Feladatmegoldás numerikusan. Mi van, ha nem tudok programozni?

Műhely-foglalkozás

62. ORSZÁGOS FIZIKATANÁRI ANKÉT ÉS ESZKÖZBEMUTATÓ

Debrecen, 2019. március 13-16.

Dr. Beszeda Imre, Nyíregyházi Egyetem

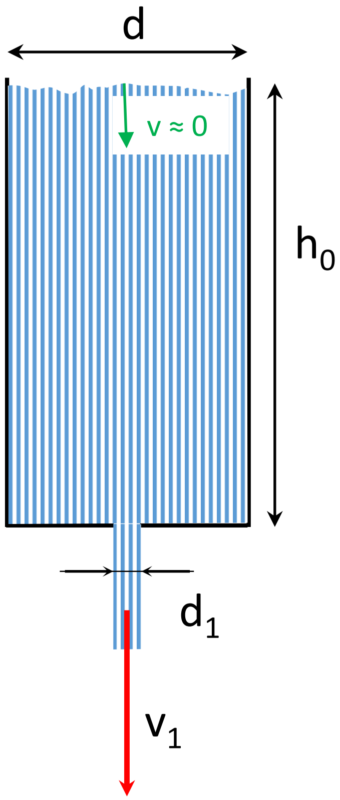
Numerikusan megoldható feladatok megoldási lehetőségeinek áttekintése, az algoritmus végiggondolása és megvalósítása néhány konkrét feladat megoldásával. Ha valaki nem tud programozni, akkor a feladat többé-kevésbé táblázatkezelőben is megoldható (esetleg esetenként még egyszerűbb is).

Néhány feladat:

1. Vízszint süllyedésének időfüggése tartály kiürülése közben
2. Rugón rezgő test mozgásának vizsgálata
3. Ejtőernyős mozgásának vizsgálata a közegellenállás figyelembe vételével
4. Mozgás pályájának szimulációja gravitációs térben
5. Sas üldözi a nyulat
6. Asztalon lecsúszó súlyos lánc mozgásának vizsgálata
7. Csigán átvetett súlyos lánc mozgásának vizsgálata
8. Vízzel töltött tartálykocsi mozgásának vizsgálata a kifolyócsap kinyitása után

→ **numerikus feladatmegoldás táblázatkezelőben:**

Vízszint süllyedésének időfüggése tartály kiürülése közben



A konkrét feladat pl. ez lehet:
adott egy 1m átmérőjű, magas tartály, az alján 5cm átmérőjű csappal. A kezdeti vízszint 2m. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály? Ábrázoljuk a vízszint-süllyedés időfüggését a tartály kiürülése közben!

Ha $d >> d_1$, és így $v_1 >> v$ (más szavakkal v ≈ 0), akkor alkalmazható a Torrichelli-féle kiömlési törvény:

$$v_1 = \sqrt{2gh},$$

ahol *h* a kiömlőnyílás fölötti aktuális folyadékszint-magasság.

Úgy célszerű eljárni, hogy a folyadék kifolyását olyan kis Δt időintervallumokra bontjuk, amennyi idő alatt a szintsüllyedés elhanyagolható, azaz a kiáramlás sebessége közelítőleg állandónak vehető. Ezzel a Δt idő alatt kiáramlott folyadék mennyiségét meghatározzuk, abból a szintsüllyedést, majd az új *h* magasságot, és innen kezdjük elölről, azaz kaptunk egy ú.n. ciklust, amit addig kell ismételgetni (mindig az új értékekkel), amíg az összes folyadék el nem fogy:

tehát a számolás lépései (a ciklus):

adott *h* magasság esetén	$v_1 = \sqrt{2gh},$
ebből a kiömlés intenzitása	$I = A_1 \cdot v_1$
ebből a Δt idő alatt kifolyt víz	$\Delta V = I \cdot \Delta t$
amiből a szintsüllyedés	$\Delta h = {}^{\Delta V}/_{A}$
és ebből az új vízszint	$h_{új} = h_{régi} - \Delta h$
viszont indexelni nem érdemes, írhatjuk így is	$h = h - \Delta h$

ami azt jelenti, hogy a *h* változó új értéke legyen egyenlő a régi érték mínusz a változás.

már csak a kezdeti értékeket illetve Δt - t kell megadni és pl excelben meg lehet szerkeszteni a ciklust: egy ciklus egy sor lesz:

