Az AdS/CFT Bethe egyenletei

Hegedűs Árpád (MTA-KFKI-RMKI)

Tematika

- **Emlékeztető**
- $SU(2)$ **szektor 1-hurok rendben (XXX Heisenberg lánc)**
- $SU(N)$ **spinlánc és a Nested Bethe Ansatz**
- $SU(2)$ **szektor magasabb hurok rendekben és az aszimptotikus Bethe Ansatz**
- $SU(N)$ **spinlánc hosszúhatótávolságú kölcsönhatásokkal**
- **Az AdS/CFT Bethe Egyenletei**

Emlékeztető

SYM operátorok $\longleftrightarrow$ Spin lánc $\longleftrightarrow$ AdS-en mozgó húr

anomális dimenziók $\longleftrightarrow$ energiák $\longleftrightarrow$ energiák

keveredési mátrix $\longleftrightarrow$ Hamilton operátor

Integrálható spinlánc spektruma $\longrightarrow$ Bethe Ansatz

Előadás célja az AdS/CFT spinlánc diagonalizálásához szükséges koordináta Bethe Ansatz technika bemutatása

Az $SU(2)$ szektor 1-hurok rendben

Az $SU(2)$ szektor keveredési mátrixát 1-hurok rendben az izotróp $XXX_{1/2}$ Heisenberg lánc Hamilton operátora írja le (Minahan, Zarembo '03)

Azonosítás: $\uparrow \quad \longleftrightarrow \quad Z \qquad \downarrow \quad \longleftrightarrow \quad W$

Állapotok: $|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots \downarrow\uparrow\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(ZZWWW...ZW)$

Hamilton operátor: $\hat{H} = \sum_{l=1}^{L} H_{l,l+1}$

Elsőszomszéd kölcsönhatás: $H_{l,l+1} = I_{l,l+1} - P_{l,l+1}$

Példa: $H_{12}|\uparrow\uparrow\rangle = H_{12}|\downarrow\downarrow\rangle = 0 \qquad H_{12}|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$

A Tr ciklikus $\longrightarrow$ periodikus határfeltétel +
transzlációinvariancia: $e^{iP} = 1.$

<u>Feladat:</u> keressük a $\hat{H}$ sajátértékeit: $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$.

<u>Észrevétel:</u> a $\hat{H}$ megőrzi a $\uparrow$ és $\downarrow$ spinek számát.
$n_\uparrow + n_\downarrow = L$ a rácspontok száma.

Miért kell "intelligens" eljárás, Bethe Ansatz?

Ha az $n_\uparrow =$ fix szektorban diagonalizálunk akkor egy
$\begin{pmatrix} L \\ n_\uparrow \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L \\ n_\uparrow \end{pmatrix}$ mátrixot kel diagonalizálni.

Pl: $L = 20 \quad n_\uparrow = 10$ akkor $\begin{pmatrix} L \\ n_\uparrow \end{pmatrix} \approx 200000$

<u>Intelligens eljárás: Koordináta Bethe Ansatz</u> (Bethe 1931)

<u>4 fő lépésből áll:</u>

1.) Találjunk egy "triviális" sajátállapotot. (vákum)
2.) Keressük meg az 1-részecske állapotokat
3.) Vizsgáljuk a 2-részecske problémát és találjuk meg
a 2-részecske S-mátrixot.
4.) 2-részcske S-mátrix $\longrightarrow$ m-részecskés hullámfüggvény.

1. lépés: triviális vákum: $|\uparrow \ldots \uparrow\rangle = |F\rangle$.
Teljesen ferromágneses állapot: $\hat{H}|F\rangle = 0$.

1-részecske állapotok: $[\hat{H}, \hat{n}_\downarrow] = 0 \longrightarrow$ 1 lefordított spin

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{L} A(n)\sigma_n^-|F\rangle \qquad \sigma_n^-|F\rangle = |\uparrow \ldots \uparrow \underbrace{\downarrow}_{n.} \uparrow \ldots \uparrow\rangle$$

Sajátérték egyenlet: $\hat{H}|\psi\rangle = E_1|\psi\rangle$.

$$2A(n) - A(n-1) - A(n+1) = E_1 A(n).$$

megoldás: $$A(n) = e^{ikn}$$

$$E_1 = 4\sin^2\tfrac{k}{2}.$$

Energia valóssága: $k \in \mathbb{R}$

A hullámfüggvény azonos minden $k \longrightarrow k + 2\pi\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}$ impulzusra, így $-\pi < k \leq \pi$. Ez a diszkrétség következménye.

Periodikus határfeltételek: $\sigma_{L+n}^- = \sigma_n^-$

$A(n+L) = A(n) \longrightarrow e^{ikL} = 1$ "primitív" Bethe egyenlet.

