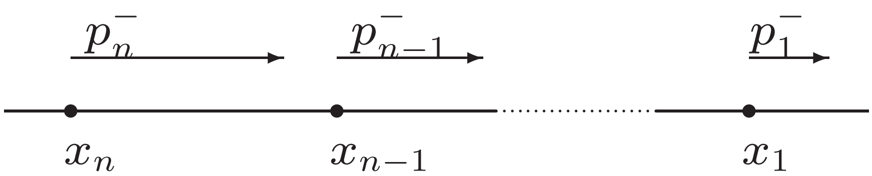
$\underline{t \to -\infty :}$ $|x_i - x_j| \to \infty$ $\forall i, j$ párra

a mozgásegyenletekből következik, hogy:

$$\lim_{t \to -\infty} \dot{p}_i = 0, \qquad \lim_{t \to -\infty} p_i(t) = p_i^-$$

$$\lim_{t \to -\infty} x_i(t) = p_i^- t + x_{0i}^- + \dots$$

Indexeljük a részecskéket: $p_n^- > p_{n-1}^- > \cdots > p_1^-$ $\implies$
$x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1$



$t \to -\infty$-beli nemeltűnő aszimptotikát $2n$ db paraméter jellemzi:

$$\{p_i^-\}_{i=1}^n, \qquad \{x_{0i}^-\}_{i=1}^n$$

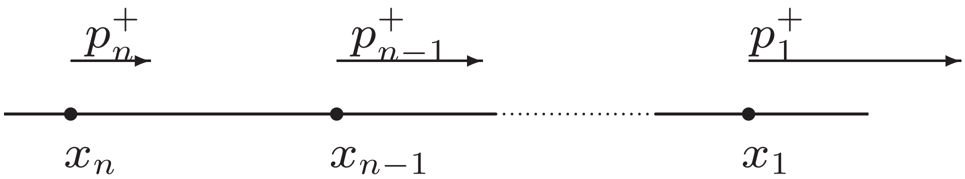
$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0 \quad \Longrightarrow \lim_{t\to-\infty} L_{ij}(t) = p_i^- \, \delta_{ij} + \ldots$$

ebből: $\lambda_i = p_i^- \qquad i = 1, ..., n$

Teljesen hasonló érvelés a $t \to +\infty$ limeszben:

mozgásegyenletből: $\lim_{t\to+\infty} p_i(t) = p_i^+$

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = p_i^+ \, t + x_{0i}^+ + \ldots$$



Indexelés: $p_1^+ > p_2^+ > ... > p_n^+$ kimenő állapot, mivel a potenciál taszító magú és a ∞-ben lecsengő, a részecskék nem előzhetik meg egymást.

$L_{ij} \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} p_i^+ \, \delta_{ij} + \ldots$ miatt $\{p_i^+\}_{i=1}^n$ az L sajátértékei.

sajátértékek időfüggetlenek: $\Longrightarrow \quad \{p_i^+\}_{i=1}^n = \{p_i^-\}_{i=1}^n$

indexelési konvenciót figyelembe véve:

$$p_{n-i+1}^{+} = p_{i}^{-} = \lambda_i \qquad i = 1, .., n$$

Mozgásállandók

Lényegében: λ_i-k.

$$\det(L + \lambda \cdot E) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^{n-m} I_m(\mathbf{p}, \mathbf{x})$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} I_m(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} p^{\pm}_{i_1} p^{\pm}_{i_2} \ldots p^{\pm}_{i_m} \equiv I^{(0)}_m(\mathbf{p}^{\pm})$$

A konstrukcióból következik, hogy:

$$\{I_m, H\} = \{I_m, I_k\} = 0 \qquad \forall\, k, m \in \{1, .., n\}$$

n db kölcsönösen Poisson-kommutáló megmaradó mennyiségem van.