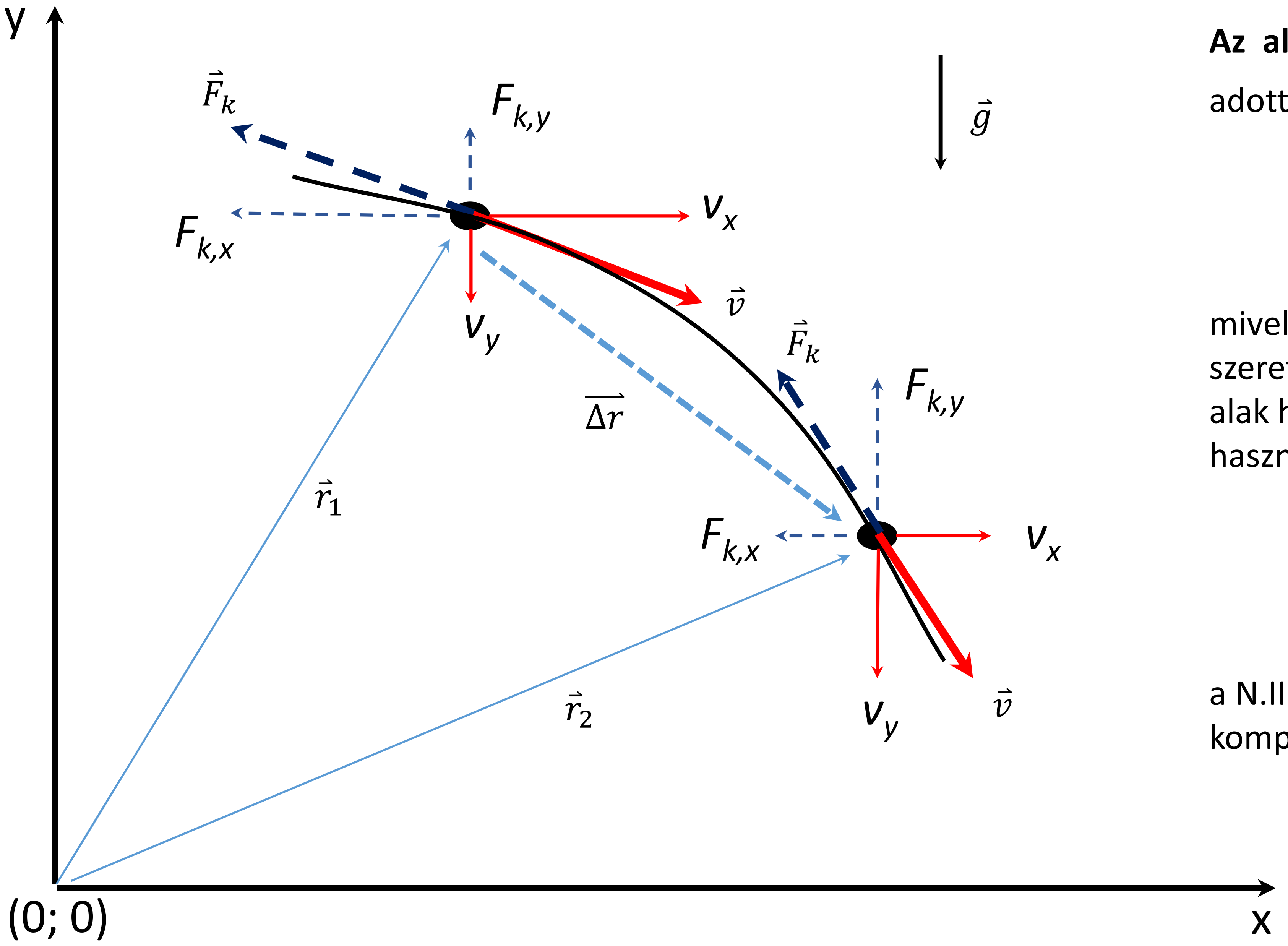
kezdeti adatok - a sárgákat lehet változtatni:			
Δt (t)	$R_{tartály}$ (m)	víz szint, h (m)	R_{lyuk} (m)
1	0,5	2	0,025
	keresztmetszet (m^2)		keresztmetszet
	0,785398163		0,001963495

idő	kiömlési sebesség	intenzitás	kiömlött víz	vízszint süllyedés	vízszint	
idő (s)	**v'** (m/s)	**I** (m^3/s)	**ΔV** (m^3)	**Δh** (m)	**h** (m)	
0	0	0	0	0	2	← kiindulási állapot
1	6,324575	0,012418	0,012418	0,015811	1,984189	← első ciklus – az értékeket a fölötte levő sorból számoljuk
2	6,299525	0,012369	0,012369	0,015749	1,96844	← 2. ciklus – az értékeket a fölötte levőből számoljuk
3	6,274475	0,01232	0,01232	0,015686	1,952754	
4	6,274475	0,01232	0,01232	0,015686	1,937067	és így tovább…
5	6,249425	0,012271	0,012271	0,015624	1,921444	
6	6,224274	0,012221	0,012221	0,015561	1,905883	
7	6,199122	0,012172	0,012172	0,015498	1,890385	
8	6,17397	0,012123	0,012123	0,015435	1,87495	
9	6,148816	0,012073	0,012073	0,015372	1,859578	
10	6,123662	0,012024	0,012024	0,015309	1,844269	