L db megoldás: $k_\ell = \frac{2\pi\ell}{L}, \quad -\frac{L}{2} < \ell \leq \frac{L}{2}, \quad \ell \in \mathbb{Z}$

Energia: $E_\ell = 4\sin^2\frac{k_\ell}{2}$ Impulzus: $P_\ell = k_\ell$

SYM: $e^{iP_\ell} = 1$ feltételt kell kiróni, így csak az $\ell = 0, \quad k = 0$ megoldás elfogadható.

$$E_{\ell=0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta D = 0.$$

2-részecske állapotok

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1<n_2} A(n_1,n_2)\sigma^-_{n_1}\sigma^-_{n_2}|F\rangle \qquad |\uparrow \ldots \underbrace{\downarrow}_{n_1.} \ldots \underbrace{\downarrow}_{n_2.} \ldots \uparrow\rangle$$

$$\hat{H}|\psi\rangle = E_2|\psi\rangle$$

Ha $n_1 < n_2 - 1$:

$$\begin{aligned} 2A(n_1,n_2) - A(n_1-1,n_2) - A(n_1+1,n_2) &\quad + \\ 2A(n_1,n_2) - A(n_1,n_2-1) - A(n_1,n_2+1) &\quad = \quad E_2A(n_1,n_2) \end{aligned}$$

Ha $n_1 = n_2 - 1$:

$$2A(n_1,n_1{+}1) - A(n_1{-}1,n_1{+}1) - A(n_1,n_1{+}2) = E_2A(n_1,n_1{+}1).$$

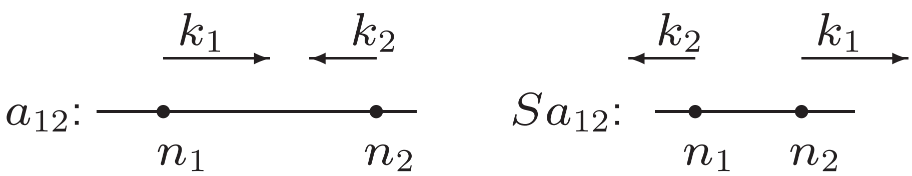
Ansatz: $A(n_1,n_2) = a_{12}e^{ik_1n_1+ik_2n_2} + a_{21}e^{ik_2n_1+ik_1n_2}$

Első egyenletből: $E_2 = E_1(k_1) + E_1(k_2)$

Második egyenletből: $a_{21} = S(k_1,k_2)a_{12}$

"szórási fázis": $S(k_1,k_2) = -\frac{e^{i(k_1+k_2)}-2e^{ik_2}+1}{e^{i(k_1+k_2)}-2e^{ik_1}+1}$

Fizikai kép:

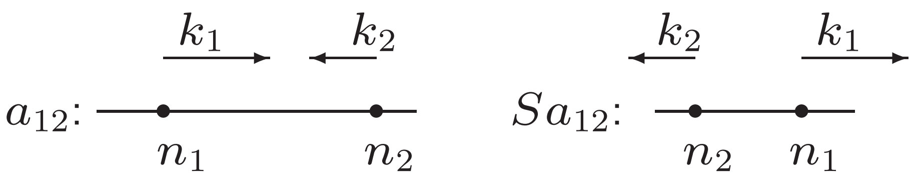


Szórás: impulzust cserélnek, taszítják egymást

Másképpen: írjuk át a hullámfüggvényt:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1,n_2} \tilde{A}(n_1,n_2)\sigma^-_{n_1}\sigma^-_{n_2}|F\rangle$$

$$\tilde{A}(n_1,n_2) = \{a_{12}\Theta(n_2-n_1) + a_{21}\Theta(n_1-n_2)\}e^{ik_1n_1+ik_2n_2}$$



Szórás: helyet cserélnek

Periodikus határfeltételek:

$$\tilde{A}(0,n_2) = \tilde{A}(L,n_2) \longrightarrow e^{ik_1L} = S(k_2,k_1)$$

$$\tilde{A}(n_1,0) = \tilde{A}(n_1,L) \longrightarrow e^{ik_2L} = S(k_1,k_2)$$

Azonosság: $S(k_1,k_2)S(k_2,k_1) = 1$

SYM: ciklikusság: $e^{i(k_1+k_2)} = 1$

legyen: $k_1 = -k_2 = k$

Bethe egyenlet: $e^{ikL} = S(-k, k)$

Megoldás: $k_\ell = \frac{2\pi\ell}{L-1} \qquad \ell \in \{1, ..., L-1\}$

Energia: $E_\ell = 8 \sin^2 \frac{\pi\ell}{L-1}$.

m-részecskés általánosítás

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1,\ldots,n_m} \tilde{A}(n_1,\ldots,n_m)\sigma^-_{n_1}\ldots\sigma^-_{n_m}|F\rangle$$

$$\tilde{A}(n_1,\ldots,n_m) = \sum_P a_P \; \Theta(n_p) \; \exp\left(i \sum_{j=1}^{m} k_j n_j \right)$$