Első néhány megmaradó mennyiség:

$$\det(L + \lambda\, E) = \lambda^n \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\lambda^{-m}}{m} \mathrm{Tr}(L^m)\right]$$

n-edfokú polinom kifejtéséből:

$$I_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = I^{(0)}_1(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = P$$

$$I_2(\mathbf{p},\mathbf{x}) = I_2^{(0)}(\mathbf{p}) - \sum_{1\le i<k\le n}^{n} v(x_i - x_k) = \frac{1}{2}P^2 - H$$

$$I_3(\mathbf{p},\mathbf{x}) = I_3^{(0)}(\mathbf{p}) - \sum_{\substack{1\le i_1\le n \\ i_2<i_3 \\ i_2\ne i_1\ne i_3}}^{n} p_{i_1}\, v(x_{i_2} - x_{i_3}) \quad \text{stb.}$$

Klasszikus szórás

$$\{p_i^-, x_{0i}^-\}_{i=1}^n \quad \xrightarrow{S} \quad \{p_i^+, x_{0i}^+\}_{i=1}^n$$

Láttuk: $\qquad p_{n-i+1}^+ = p_i^- \quad i = 1,..,n$

"Fázistolás": $\qquad \Delta_i = x_{0,n-i+1}^+ - x_{0i}^-$
a p_i^- impulzusú részecskének hogyan változik az aszimptotikus koordinátája.
"Időkésés": $\qquad \Delta t_i = \frac{\Delta_i}{p_i^-}$ idővel siet vagy késik a szabad mozgáshoz képest.

2-részecske szórás

Két részecske 1 dimenzióban mindig integrálható, mert 2 db szabadsági fokom van és hozzájuk 2 db megmaradó mennyiségem: a H és a P.

A fázistolás:

$$\Delta_1 = x_{02}^+ - x_{01}^- = -q_0 + \int\limits_{-\infty}^{-q_0} dx \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - 4\,v(x)} - 1} \right) \equiv \Delta(k)$$

$$k = p_2^- - p_1^- > 0 \qquad q_0 > 0 \qquad v(-q_0) = \frac{k^2}{4}$$

Hiperbolikus Sutherland: $\Delta(k) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{g}{k^2}\right)$

<u>n-részecskés szórás</u>

Az S szórási transzformáció kanonikus:

$$\{p_1^-, .., p_n^-, x_{01}^-, ..., x_{0n}^-\} \quad \xrightarrow{S} \{p_1^+, .., p_n^+, x_{01}^+, ..., x_{0n}^+\}$$

Láttuk: $p_{n-j+1}^+ = p_j^- \qquad j = 1, ..., n$

Legyen: $x_{0,n-j+1}^+ = x_{0j}^- + \Delta_j \qquad j = 1, ..., n$

S kanonikus $\implies$ $\partial_{x_{0k}^-} \Delta_j = 0$ csak p_j^--tól függ

$$\{x_{0,n-j+1}^+, p_{n-k+1}^+\} = \{x_{0j}^- + \Delta_j, p_k^-\} = \{x_{0j}^-, p_k^-\} + \{\Delta_j, p_k^-\}$$

S kanonikus, ha: $\{\Delta_j, p_k^-\} = 0 \quad \forall\, j, k$

$$\{\Delta_j, p_k^-\} = -\frac{\partial \Delta_j}{\partial x_{0k}^-} = 0$$

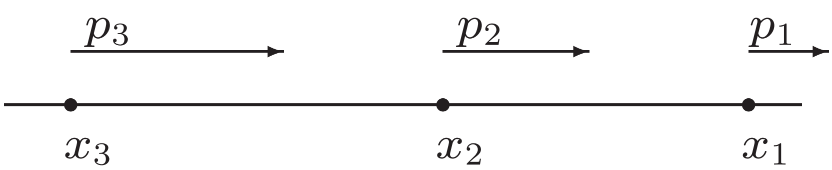
$\Delta_j \equiv \Delta_j(p_1^-, ..., p_n^-)$ csak az impulzusoktól függnek

Számoljuk ki őket olyan $\{x_{0j}^-\}$ konfiguráció mellett, amelyben a 2-részecske ütközések elkülönülnek.

$p_n^- > p_{n-1}^- > ... > p_2^- > p_1^-$ indexelés esetén:

$x_{0n}^- \ll x_{0,n-1}^- \ll ... \ll x_{02}^- \ll x_{01}^-$ aszimptotikus koordinátákat választva 2-részecske ütközésekre esik szét az n-részecskeés szórás. (bármely két aszimptotikus koordináta különbsége tetszőlegesen nagynak választható)

Példa: 3-részecske esete:



1. szórás a 3. és 2. között:

Szórás előtt:

$x_2(\text{''}t \to -\infty\text{''}) = p_2^- \, t + x_{02}^- + \ldots$

$x_3(\text{''}t \to -\infty\text{''}) = p_3^- \, t + x_{03}^- + \ldots$

Szórás után:

$x_2(\text{''}t \to +\infty\text{''}) = p_2^+ \, t + x_{02}^+ + \ldots$

$x_2(\text{''}t \to +\infty\text{''}) = p_3^+ \, t + x_{03}^+ \ldots$

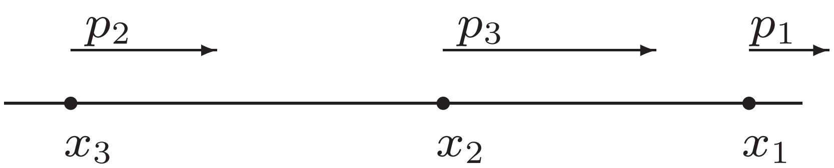
Definícióból: $x_{0,n-j+1}^+ = x_{0j}^- + \Delta_j$

Def: $\Delta(p_3^- - p_2^-) = x_{02}^+ - x_{03}^-$

$x_2(\text{''}t \to +\infty\text{''}) = p_3^- \, t + x_{03}^- - \Delta(p_3^- - p_2^-) + \ldots$

$x_3(\text{''}t \to +\infty\text{''}) = p_2^- \, t + x_{02}^- + \Delta(p_3^- - p_2^-) + \ldots$

Következő ütközés: $p_2^- < p_3^- > p_1^-$ miatt az 1. és 2. között lesz:



Szórás előtt:

$$x_2(\text{''}t \to -\infty\text{''}) = \underbrace{p_3^-}_{p_2^{-\prime}} \, t + \underbrace{x_{03}^- - \Delta(p_3^- - p_2^-)}_{x_{02}^{-\prime}} + \ldots$$

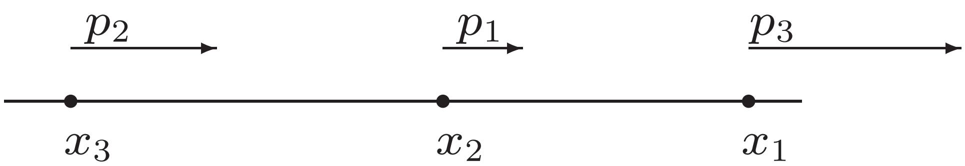
$x_1(\text{''}t \to -\infty\text{''}) = p_1^- \, t + x_{01}^- + \ldots$

Szórás után:

$x_2(\text{''}t \to +\infty\text{''}) = p_1^- \, t + x_{01}^- + \Delta(p_3^- - p_1^-) + \ldots$

$x_1(\text{''}t \to +\infty\text{''}) = p_3^- \, t + x_{03}^- - \Delta(p_3^- - p_2^-) - \Delta(p_3^- - p_1^-) + \ldots$

Utolsó ütközés: $p_2^- > p_1^- < p_3^-$ miatt az 2. és 3. között lesz:



Szórás előtt:

$$x_3(\text{"}t \to -\infty\text{"}) = \underbrace{p_2^-}_{p_3^{-\prime\prime}} t + \underbrace{x_{02}^- + \Delta(p_3^- - p_2^-)}_{x_{03}^{-\prime\prime}} + \ldots$$

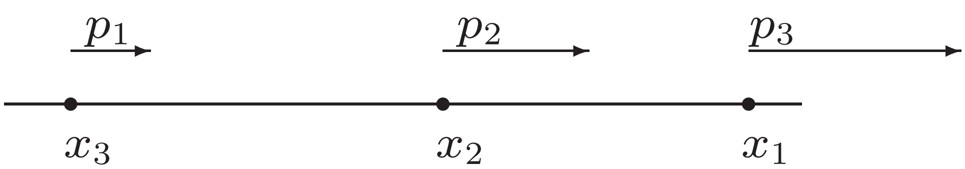
$$x_2(\text{"}t \to -\infty\text{"}) = \underbrace{p_1^-}_{p_2^{-\prime\prime}} t + \underbrace{x_{01}^- + \Delta(p_3^- - p_1^-)}_{x_{02}^{-\prime\prime}} + \ldots$$

Szórás után:

$$x_3(\text{"}t \to +\infty\text{"}) = p_1^- t + x_{01}^- + \Delta(p_3^- - p_1^-) + \Delta(p_2^- - p_1^-) + \ldots$$

$$x_2(\text{"}t \to +\infty\text{"}) = p_2^- t + x_{02}^- + \Delta(p_3^- - p_2^-) - \Delta(p_2^- - p_1^-) + \ldots$$

Több szórás nincsen!