Ha pontosabban akarunk számolni, akkor figyelembe vehetjük azt a korrekciót, amit a szint süllyedésének figyelembe vétele okoz a $v_1 = \sqrt{2gh}$ összefüggésben a gyökjel alatti $1 - \left(\frac{A_1}{A}\right)^2$ formájában a nevezőben. Egyszerű behelyettesítéssel kipróbálhatjuk, hogy az 1m-es hordó átmérő mellett az 5cm-es kifolyócső-átmérő értékek esetén ez a korrekció tényleg elhanyagolható: $1 - \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 = 0{,}999994 \approx 1$.

Ejtőernyős mozgásának vizsgálata a közegellenállás figyelembe vételével – egy 2D feladat:

1 km magasan, vízszintesen 360km/h sebességgel haladó repülőgépből kiugrik egy ejtőernyős. Ilyen kérdéseket tehetünk fel: rajzoltassuk ki a mozgásának pályáját! Mennyi munkát végez rajta a közegellenállási erő a földet érésig? Mekkora sebességgel ér földet?



Az algoritmus lépései:

adott pillanatban a közegellenállási erő:

$$\vec{F}_k = -½ \cdot c \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \vec{v}^o =$$

$$= -½ \cdot c \cdot A \cdot \rho \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v}$$

mivel a pálya pontjait az x-y síkon (a képernyőn) szeretnénk kirajzoltatni, ezért a fenti vektoros alak helyett az x- és y komponenseket használjuk:

$$F_{kx} = -½ \cdot c \cdot A \cdot \rho \cdot |\vec{v}| \cdot v_x$$

$$F_{ky} = -½ \cdot c \cdot A \cdot \rho \cdot |\vec{v}| \cdot v_y$$

a N.II. törvényét felhasználva a gyorsulás-komponensek:

$$a_x = \frac{F_{kx}}{m} \quad \text{illetve} \quad a_y = \frac{F_{ky}}{m} - g$$

ebből egy rövid *Δt* idő alatt bekövetkező sebességváltozás:

ebből egy rövid *Δt* idő alatt bekövetkező sebességváltozás (ha feltételezzük, hogy a *Δt* idő alatt az elmozdulása olyan kicsi, hogy a sebesség állandónak vehető, ezzel együtt a közegellenállási erő is állandó, és így konstans gyorsulással mozog):

$$\Delta v_x = a_x \cdot \Delta t \quad \text{illetve} \quad \Delta v_y = a_y \cdot \Delta t$$

ebből úgy határozzuk meg az új sebességet, hogy a korábbihoz hozzáadjuk a sebességváltozást:

$$v_x = v_x + \Delta v_x \qquad \text{illetve} \qquad v_y = v_y + \Delta v_y$$

(emlékeztetőül: itt a *v = v + Δv* alakú kifejezés azt jelenti, hogy a *v* változó új értéke legyen egyenlő a *v* régi értéke *+ Δv.*)

feltételezve, hogy a *Δt* időtartam alatt egyenletesen mozog, meg tudjuk határozni a test elmozdulását majd az új helyzetét:

$$\Delta r_x = v_x \cdot \Delta t \qquad \text{illetve} \qquad \Delta r_x = v_x \cdot \Delta t$$

$$r_x = r_x + \Delta r_x \qquad \text{illetve} \qquad r_y = r_y + \Delta r_y$$

⟵ itt a ciklus vége, mehetünk vissza az elejére és az új sebességből számoljuk az új közegellenállási erőt, stb…

a helykoordinátákat rajzoltatva megkapjuk a pályagörbe pontjait.

kérdés volt még a közegellenállási erő által a testen (a mozgás során) végzett munka:

a *Δt* idő alatti elemi elmozduláshoz tartozó munka értéke = $\Delta W = \left|\vec{F}_k\right| \cdot \left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = \sqrt{F_{kx}^2 + F_{ky}^2} \cdot \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2}$

Tehát a feladat: 1 km magasan, vízszintesen 360km/h sebességgel haladó repülőgépből kiugrik egy ejtőernyős. Ilyen kérdéseket tehetünk fel: rajzoltassuk ki a mozgásának pályáját! Mennyi munkát végez rajta a közegellenállási erő a földet érésig? Mekkora sebességgel ér földet? Stb…
Az egyszerűség kedvéért úgy feltételezzük, hogy az ejtőernyős „egyből nyitott ernyővel ugrik ki”, ami nyilván nem reális, azaz a számolás elejét korrigálni kellene a homlokfelület változtatásával.

