

Szimmetriák és Lagrange-függvények

FIZIKAI RENDSZER	szimmetriák	ELMÉLETI LEHETŐSÉGEK
---------------------	-------------	-------------------------

Feltevés: megszokott keret $\rightarrow$ Lagrange-formalizmus.

Szabad tömegpont:

1. mi a variációs elv;
2. mit nevezünk szimmetriának;
3. lehetséges Lagrange-függvények;
0. a nem-relativisztikus és relativisztikus téridőmodellben.

0. A nem-relativisztikus téridőmodell

- M négydimenziós affin tér $\mathbf{M}$ felett a *téridő*;
- $\tau : M \rightarrow I$ időkiértékelő függvény, alatta $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{I}$;
- $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}$ a térszerű vektorok altere skalárszorzással.

$V(1)$ affin tér az u sebességek halmaza, ezekre $\boldsymbol{\tau}(u) = 1$;

$\mathcal{N}$ az L valódi Noether- (vagy inhomogén Galilei-) transzformációk csoportja, alatta az $\mathbf{L}$ Galilei-transzformációk csoportjával;

a Lie-algebrák segítségével $L = e^{s \cdot H}$ és $\mathbf{L} = e^{s \cdot \mathbf{H}}$ alakú az egység közelében.

1. A variációs elv

Adott $\mathfrak{L} : M \times V(1) \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{I}$ Lagrange-függvény, mellyel

a hatásfüggvény: $S : r \mapsto S(r) := \int_{\tau(x_0)}^{\tau(x_1)} \mathfrak{L}(r(t), \dot{r}(t)) dt.$

$V := \{r : [\tau(x_0), \tau(x_1)] \rightarrow M | r \text{ átmegy } x_0\text{-on és } x_1\text{-en}\}.$

V affin tér, ekkor $S : V \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

A megvalósuló pályára $DS(r)=0$, így az Euler-Lagrange egyenlet:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}(x, u)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}(x, u)}{\partial u} \right)_{\substack{x=r(t) \\ u=\dot{r}(t)}} = 0 \quad .$$

2. Szimmetriák

A szimmetriatranszformáció során a DS derivált maradjon invariáns, azaz $\mathfrak{L}$ teljes időderiválttal változzon.

A szabad tömegpont *definíció szerint* szimmetrikus minden L Noether- és alatta fekvő $\mathbf{L}$ Galilei-transzformációra:

$$(\forall L \in \mathcal{N}) \exists \phi : M \rightarrow \mathbb{R} : \mathfrak{L}(Lx, \mathbf{L}u) - \mathfrak{L}(x, u) = D\phi(x) u ,$$

akkor

$$\mathfrak{L}(Lr(t), \mathbf{L}\dot{r}(t)) - \mathfrak{L}(r(t), \dot{r}(t)) = \frac{d}{dt}\phi(r(t)) .$$

3. Lehetséges Lagrange-függvények

Az előző egyenletben az $L = e^{s \cdot H}$ és $\mathbf{L} = e^{s \cdot \mathbf{H}}$ alakokat behelyettesítve, majd a ϕ deriváltjaira vonatkozó Young-tétel kihasználásával:

- A téridő-eltolásokkal $\mathfrak{L}(x, u) = g(x) \cdot u + \varphi(u)$, ahol $Dg - (Dg)^* = \text{konst.}$
- Az összes Noether-transzformáció segítségével $\mathfrak{L}(x, u) = \frac{1}{2}m|u - c|^2$ valamilyen $c \in V(1)$ -re.

Magasabb deriváltak $\mathfrak{L}$ -ben

Megvizsgálható, hogy a szimmetriakövetelmények milyen formában engedik meg $\mathfrak{L}$ függését az a gyorsulásértékektől, vagy még magasabb deriváltaktól. Az eredmény: $\mathfrak{L}$ magasabb deriváltakat csak külön additív tagban tartalmazhat:

$$\mathfrak{L}(x, u, a) = \frac{1}{2}m|u - c|^2 + \mathfrak{L}_1(a) \quad .$$

Ezért a mozgásegyenletben nem jelenhet meg $\alpha \ddot{r}$ tag, pedig a Lorentz-Dirac egyenlet szokásos formája

$$m \ddot{r} = \alpha \ddot{r} \quad .$$

0. A relativisztikus téridőmodell

- M négydimenziós affin tér $\mathbf{M}$ felett a *téridő*;
- $\mathbf{I}$ az *időtartamok* egydimenziós vektortere;
- g a *Lorentz-forma* $\mathbf{M}$ -en.

$V(1)$ az u sebességek halmaza, ezekre $u \cdot u = -1$, itt $V(1)$ nem affin tér;

$\mathcal{P}$ az L valódi Poincaré- (vagy inhomogén Lorentz-) transzformációk csoportja, alatta az $\mathbf{L}$ Lorentz-transzformációk csoportjával;

a Lie-algebrák segítségével $L = e^{s \cdot H}$ és $\mathbf{L} = e^{s \cdot \mathbf{H}}$ alakú az egység közelében.

A variációs elv; eredmények

Naív módon $S(r) := \int_{r^{-1}(x_0)}^{r^{-1}(x_1)} \mathfrak{L}(r(t), \dot{r}(t)) dt$; csak hogy $\{r\}$
és $V(1)$ sem affin tér!

Új paraméterezés: $\mathbf{1} \in \mathbf{I}$ -re

$$p : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow \text{Ran } r \quad ;$$

ekkor $\dot{p}(s) \in N^\rightarrow$, ahol $N^\rightarrow$ a jövőszerű vektorok halmaza vektortér, és $V(1) \subset N^\rightarrow$.

$\mathfrak{L}$ -t kiterjesztjük a hét szabadsági fokú $M \times V(1)$ -ről a nyolcdimenziós $M \times N^\rightarrow$ affin térre a következő megszorítással:

$$\mathfrak{L}(x, w) = \mathfrak{L}(x, \frac{w}{|w|}) \cdot |w| \quad .$$

$$V := \{p : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow M | p(\mathbf{0}) = x_0 \text{ és } p(\mathbf{1}) = x_1\}$$

affin tér, amivel a hatás

$$S : V \rightarrow \mathbb{R} ; S(p) := \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathfrak{L}(p(s), \dot{p}(s)) ds = S(r)$$

adott r mellett nem függ a p paraméterezés választásától.

A nem-relativisztikushoz hasonló levezetés eredménye:

$$\mathfrak{L}(x, w) = m |w| \quad ,$$

amit a hatásba visszaírva szokásos módon az x_0 és x_1 pontok között r mentén eltelt sajátidőt kapjuk.

Tehát:

- A szokásos Lagrange-függvényeket kapjuk, de korántsem egyszerű módon.
- A tér és idő homogenitása nem elég $\mathfrak{L}$ téridőtől való függetlenséghez, pl. $\mathfrak{L}(x, u) := u \cdot B(x - o)$ ahol $o \in M$ és B antiszimmetrikus leképezés.
- A relativisztikus levezetés $\mathfrak{L}$ átparaméterezése után egészen hasonló a nem-relativisztikus esethez.
- Tisztább látásmódot kaphatunk pl. a
 - Noether-tételek,
 - több részecske-rendszerek,
 - mezőktovábbi vizsgálatához.