P az (1,2,...m) egy permutációja

$$\Theta(n_P) = \begin{cases} 1 \;, & \text{ha} \quad n_{P_1} < n_{P_2} < \ldots < n_{P_m} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A különböző részecskesorrendekhez tartozó amplitúdók között az S-mátrix teremt kapcsolatot, ha:

$$P = (p_1,..,i,j,\ldots p_m)$$

$$P' = (p_1,..,j,i,\ldots p_m)$$

csak egy szomszédos pár cseréjében különböznek, akkor:

$$a_{P'} = S(k_i,k_j)a_P$$

A $P_0 = (1,2,..,m)$-hez tartozó a_{P_0} amplitúdóból az összes a_P amplitúdó egyértelműen előállítható.

Pl. 3-részecske hullámfüggvény

$$\tilde{A}(n_1, n_2, n_3) = e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2 + ik_3 n_3}\{a_{123}\Theta(123) + a_{213}\Theta(213) + a_{132}\Theta(132) + a_{231}\Theta(231) + a_{312}\Theta(312) + a_{321}\Theta(321)\}$$

$a_{123} = 1$ normálás

$(213) = \text{"}(123) \longrightarrow (213)\text{"}$ $\quad a_{213} = S(k_1, k_2)$

$(132) = \text{"}(123) \longrightarrow (132)\text{"}$ $\quad a_{132} = S(k_2, k_3)$

$(231) = \text{"}(123) \longrightarrow (213) \longrightarrow (231)\text{"}$

$$a_{231} = S(k_1, k_2)S(k_1, k_3)$$

$(312) = \text{"}(123) \longrightarrow (132) \longrightarrow (312)\text{"}$

$$a_{312} = S(k_2, k_3)S(k_1, k_3)$$

$(321) = \text{"}(123) \longrightarrow (213) \longrightarrow (231) \longrightarrow (321)\text{"}$

$$a_{321} = S(k_1, k_2)S(k_2, k_3)S(k_1, k_3)$$

Bethe egyenletek: $$e^{ik_l L} = \prod_{j=1, j\neq l}^{m} S(k_j, k_l)$$

Energia: $$E = \sum_{j=1}^{m} E_1(k_j)$$

Ciklikusság: $$\prod_{j=1}^{m} e^{ik_j} = 1$$

Rapiditás változók: $$u_j = \frac{1}{2} \cot \frac{k_j}{2} \qquad j = 1, .., m$$

Bethe egyenletek: $$\left(\frac{u_k - \frac{i}{2}}{u_k + \frac{i}{2}}\right)^L = \prod_{j=1, j\neq k}^{m} \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}$$

Energia: $$E = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{i}{u_k + \frac{i}{2}} - \frac{i}{u_k - \frac{i}{2}}\right)$$

Ciklikusság: $$\prod_{j=1}^{m} \frac{u_k + \frac{i}{2}}{u_k - \frac{i}{2}} = 1$$

Lényeg: a 2-részecske szórási amplitúdó már egyértelműen meghatározza az m-részecskés hullámfüggvényt.

Integrálhatóság: az m-részecskés hullámfüggvényt m db $\{k_\ell\}_{\ell=1}^{m}$ megmaradó impulzussal jellemezhetem. Nemcsak a teljes impulzus, hanem az 1-részecske impulzusok is megmaradnak.
m-részecske $\longrightarrow$ m db megmaradó mennyiség

$SU(N)$ spinlánc

Fundamentális ábrázolás: N db spin orientáció lehetséges:

$$|0\rangle, |1\rangle, ..., |N-1\rangle$$

Hamilton operátor: $\hat{H} = \sum_{j=1}^{L} H_{j,j+1} \qquad H_{ij} = I_{ij} - P_{ij}$

Elemi gerjesztéseket "íz" index is jellemzi.

Észrevétel: a $\hat{H}$ nem változtatja meg a láncban az egyes ízek számát.

Koordináta Bethe Ansatz

Triviális vákum: $|\underbrace{00...0...0}_{Ldb}\rangle \equiv |0\rangle$

1-részecske állapotok:

$$|\psi^{(a)}\rangle = \sum_{n=1}^{L} A_a(n)\, \sigma_n^{+a}\, |0\rangle \qquad\qquad |0...\underbrace{a}_{n.}...0\rangle$$

Megoldás: $\qquad A_a(n) = e^{ikn}$

$$E_1^a(k) = 4\,\sin^2\frac{k}{2} \qquad a \in \{1, 2, ..., N-1\}$$

Periodikus határfeltétel: $e^{ikL} = 1$

2-részecske állapotok:

hullámfüggvény: a két részecske koordinátáitól és az ízeitől is függ.