A táblázatkezelőben megadjuk az ismert adatokat és beállítjuk a kezdeti feltételeket:

kezdeti adatok:		(a sárga mezőket lehet változtatni)	
	alaktényező =	1,2	
	homlokfelület =	25	m^2
	levegő sűrűsége =	1,29	kg/m^3
	tömege =	90	kg
t = 0-ban:	y_0 =	1000	m (a kezdeti magasság)
	x_0 =	0	m (az origó fölött ugrik ki)
	$v_{0,x}$ =	100	m/s
	$v_{0,y}$ =	0	m/s
	Δt =	0,001	s
	g =	10	m/s^2

figyelem: itt úgy vettük, hogy egyből „nyitott ernyővel ugrott ki”

Az várható, hogy a legelején – mivel nagy sebességgel mozog – irreálisan nagy közegellenállási erő fog rá hatni vízszintesen!!!

Az előbbi mondat alapján Δt értékét eleve kicsire érdemes választani, de kérdés, hogy mekkora legyen a „kicsi”? Próbálgatással eljutunk oda, hogy a 0,001s már megfelelő (nagyobb értékkel a számolás „elszáll”), viszont ha ezzel számolnánk végig, akkor borzasztóan hosszú lenne a számolás, ezért amikor már lelassul az ejtőernyős, onnantól érdemes nagyobb Δt értéket választani – ld. az excel-ben a számolást!

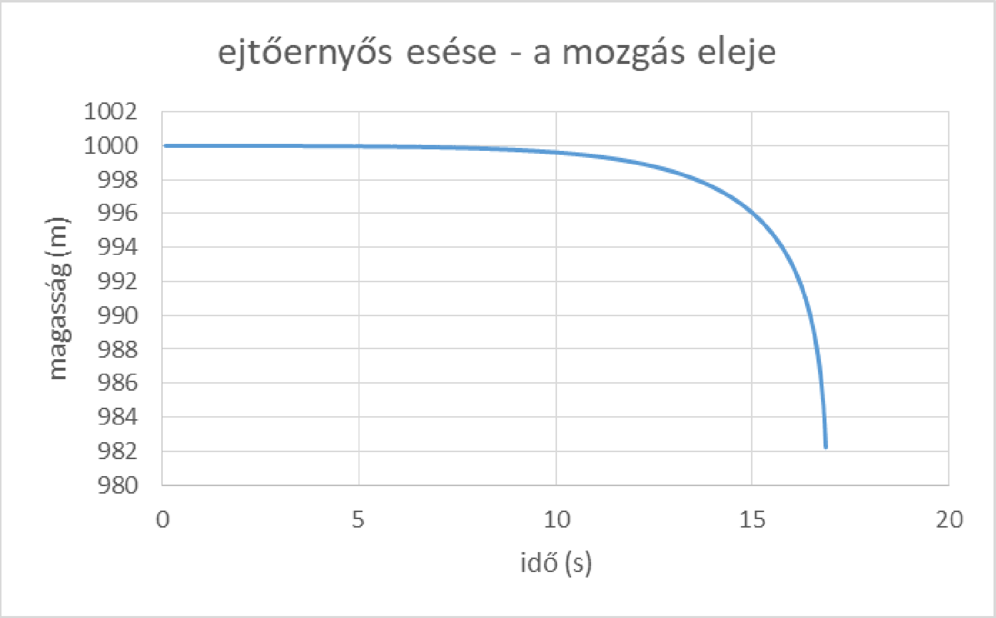
Ezek után elkezdhetjük megszerkeszteni a ciklust – egy adott sor a ciklus egyszeri végrehajtását jelenti:

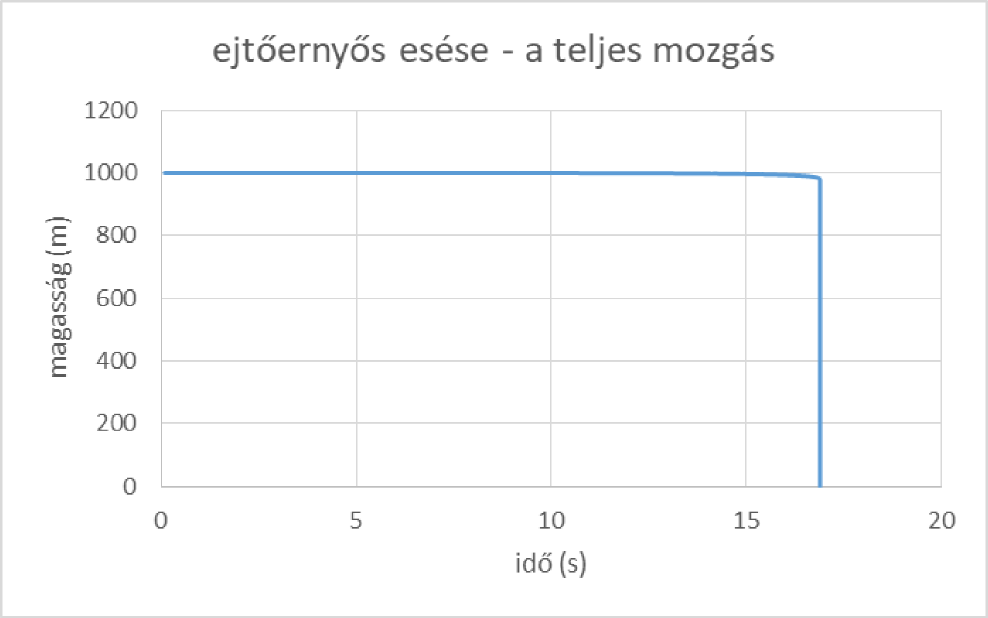
az első sorban levő első ciklus a kezdeti adatokból származik, a második sor (második ciklus) az elsőben levő adatokból, és így tovább…:

F_{kx}	F_{ky}	a_x	a_y	Δv_x	Δv_y	v_x	v_y	Δr_x	Δr_y	r_x	r_y	ΔW
-193500	0	-2150	-10	-2,15	-0,01	97,85	-0,01	0,09785	-0,00001	0,09785	1000	18933,98
-185269	18,93398	-2058,54	-9,78962	-2,05854	-0,00979	95,79146	-0,01979	0,095791	-2E-05	0,193641	1000	17747,18
-177556	36,68135	-1972,84	-9,59243	-1,97284	-0,00959	93,81862	-0,02938	0,093819	-2,9E-05	0,28746	999,9999	16658,03
-170317	53,33989	-1892,42	-9,40733	-1,89242	-0,00941	91,9262	-0,03879	0,091926	-3,9E-05	0,379386	999,9999	15656,63
-163516	68,99748	-1816,84	-9,23336	-1,81684	-0,00923	90,10936	-0,04802	0,090109	-4,8E-05	0,469496	999,9999	14734,3
-157116	83,73325	-1745,73	-9,06963	-1,74573	-0,00907	88,36362	-0,05709	0,088364	-5,7E-05	0,557859	999,9998	13883,36
-151087	97,61863	-1678,75	-8,91535	-1,67875	-0,00892	86,68487	-0,06601	0,086685	-6,6E-05	0,644544	999,9997	13096,99

(vegyük észre, hogy kezdetben valóban irreálisan nagy a közegellenállási erő!)

az eredmény:



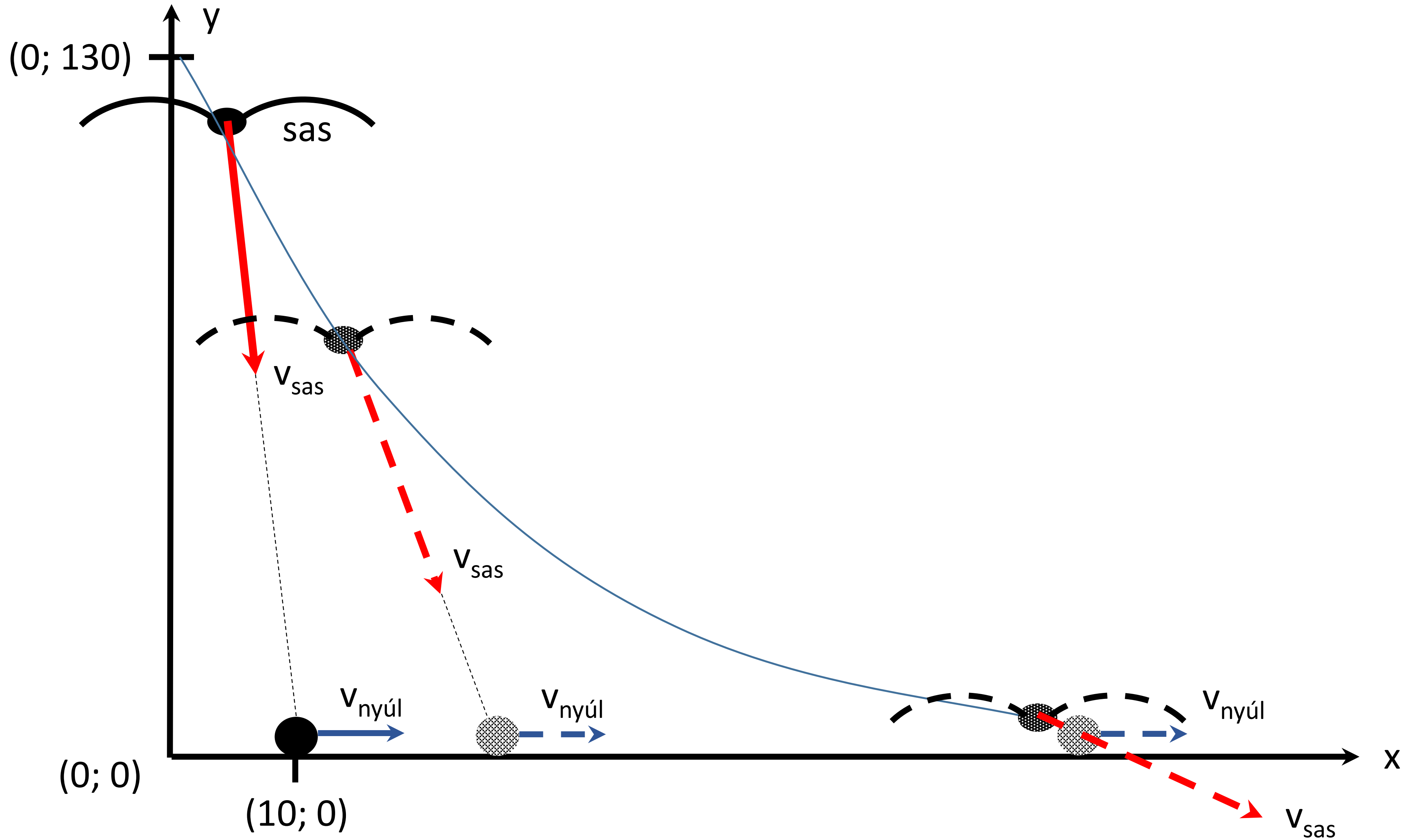


az összes munka pedig a jobb oldali oszlop celláinak szummázásával kapható: $\mathbf{W_{összes} = 1344464\ J}$

Sas üldözi a nyulat (egy másik 2D feladat):

Egy 130 méter magasan levő sas észrevesz kb. maga alatt, tőle vízszintesen 10 méterre a földön egy nyulat, és úgy dönt, hogy lecsap rá. A sas sebességének nagysága 320km/h. A nyúl észreveszi a veszélyt és rögtön elkezd menekülni egy egyenes mentén a búvóhelye felé, 36km/h sebességgel. A sas folyamatosan a nyúl pillanatnyi helyzete felé halad. Rajzoljuk meg a sas pályáját!