Végeredmény összefoglalva:

$$x_1(t \to +\infty) = p_3^- t + x_{03}^- - \Delta(p_3^- - p_1^-) - \Delta(p_3^- - p_2^-) + \ldots$$

$$x_2(t \to +\infty) = p_2^- t + x_{02}^- + \Delta(p_3^- - p_2^-) - \Delta(p_2^- - p_1^-) + \ldots$$

$$x_3(t \to +\infty) = p_1^- t + x_{01}^- + \Delta(p_3^- - p_1^-) + \Delta(p_2^- - p_1^-) + \ldots$$

Fázistolások:

$$\begin{aligned} x_{01}^{+} &= x_{03}^{-} + \Delta_3 \qquad & \Delta_3 &= -\Delta(p_3^{-} - p_1^{-}) - \Delta(p_3^{-} - p_2^{-}) \\ x_{02}^{+} &= x_{02}^{-} + \Delta_2 \qquad & \Delta_2 &= -\Delta(p_2^{-} - p_1^{-}) + \Delta(p_3^{-} - p_2^{-}) \\ x_{03}^{+} &= x_{01}^{-} + \Delta_1 \qquad & \Delta_1 &= \Delta(p_2^{-} - p_1^{-}) + \Delta(p_3^{-} - p_1^{-}) \end{aligned}$$

n-részecske esetén:

$$\Delta_i = x_{0,n-i+1}^{+} - x_{0i}^{-} = \sum_{j>i}^{n} \Delta(p_j^{-} - p_i^{-}) - \sum_{j<i}^{n} \Delta(p_i^{-} - p_i^{-})$$

A generaló függvény

$$\phi(x_{0i}^{-}, p_i^{-}) = \phi_0(x_{0i}^{-}, p_i^{-}) + S(p_i^{-})$$

$$p_{n-i+1}^{+} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{0i}^{-}} \qquad i = 1, .., n$$

$$x_{0,n-i+1}^{+} = \frac{\partial \phi}{\partial p_i^{-}} \qquad i = 1, ..., n$$

$$\phi_0(x_{0i}^{-}, p_i^{-}) = \sum_{i=1}^{n} x_{0i}^{-} p_i^{-}$$

a változók (indexek) sorrendjének a megváltozását írja le

$$p_{n-i+1}^{+} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x_{0i}^{-}} \qquad\qquad x_{0i}^{-} = \frac{\partial \phi_0}{\partial p_i^{-}}$$

S a fázistolásokat írja le

$$S(\mathbf{p}^-) = -\sum_{i=1}^{n} \eta(p_i^- - p_j^-), \qquad \eta(p) = \int^{p} d\xi \Delta(\xi)$$

$$\eta(p) = p\, q_0 - \int_{-\infty}^{-q_0} dx \left(\sqrt{p^2 - 4v(x)} - p\right)$$

Milyen potenciálok konzisztensek az integrálhatóssággal?

Követeljük meg, hogy az impulzuson kívül legyen még egy megmaradó mennyiségem:

$$\{H, I_3\} = 0$$

$$I_3(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = I_3^{(0)}(\mathbf{p}) - \sum_{\substack{1 \le i_1 \le n \\ i_2 < i_3 \\ i_2 \ne i_1 \ne i_3}}^{n} p_{i_1} v(x_{i_2} - x_{i_3})$$

$$\{H, I_3\} = \sum_{\substack{i,j<k \\ j \ne i \ne k}}^{n} v(x_j - x_k) \left[v'(x_i - x_j) + v'(x_i - x_k)\right]$$

3-részecskére alkalmazva $\longrightarrow$ egyenlet a potenciálra:

$$x_1 - x_2 = a, \quad x_2 - x_3 = b, \quad x_1 - x_3 = a + b$$

$$v(a)\left[v'(b)+v'(a+b)\right] - v(b)\left[v'(a)+v'(a+b)\right] + v(a+b)\left[v'(a)-v'(b)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} v(a) & v'(a) & 1 \\ v(b) & v'(b) & 1 \\ v(a+b) & -v'(a+b) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Belátható, hogy ha a $v(x)$ kielégíti ezt az egyenletet, akkor akárhány részecskére teljesül, hogy $\{H, I_3\} = 0$