$\hat{H}$ lineáris differencia operátorként hat a hullámfüggvényen.

A 2-részecske hullámfüggvény: $\psi_{a_1 a_2}(n_1, n_2) =$

$$e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2}\big(A_{a_1 a_2}(12)\,\Theta(n_1 < n_2) \quad + \quad A_{a_1 a_2}(21)\,\Theta(n_2 < n_1)\big)$$
$$e^{ik_2 n_1 + ik_2 n_2}\big(A_{a_2 a_1}(12)\,\Theta(n_1 < n_2) \quad + \quad A_{a_2 a_1}(21)\,\Theta(n_2 < n_1)\big)$$

$$A_{a_1 a_2}(21) = S^{b_1 b_2}_{a_1 a_2}(k_1, k_2)\, A_{b_1 b_2}(12)$$

$S(k_1, k_2)$ egy $(N-1)^2 \times (N-1)^2$-es mátrix, mert a részecskék helyet és kvantumszámokat (ízt) is cserélhetnek.

Rapiditás változókban:

$$S^{12} \equiv S(k_1, k_2) = \frac{1}{u_1 - u_2 + i}\big((u_1 - u_2)\, I_{12} - i\, P_{12}\big)$$

$$(I_{12})^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} = \delta^{b_1}_{a_1}\,\delta^{b_2}_{a_2} \qquad (P_{12})^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} = \delta^{b_2}_{a_1}\,\delta^{b_1}_{a_2}$$

2-részecske energia: $E_2 = E_1(k_1) + E_1(k_2)$

Periodikus határfeltétel:

$$\psi_{a_1 a_2}(0, n_2) = \psi_{a_1 a_2}(L, n_2) \longrightarrow \left(e^{ik_1 L}\, S(k_1, k_2) - 1\right) A(12) = 0$$

$$\psi_{a_1 a_2}(n_1, 0) = \psi_{a_1 a_2}(n_1, L) \longrightarrow \left(S(k_1, k_2) - e^{ik_2 L}\right) A(12) = 0$$

$A(12)$ egy vektor, ezek sajátérték egyenletek.

Az S-mátrix sajátértékei határozzák meg az impulzusok kvantálását.

M-részecskés hullámfüggvény

$$\psi_{a_1 \ldots a_M}(n_1, \ldots, n_M) = \sum_P e^{i \sum\limits_{j=1}^{M} k_j n_{p_j}} \sum_Q A_{a_{p_1}, \ldots, a_{p_M}}(Q)\, \Theta(x_Q)$$

P és Q az (1,2,...,M) indexek egy-egy permutációja

$$\Theta(x_Q) = \begin{cases} 1\ , & \text{ha} \quad n_{Q_1} < n_{Q_2} < \ldots < n_{Q_M} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ha Q és Q' olyan, hogy ők csak két szomszédos elem sorrendjében különböznek:

$$Q: \qquad n_{Q_1} < n_{Q_2} < ... < n_{Q_\ell} < n_{Q_{\ell+1}} < ... < n_{Q_M}$$

$$Q': \qquad n_{Q_1} < n_{Q_2} < ... < n_{Q_{\ell+1}} < n_{Q_\ell} < ... < n_{Q_M}$$

$$Q_\ell = i \qquad Q_{\ell+1} = j \qquad Q' = P_{ij}Q$$

ekkor: $A(Q') = S^{ij} A(Q)$

$A_{a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_M}(Q') = (S^{ij})_{a_i a_j}^{b_i b_j} A_{a_1 \ldots b_i .. b_j \ldots a_M}(Q)$

$S^{ij} \equiv S(k_i, k_j) = \frac{1}{u_i - u_j + i}\big((u_i - u_j)\, I_{ij} - i\, P_{ij}\big)$

<u>Konzisztencia feltételek:</u>

"inverzió": $S^{ij} S^{ji} = 1$

"függetlenség": $S^{ij} S^{kl} = S^{kl} S^{ij} \qquad i \neq j \neq k \neq l$

Yang-Baxter: $S^{jk}S^{ik}S^{ij} = S^{ij}S^{ik}S^{jk}$

$$\begin{array}{ccc}
n_1 < n_2 < n_3 & \xrightarrow{S^{12}} & n_2 < n_1 < n_3 \\
\downarrow S^{23} & & \downarrow S^{13} \\
n_1 < n_3 < n_2 & & n_2 < n_3 < n_1 \\
\downarrow S^{13} & & \downarrow S^{23} \\
n_3 < n_1 < n_2 & \xrightarrow{S^{12}} & n_3 < n_2 < n_1
\end{array}$$