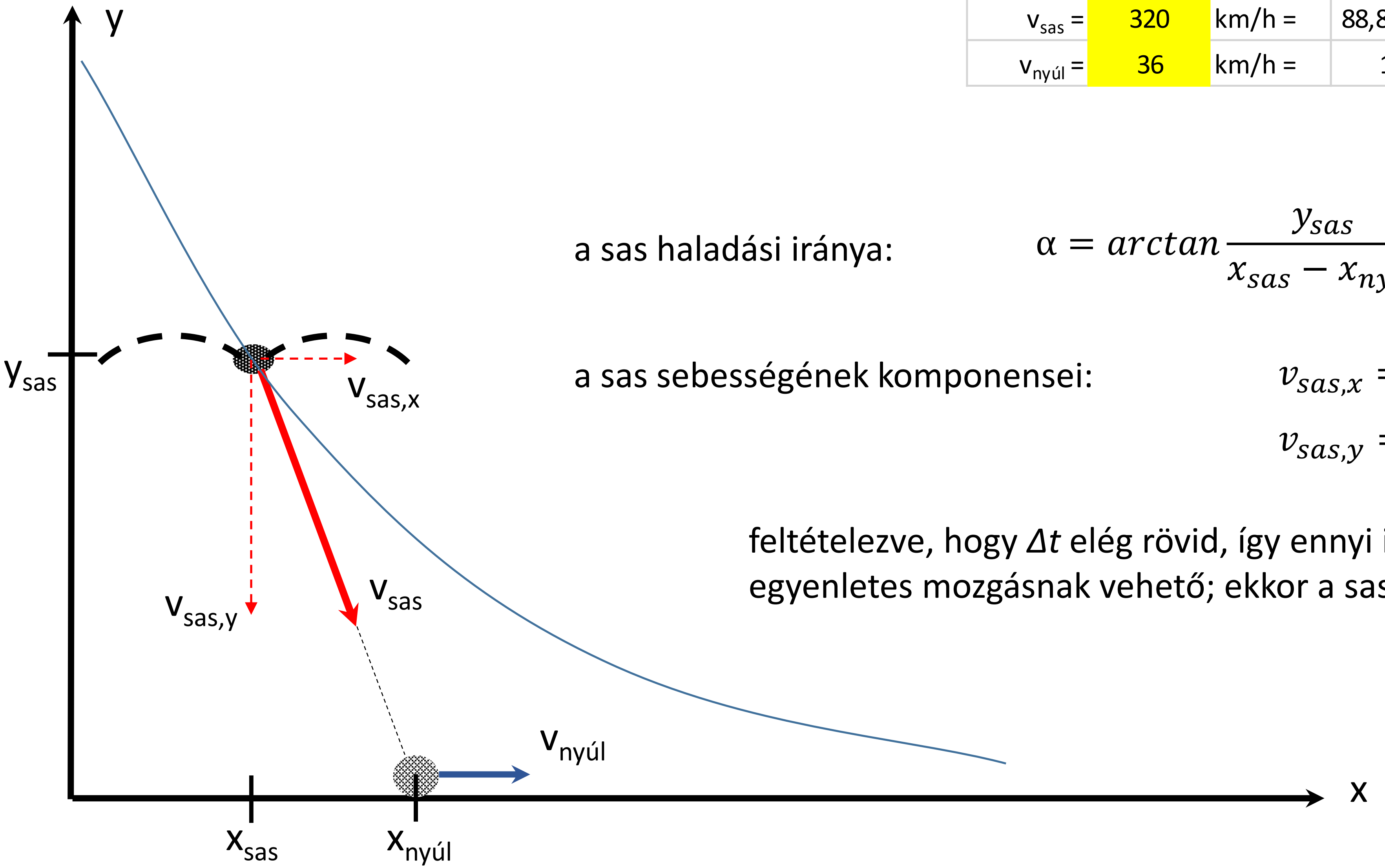
Megkérdezhetjük azt is, hogy hol kapja el a nyulat, illetve ha megadjuk a menedék helyét, akkor azt is, hogy el tudja-e kapni.



A fentebbi feladatok gondolatmenete szerint megtervezzük az algoritmus lépéseit, az előző oldali ábrának megfelelően megadjuk a kezdeti adatokat és választunk egy *Δt* idő-lépésközt:

Δt =	0,001	s		
$y_{0,sas}$=h_0 =	130	m		
$x_{0,sas}$ =	0	m		
$x_{0,nyúl}$ =	10	m		
v_{sas} =	320	km/h =	88,88889	m/s
$v_{nyúl}$ =	36	km/h =	10	m/s

egy adott időpillanatban a sas és a nyúl helyzete:



a sas haladási iránya:

$$\alpha = arctan\frac{y_{sas}}{x_{sas} - x_{nyúl}}$$

a sas sebességének komponensei:

$$v_{sas,x} = v_{sas} \cdot cos\alpha$$

$$v_{sas,y} = v_{sas} \cdot sin\alpha$$

feltételezve, hogy *Δt* elég rövid, így ennyi idő alatt a sas mozgása egyenesvonalú egyenletes mozgásnak vehető; ekkor a sas és a nyúl *Δt* idő alatti elmozdulásai:

$$\Delta x_{sas} = v_{sas,x} \cdot \Delta t$$

$$\Delta y_{sas} = v_{sas,y} \cdot \Delta t$$

$$\Delta x_{nyúl} = v_{nyúl,x} \cdot \Delta t$$

a sas és a nyúl új helyzetei: $x_{sas} = x_{sas} + \Delta x_{sas}$ $\qquad y_{sas} = y_{sas} + \Delta y_{sas}$