Legáltalánosabb megoldás: $\mathcal{P}(x)$ Weierstrass függvény

Szórás kvantumosan

2-részecske szórás $\quad (\hbar = m = 1)$

Schrödinger egyenlet:

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + v(x_1 - x_2) - E \right) \psi(x_1, x_2) = 0$$

Tartomány: $\qquad x_1 > x_2$

Peremfeltételek: $\quad$ 1.) $\quad \psi(x_1 \to x_2) = 0$

2.) $\quad |x_1 - x_2| \to \infty, \quad \psi \sim$ síkhullám

Új változók:

$$x_1 - x_2 = x, \qquad x_1 + x_2 = y$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \psi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\psi}(x, y)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x) - E \right) \tilde{\psi}(x, y) = 0$$

Megoldás:

$$\tilde{\psi}(x, y) = \phi(x) \cdot \xi(y)$$

Paraméterezés: $E = p^2 + k^2$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - p^2\right)\xi(y) = 0, \qquad \xi(y) \sim e^{\pm ipy}$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x) - k^2\right)\phi(x) = 0, \qquad \phi(x) \sim e^{\pm ikx}$$

Paraméterek fizikai jelentése:

$p = P_{TOTAL}/2$ teljes impulzus fele

$k = \frac{k_2 - k_1}{2}$ a relatív impulzus fele

Szórás hiperbolikus potenciálban

"Redukált" Schrödinger egyenlet:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{g/2}{\sinh^2 x} - k^2\right)\phi(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad x = x_1 - x_2$$

Peremfeltételek: 1.) $\phi(x = 0) = 0$

2.) $\phi(x \to \infty) \sim e^{\pm ikx}$

Legyen: $\nu(\nu - 1) = \frac{g}{2}$

Origóbeli viselkedés: $\phi(x) \sim x^\nu$

Keressük a megoldást: $\phi(x) = (\sinh x)^{-ik} f(z)$

$$z = \frac{1}{1 - e^{2x}}$$

$$x \to 0 \Longrightarrow z \sim \frac{-1}{2x} \to -\infty$$

$$x \to \infty \Longrightarrow z \sim -e^{-2x} \to 0$$

Differenciálegyenlet $f(z)$-re:

$$\left\{ z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (ik+1)(1-2z)\frac{d}{dz} - (ik+1-\nu)(ik+\nu) \right\} f(z) = 0,$$

Lineárisan független megoldások:

$$f_1(z) = {}_2F_1\left(ik+\nu, ik+1-\nu, ik+1, z\right)$$

$$f_2(z) = z^{-ik}\, {}_2F_1\left(1-\nu, \nu, 1-ik, z\right)$$

$x \to 0 \quad (z \to -\infty)$ viselkedésből:

$$f(z) = \frac{\Gamma(1-ik)\Gamma(2\nu-1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu-ik)} f_1(z) - \frac{\Gamma(1+ik)\Gamma(1-2\nu)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(ik+1-\nu)} f_2(z)$$

Szórás: $x \to \infty \quad (z \to 0^-)$ aszimptotikából:

$$\phi(x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{\Gamma(2\nu-1)}{\Gamma(\nu)} \left\{ \frac{\Gamma(1-ik)}{\Gamma(\nu-ik)} e^{ikx} - \frac{\Gamma(1+ik)}{\Gamma(\nu+ik)} e^{-ikx} \right\}$$

Szórási amplitúdó: $\qquad \phi(x) \sim e^{ikx} + e^{2i\eta(k)} e^{-ikx}$

$$e^{2i\eta(k)} = -\frac{\Gamma(1+ik)\Gamma(\nu-ik)}{\Gamma(1-ik)\Gamma(\nu+ik)}$$

n-részecskés szórás

I_m-ekben nincsen operátor rendezési probléma

Pl. $\quad I_3 \sim p_{i_1} \cdot v(x_{i_2} - x_{i_3}) \qquad i_1 \neq i_2 \neq i_3$

Kvantum operátorok: $\quad I_m(p_i, x_i) \longrightarrow \hat{I}_m(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$