Periodikus határfeltételek:

$$\psi_{a_1 \ldots a_M}(n_1, \ldots, n_\ell = 0, \ldots, n_M) = \psi_{a_1 \ldots a_M}(a_1, \ldots, n_\ell = L, \ldots, n_M)$$

$$Q_1 : n_\ell < n_{Q_2} < n_{Q_3} < \ldots < n_{Q_M}$$

$$Q_2 : n_{Q_2} < n_{Q_3} < \ldots < n_{Q_M} < n_\ell$$

$$A(Q_1) = e^{ik_\ell L} A(Q_2)$$

$$A(\ell, 1, 2, \ldots, \ell{-}1, \ell{+}1, .., M) = e^{ik_\ell L}\, A(1, 2, \ldots \ell{-}1, \ell{+}1, \ldots M, \ell)$$

$$S^{1\ell}S^{2\ell} \ldots S^{\ell-1,\ell}\, A(Q_0) = e^{ik_\ell L}\, S^{\ell M}S^{\ell, M-1} \ldots S^{\ell,\ell+1}\, A(Q_0)$$

$$Q_0 = (1, 2, 3, .., M)$$

$$e^{ik_\ell L}\,\hat{Z}_\ell\,A(Q_0) = A(Q_0) \qquad \ell = 1, ..., M$$

$$\hat{Z}_\ell = S^{\ell,\ell-1} S^{\ell,\ell-2} ... S^{\ell 1} S^{\ell M} S^{\ell,M-1} ... S^{\ell,\ell+1}$$

$$\hat{Z}_\ell\,\hat{Z}_k = \hat{Z}_k\,\hat{Z}_\ell \qquad \forall \ell, k$$

N db sajátérték egyenletet kaptam

$Z_\ell\ :\ (k_1, k_2, ..., k_M)$ csatolási állandóktól függő kommutáló Hamilton operátoroknak tekinthetők, amelyek az $N-1$ dimenziós íz tér M-szeres tenzor szorzatán hatnak.

Hilbert tér: $N-1$ állapotú M elemű spinlánc.

<u>Koordináta Bethe ansatz:</u>

triviális vákum: $|\underbrace{11...1...1}_{M db}\rangle \equiv |0\rangle$

1-részecske,2-részecske, M_2-részecske $\longrightarrow$ $N-2$ állapotú, M_2 elemű spinlánc

<u>Koordináta Bethe ansatz:</u>

triviális vákum: $|\underbrace{22...2...2}_{M_2 db}\rangle \equiv |0\rangle$

1-részecske,2-részecske, M_3-részecske $\longrightarrow$ $N-3$ állapotú, M_3 elemű spinlánc stb.

amíg 2-állapotú rendszert nem kapok, ami skalár kvantálási egyenletekre vezet.

A procedúra $N-1$ lépésből áll

$N-1$ lépés $\longrightarrow$ $N-1$ gyöktípus $u_{\ell,k} \longrightarrow \begin{cases} \ell = 1, ..., N-1 \\ k = 1, 2, ..., M_\ell \end{cases}$

Nested Bethe Ansatz

$$\left(\frac{u_{1k}+\frac{i}{2}}{u_{1k}-\frac{i}{2}}\right)^L = \prod_{j=1, j\neq k}^{M} \frac{u_{1k}-u_{1j}+i}{u_{1k}-u_{1j}-i} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{u_{1k}-u_{2j}-\frac{i}{2}}{u_{1k}-u_{2j}+\frac{i}{2}}$$

$$k = 1, ..., M$$

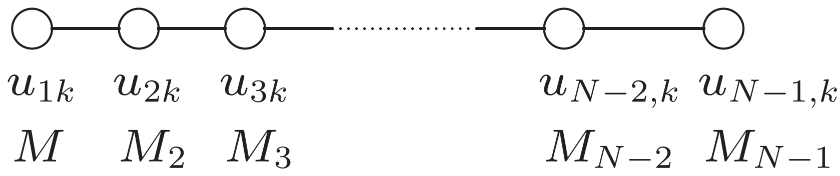
$$1 = \prod_{j=1}^{M_{\ell-1}} \frac{u_{\ell,k}-u_{\ell-1,j}-\frac{i}{2}}{u_{\ell,k}-u_{\ell-1,j}+\frac{i}{2}} \prod_{j=1, j\neq k}^{M_\ell} \frac{u_{\ell,k}-u_{\ell,j}+i}{u_{\ell,k}-u_{\ell,j}-i} \times$$

$$\prod_{j=1}^{M_{\ell+1}} \frac{u_{\ell,k}-u_{\ell+1,j}-\frac{i}{2}}{u_{\ell,k}-u_{\ell+1,j}+\frac{i}{2}} \qquad \ell = 2, ..., N-2, \qquad k = 1, .., M_\ell$$

$$1 = \prod_{j=1}^{M_{N-1}} \frac{u_{N-1,k}-u_{N-2,j}-\frac{i}{2}}{u_{N-1,k}-u_{N-2,j}+\frac{i}{2}} \prod_{j=1, j\neq k}^{M_{N-2}} \frac{u_{N-1,k}-u_{N-1,j}+i}{u_{N-1,k}-u_{N-1,j}-i}$$

$$k = 1, ..., M_{N-1}$$

Szemléltetés: $SU(N) \longrightarrow A_{N-1}$ Dynkin-diagram



A Bethe állapotok $SU(N)$ szerinti kvantumszámait az egyes gyöktípusok számával fejezhetjük ki.