Beláthatő: $\quad \left[\hat{I}_m(\hat{p}_i, \hat{x}_i), \hat{I}_k(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \right] = 0, \quad \forall m, k$

n db megmaradó mennyiség $\longrightarrow$ a hullámfüggvény n db kvantumszámmal jellemezhető

$$\hat{I}_m(\hat{p}_i, \hat{x}_i)\psi(x_1, ..., x_n) = E_m\, \psi(x_1, .., x_n) \qquad 1 \leq m \leq n$$

Feladat: n db operátort kell egyszerre diagonalizálnunk

A Schrödinger egyenlet:

$$\hat{H}\psi(x_1,..,x_n) = E\psi(x_1,...,x_n)$$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{i<j}^{n} v(x_i - x_j)$$

Tartomány: $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$

$v(x) \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \psi(..., x_i = x_{i+1}, ...) = 0$

$+\ 0 \leq v(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0 \Longrightarrow$ folytonos a spektrum

1.) Tek. $|x_i| \to \infty, \quad |x_i - x_{i+1}| \to \infty \quad \forall i$

ekkor $v(x_i - x_j) \to 0 \quad \forall \quad i, j$

$$\hat{I}_m(\{\hat{p}_i\}, \{\hat{x}_i\}) \longrightarrow \hat{I}_m^{(0)}(\{\hat{p}_i\})$$

$$\hat{I}_m^{(0)}(\hat{p}_i)\, e^{i\sum_{j=1}^{n} k_{\sigma_j} x_j} = I_m^{(0)}(\{k_i\})\, e^{i\sum_{j=1}^{n} k_{\sigma_j} x_j}$$

$$E_m = I_m^{(0)}(\{k_i\})$$

Ha $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ az $(1, 2, .., n)$ egy permutációja, akkor:

$$E_m(\{k_{\sigma_i}\}) = E_m(\{k_i\}) = I_m^{(0)}(\{k_i\})$$

Az energia: $E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j^2$

A hullámfüggvény aszimptotikusan:

$$\psi(x_1, .., x_n) \sim \sum_\sigma A_\sigma \, e^{i\sum_{j=1}^{n} k_{\sigma_j} x_j}$$

Szórás: A_σ-k kapcsolata

2.) Tek. $|x_i - x_{i+1}| \to \infty$ $\forall i$ de $|x_j - x_{j+1}| = y =$ véges valamely j-re

Ebben a limeszben a Hamilton operátor:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{k \neq j \neq j+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x_j + x_{j+1})^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v(y)$$

Keressük a hullámfüggvényt:

$$\psi(\mathbf{x}) = \prod_{l \neq j \neq j+1}^{n} \varphi_{k_{\sigma_l}}(x_l) \cdot \tilde{\varphi}(x_j + x_{j+1}) \cdot \phi(y) \qquad \varphi_{k_{\sigma_l}}(x) = e^{i k_{\sigma_l} x}$$

$\hat{H}\psi = E\psi$-ből következik, hogy:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial(x_j+x_{j+1})^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v(y)\right] \tilde{\varphi}(x_j+x_{j+1}) \cdot \phi(y) =$$

$$= \frac{k_{\sigma_j}^2 + k_{\sigma_{j+1}}^2}{2} \tilde{\varphi}(x_j+x_{j+1}) \cdot \phi(y)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial(x_j+x_{j+1})^2} \tilde{\varphi}(x_j+x_{j+1}) = \left(\frac{k_{\sigma_j}+k_{\sigma_{j+1}}}{2}\right)^2 \tilde{\varphi}(x_j+x_{j+1})$$

Megoldás: $\tilde{\varphi}(x_j+x_{j+1}) = e^{i\frac{k_{\sigma_j}+k_{\sigma_{j+1}}}{2}(x_j+x_{j+1})}$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + v(y)\right] \phi(y) = \left(\frac{k_{\sigma_j}-k_{\sigma_{j+1}}}{2}\right)^2 \phi(y)$$

aszimptotikusan: $\phi(y) \sim e^{iky} + e^{2i\eta(k)}\, e^{-iky}$ $\qquad k = \frac{k_{\sigma_j}-k_{\sigma_{j+1}}}{2}$