Bethe egyenletek Lie-algebra adatokkal:

$$\left(\frac{u_{\ell,k} - \frac{i}{2}V_\ell}{u_{\ell,k} + \frac{i}{2}V_\ell}\right)^L = \prod_{m=1}^{N-1}\prod_{j=1}^{M_m} \frac{u_{\ell,k} - u_{\ell,j} - \frac{i}{2}C_{\ell m}}{u_{\ell,k} - u_{\ell,j} + \frac{i}{2}C_{\ell m}}$$

$C_{\ell m} = -2\frac{\langle\alpha_\ell|\alpha_m\rangle}{\langle\alpha_\ell|\alpha_\ell\rangle}$ Cartan mátrix

V_ℓ az ábrázolás súlya

Ciklikusság: $1 = \prod_{\ell=1}^{N-1}\prod_{k=1}^{M_\ell} \frac{u_{\ell,k}+\frac{i}{2}V_\ell}{u_{\ell,k}-\frac{i}{2}V_\ell}$

Energia: $E = \sum_{\ell=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{M_\ell} \frac{V_\ell}{u_{\ell k}^2+\frac{1}{2}V_\ell^2}$

Hosszú hatótávolságú kölcsönhatás és a perturbatív Bethe Ansatz technika

Példa: $SU(2)$ szektor 3-hurok rendben:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{L} \left\{ H_0(j) + g^2\, H_2(j) + g^4\, H_4(j) + \ldots \right\}$$

$$H_0(j) = I_{j,j+1} - P_{j,j+1}$$

$$H_2(j) = -2I_{j,j+1} + 3P_{j,j+1} - \frac{1}{2}(P_{j,j+1}\, P_{j+1,j+2} + P_{j+1,j+2}\, P_{j,j+1})$$

$$\begin{aligned} H_4(j) &= \frac{15}{2}\, I_{j,j+1} - 13\, P_{j,j+1} + \frac{1}{2} P_{j,j+1}\, P_{j+2,j+3} \\ &+ 3\,(P_{j,j+1}\, P_{j+1,j+2} + P_{j+1,j+2}\,) \\ &- \frac{1}{2}(P_{j,j+1} P_{j+1,j+2} P_{j+2,j+3} + P_{j+2,j+3} P_{j+1,j+2} P_{j,j+1}) \end{aligned}$$

A modell g^4 rendig perturbatíven integrálható, azaz léteznek olyan Q_n $\quad n = 1, .., L$ töltések, hogy:

$$[Q_n, Q_m] = [Q_n, \hat{H}] = O(g^6) \qquad \forall n, m$$

Koordináta Bethe Ansatz

Triviális vákum: $|\uparrow \ldots \uparrow\rangle \equiv |0\rangle$

1-részecske állapotok: $|\psi\rangle = \sum\limits_n e^{ikn}\sigma_n^-|0\rangle$

energia: $E_1(k) = 4\sin^2\frac{k}{2} - 8g^2\,\sin^4\frac{k}{2} + 32\,g^4\,\sin^6\frac{k}{2} + \ldots$

"fizikus intuíció": $E_1(k) \approx \frac{1}{g^2}\left(\sqrt{1+8g^2\sin^2\frac{k}{2}} - 1\right)$

2-részecske állapotok: eddigi Ansatz nem működik

Új Ansatz $\longrightarrow$ perturbatív Bethe Ansatz (Staudacher '04)

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1<n_2} A(n_1,n_2)\,\sigma_{n_1}^-\sigma_{n_2}^-|0\rangle$$

$$\begin{aligned} A(n_1,n_2) = & \big(1 + B(n_2-n_1,k_1,k_2,g)\big)\,e^{ik_1n_1+ik_2n_2} + \\ & \big(1 + C(n_2-n_1,k_1,k_2,g)\big)\,S(k_1,k_2)\,e^{ik_2n_1+ik_1n_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(n_2-n_1,k_1,k_2,g) &= B_2(n_2-n_1,k_1,k_2)g^{2|n_2-n_1|} + \\ &+ B_4(n_2-n_1,k_1,k_2)g^{2+2|n_2-n_1|} + \ldots \\ C(n_2-n_1,k_1,k_2,g) &= C_2(n_2-n_1,k_1,k_2)g^{2|n_2-n_1|} + \\ &+ C_4(n_2-n_1,k_1,k_2)g^{2+2|n_2-n_1|} + \ldots \end{aligned}$$

Mindent csak g^4 rendig számolunk

Ha $|n_2 - n_1| > 3 =$ kh. hatótávolsága, akkor

$$A(n_1, n_2) \approx e^{ik_1 n_1 + ik_2 n_2} + S(k_1, k_2)\, e^{ik_2 n_1 + ik_1 n_2}$$

Az S-mátrix g^2-ben korrekciókat kap.

m-részecskére:

Aszimptotikus Bethe egyenletek: $e^{ik_\ell L} = \prod_{j=1, j\neq \ell}^{m} S(k_\ell, k_j)$

Érvényesség: $L >$ kh. hatótávolsága=pert. szám rendje

Energia: $E = \sum_{j=1}^{m} E_1(k_j)$

Impulzus: $P = \sum_{j=1}^{m} k_j$

Rapiditás: $u = \frac{1}{2} \cot \frac{k}{2} \sqrt{1 + 8\, g^2 \sin^2 \frac{k}{2}}$

$$e^{ik} = \frac{x(u + i/2)}{x(u - i/2)} \qquad x(u) = \frac{1}{2}\, u \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2g^2}{u^2}} \right)$$

$$\left(\frac{x(u_\ell + i/2)}{x(u_\ell - i/2)} \right)^L = \prod_{j=1, j\neq \ell}^{m} \frac{u_j - u_\ell - i}{u_j - u_\ell + i}$$

Hosszú hatótávolságú $SU(N)$ spinlánc

$$\hat{H} = \sum_{\ell} \left\{ H_{\ell,\ell+1} + g^2\, H_{\ell,\ell+1,\ell+2} + g^4\, H_{\ell,\ell+1,\ell+2,\ell+3} + \dots \right\}$$

Tfh. $\exists \quad [Q_n, Q_m] = [Q_n, \hat{H}] = 0, \qquad n, m \in \{1, 2, .., L\}$

A hosszú hatótávolságú kölcsönhatás következtében:

1.) változik a diszperziós reláció, azaz az impulzus rapiditás kapcsolat: $e^{ik} = \frac{x(u+i/2)}{x(u-i/2)}$

2.) Az S-mátrix egy skalár fázisfaktorral módosulhat:

$$S(u_1, u_2) \longrightarrow e^{2i\,\theta(u_1,u_2)}\, S(u_1, u_2)$$

$$\theta(u_1, u_2) = -\theta(u_2, u_1)$$

Bethe egyenletek:

$$\left[\frac{x(u_{1k} + i/2)}{x(u_{1k} - i/2)}\right]^L = \prod_{j=1, j\neq k}^{M} \left(\frac{u_{1k} - u_{1j} + i}{u_{1k} - u_{1j} - i}\, e^{2i\,\theta(u_{1k},u_{1j})} \right) \times$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{M_2} \frac{u_{1k} - u_{2j} - i/2}{u_{1k} - u_{2j} + i/2}$$

Többi egyenelet azonos az első-szomszéd kölcsönhatás esetével.

Az AdS/CFT aszimptotikus Bethe egyenletei

Bethe egyenletek (Perturbatív Nested Bethe Ansatz): (Beisert, Staudacher '05)

$$1=\left(\frac{x_{4k}^-}{x_{4k}^+}\right)^L \prod_{j=1,j\neq k}^{K_4}\left(\frac{u_{4k}-u_{4j}+i}{u_{4k}-u_{4j}-i}\,e^{2i\,\theta(x_{4k},x_{4j})}\right)\prod_{j=1}^{K_3}\frac{x_{4k}^- - x_{3j}}{x_{4k}^+ - x_{3j}}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{K_5}\frac{x_{4k}^- - x_{5j}}{x_{4k}^+ - x_{5j}}\prod_{j=1}^{K_1}\frac{1-\frac{g^2}{2\,x_{4k}^-\,x_{1j}}}{1-\frac{g^2}{2\,x_{4k}^+\,x_{1j}}}\prod_{j=1}^{K_7}\frac{1-\frac{g^2}{2\,x_{4k}^-\,x_{7j}}}{1-\frac{g^2}{2\,x_{4k}^+\,x_{7j}}}\qquad k=1...,K_4$$

$$1 \;=\; \prod_{j=1}^{K_2}\frac{u_{1k}-u_{2k}+i/2}{u_{1k}-u_{2k}-i/2}\prod_{j=1}^{K_4}\frac{1-\frac{g^2}{2\,x_{1k}\,x_{4j}^+}}{1-\frac{g^2}{2\,x_{1k}\,x_{4j}^-}}\qquad k=1...,K_1$$