Hullámfüggvény aszimptotikus alakja:

$$\psi^{(\sigma)}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = e^{\,i\sum_{j=1}^{n} k_{\sigma_j} x_j} + e^{2i\eta\left(\frac{k_{\sigma_j}-k_{\sigma_{j+1}}}{2}\right)}\, e^{\,i\sum_{j=1}^{n} k_{\tilde{\sigma}_j} x_j}$$

$$\sigma = (\ldots, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \ldots)$$

$$\tilde{\sigma} = (\ldots, \sigma_{j+1}, \sigma_j, \ldots)$$

$$A_{\tilde{\sigma}} = e^{2i\eta\left(\frac{k\sigma_j - k\sigma_{j+1}}{2}\right)} A_\sigma$$

Ez minden σ permutációra és minden $(j, j+1)$ szomszéd párra fennáll, ezért az aszimptotikus hullámfüggvény alakjában szereplő A_σ amplitúdók kifejezhetők egy rögzített sorrendű $\sigma_0 = (1, 2, .., n)$ sorrendhez tartozó amplitúdóból:

$$A_{\sigma_0} = 1, \quad \Longrightarrow \quad A_\sigma = e^{2i \sum\limits_{<ij>} \eta\left(\frac{k_i - k_j}{2}\right)}$$

$$k_1 < k_2 < .. < k_n \qquad \eta(k) = -\eta(-k)$$

$< ij >$ jelenti: az összes párcserét σ_0-ból σ-ba

<u>n-részecskés szórási amplitúdó:</u>

$A_{\sigma_{be}} = 1 \quad \longleftrightarrow \quad e^{i \sum\limits_{j=1}^{n} k_j x_j}$ bejövő hullám

$A_{\sigma_{ki}} \; = \; e^{2i \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} \eta\left(\frac{k_i - k_j}{2}\right)} \quad \longleftrightarrow \quad e^{i \sum\limits_{j=1}^{n} k_{n-j+1} x_j}$ kimenő hullám

$$S(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = e^{2i \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} \eta\left(\frac{k_i - k_j}{2}\right)} \prod_{i=1}^{n} \delta(k'_{n-i+1} - k_i)$$

Példa: 3-részecskés szórás

$$(k_{\sigma_1}, k_{\sigma_2}, k_{\sigma_3})\text{''} = \text{''} e^{i\sum_j x_j k_{\sigma_j}}$$

$$(k_1, k_2, k_3) \xrightarrow{S(k_1-k_2)} (k_2, k_1, k_3) \xrightarrow{S(k_1-k_3)} (k_2, k_3, k_1)$$

$$\xrightarrow{S(k_2-k_3)} (k_3, k_2, k_1) \qquad S(k) = e^{2i\eta(k/2)}$$

3-részecskés szórási amplitúdó:

$$e^{2i\left(\eta\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)+\eta\left(\frac{k_1-k_3}{2}\right)+\eta\left(\frac{k_2-k_3}{2}\right)\right)}$$

Összefoglalva: a CMS modellekben az n-részecskés szórás az integrálhatóság következtében - mind klasszikusan, mind kvantumosan - egymást követő 2-részecske szórásokra faktorizálódik

Bizonyítás:

$$\dot{L} = M\,L - L\,M$$
$$\Lambda = U\,L\,U^{-1} \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$
$$\dot{L} = \dot{U}^{-1}\,\Lambda\,U + U^{-1}\,\dot{\Lambda}\,U + U^{-1}\,\Lambda\,\dot{U}$$
$$U\,\dot{L}\,U^{-1} = U\,\dot{U}^{-1}\,\Lambda + \dot{\Lambda} + \Lambda\,\dot{U}U^{-1}$$

Másfelől:

$$U\,U^{-1} = 1 \Longrightarrow \dot{U}\,U^{-1} + U\,\dot{U}^{-1} = 0$$

Legyen: $Q = \dot{U}U^{-1} = -U\dot{U}^{-1}$

$$U\,\dot{L}\,U^{-1} = \dot{\Lambda} - [Q, \Lambda] \tag{1}$$

Másfelől:

$$U\,\dot{L}\,U^{-1} = [\tilde{M}, \Lambda] \qquad \tilde{M} = U\,M\,U^{-1} \tag{2}$$

(1) és (2) összevetéséből:

$$\dot{\Lambda} - [Q, \Lambda] = [\tilde{M}, \Lambda]$$

Diagonális elemeket véve:

$$\dot{\Lambda}_{ii} = \dot{\lambda}_i = 0$$

$$[Q, \Lambda]_{ii} = [\tilde{M}, \Lambda]_{ii} = 0$$