$$1 \;=\; \prod_{j=1,j\neq k}^{K_2}\frac{u_{2k}-u_{2j}-i}{u_{2k}-u_{2j}+i}\prod_{j=1}^{K_3}\frac{u_{2k}-u_{3j}+i/2}{u_{2k}-u_{3j}-i/2}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{K_1}\frac{u_{2k}-u_{1j}+i/2}{u_{2k}-u_{1j}-i/2}\qquad k=1,..,K_2$$

$$1 \;=\; \prod_{j=1}^{K_2}\frac{u_{3k}-u_{2j}+i/2}{u_{3k}-u_{2j}-i/2}\prod_{j=1}^{K_4}\frac{x_{3k}-x_{4j}^+}{x_{3k}-x_{4j}^-}\qquad k=1,..,K_3$$

$$1 = \prod_{j=1}^{K_6} \frac{u_{5k} - u_{6j} + i/2}{u_{5k} - u_{6j} - i/2} \prod_{j=1}^{K_4} \frac{x_{5k} - x_{4j}^{+}}{x_{5k} - x_{4j}^{-}} \qquad k = 1, .., K_5$$

$$1 = \prod_{j=1, j\neq k}^{K_6} \frac{u_{6k} - u_{6j} - i}{u_{6k} - u_{6j} + i} \prod_{j=1}^{K_5} \frac{u_{6k} - u_{5j} + i/2}{u_{6k} - u_{5j} - i/2}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{K_1} \frac{u_{6k} - u_{7j} + i/2}{u_{6k} - u_{7j} - i/2} \qquad k = 1, .., K_6$$

$$1 = \prod_{j=1}^{K_6} \frac{u_{7k} - u_{6k} + i/2}{u_{7k} - u_{6k} - i/2} \prod_{j=1}^{K_4} \frac{1 - \frac{g^2}{2\, x_{7k}\, x_{4j}^{+}}}{1 - \frac{g^2}{2\, x_{7k}\, x_{4j}^{-}}} \qquad k = 1..., K_7$$

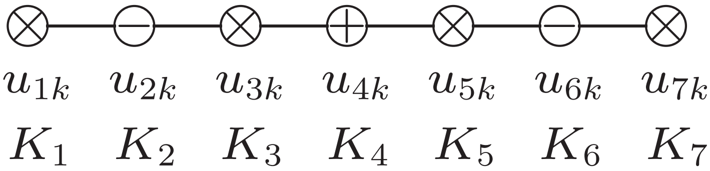
Ciklikusság: $1 = \prod_{j=1}^{K_4} \frac{x_{4j}^{+}}{x_{4j}^{-}}$

ahol: $x^{\pm}(u) = x(u \pm i/2) \qquad x(u) = \frac{1}{2}\, u \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2g^2}{u^2}}\right)$

A fázisfaktor (Beisert, Eden, Staudacher '07, Dorey, Hofmann, Maldacena '07): $\theta(x_1, x_2) = \sum_{r,s=\pm} r \cdot s \cdot \chi(x_1^r, x_2^s)$

$$\chi(x_1, x_2) = -i \oint_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{2\pi} \frac{1}{x_1 - z_1} \oint_{|z_2|=1} \frac{dz_2}{2\pi} \frac{1}{x_2 - z_2} \cdot$$

$$\ln\Gamma\left(1 + i\, g \left(z_1 + \frac{1}{z_1} - z_2 - \frac{1}{z_2}\right)\right)$$



Energia v. anomális dimenzió:

$$\delta D = g^2\, E = g^2 \sum_{j=1}^{K_4} \left(\frac{i}{x_{4k}^+} - \frac{i}{x_{4k}^-} \right)$$

Példa: 1-hurok Konishi anomális dimenzió

$$L=2, K_1=K_7=K_2=K_6=0, \quad K_3=K_5=1, \quad K_4=2$$

1-hurok rendben: $x(u)=u, \quad x^{\pm}(u)=u\pm i/2$

A ciklikusságot is kielégítő megoldás:

$$u_{31}=u_{51}=0, \qquad u_{41}=-u_{42}=\frac{1}{\sqrt{12}} \qquad g^2=\frac{\lambda}{8\pi^2}$$

$$\delta D = g^2\left(\frac{i}{x_{41}^+}-\frac{i}{x_{41}^-}+\frac{i}{x_{42}^+}-\frac{i}{x_{42}^-}\right)=\frac{\lambda}{8\pi^2}\left(\frac{i}{u_{41}+\frac{i}{2}}-\right.$$

$$\left.\frac{i}{u_{41}-\frac{i}{2}}+\frac{i}{u_{42}+\frac{i}{2}}-\frac{i}{u_{42}-\frac{i}{2}}\right)=\frac{\lambda}{4\pi^2}\frac{\frac{1}{4}}{u_{41}^2+\frac{1}{4}}=\frac{3\lambda}{4\pi^2}$$

$PSU(2,2|4)$ Cartan mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$