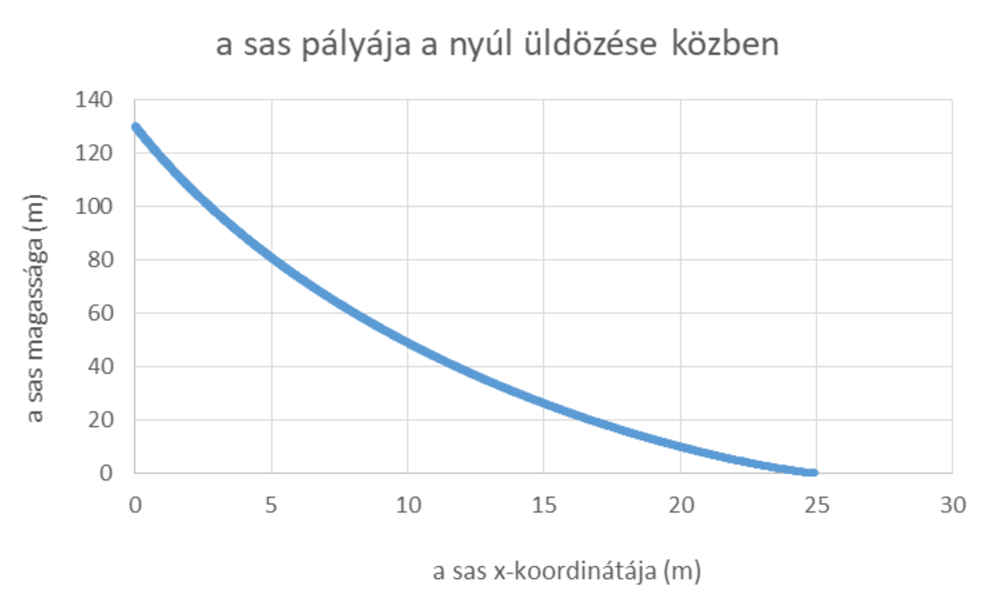
$$x_{nyúl} = x_{nyúl} + \Delta x_{nyúl}$$

itt a ciklus vége; innentől az időt Δt-vel megnöveljük és visszamegyünk az elejére, a sas új α irányba fordul, új helyzet, stb…

az első 10 ciklus (az első 10 sor) így néz ki:

t (s)	α (rad)	α (fok)	$v_{sas,x}$	$v_{sas,y}$	Δx_{sas}	Δy_{sas}	x_{sas}	y_{sas}	$\Delta x_{nyúl}$	$x_{nyúl}$	$x_{nyúl}-x_{sas}$
0,001	-1,49402	-85,6013	6,817467	-88,6271	0,006817	-0,08863	0,006817	129,9114	0,01	10,01	10,00318
0,002	-1,49395	-85,5969	6,824248	-88,6265	0,006824	-0,08863	0,013642	129,8227	0,01	10,02	10,00636
0,003	-1,49387	-85,5925	6,831035	-88,626	0,006831	-0,08863	0,020473	129,7341	0,01	10,03	10,00953
0,004	-1,49379	-85,5881	6,837826	-88,6255	0,006838	-0,08863	0,027311	129,6455	0,01	10,04	10,01269
0,005	-1,49372	-85,5837	6,844621	-88,625	0,006845	-0,08862	0,034155	129,5569	0,01	10,05	10,01584
0,006	-1,49364	-85,5793	6,851421	-88,6244	0,006851	-0,08862	0,041007	129,4682	0,01	10,06	10,01899
0,007	-1,49356	-85,5749	6,858226	-88,6239	0,006858	-0,08862	0,047865	129,3796	0,01	10,07	10,02214
0,008	-1,49349	-85,5705	6,865035	-88,6234	0,006865	-0,08862	0,05473	129,291	0,01	10,08	10,02527
0,009	-1,49341	-85,5661	6,871849	-88,6229	0,006872	-0,08862	0,061602	129,2024	0,01	10,09	10,0284
0,01	-1,49333	-85,5617	6,878667	-88,6223	0,006879	-0,08862	0,06848	129,1138	0,01	10,1	10,03152

mindezekből a sas pályája:



a sas és a nyúl x-koordinátáinak különbségét is figyelhetjük – ld. a jobb szélső oszlopot – és látjuk, hogy majdnem 1,5s múlva (1,498s múlva) kapja el a nyulat:

1,495	-0,85715	-49,1109	58,18645	-67,198	0,058186	-0,0672	24,75876	0,209305	0,01	24,95	0,191237		
1,496	-0,83048	-47,5829	59,95757	-65,6226	0,059958	-0,06562	24,81872	0,143683	0,01	24,96	0,141279		
1,497	-0,79383	-45,4833	62,32153	-63,3819	0,062322	-0,06338	24,88104	0,080301	0,01	24,97	0,088957		
1,498	-0,7343	-42,0722	65,98232	-59,5615	0,065982	-0,05956	24,94702	0,020739	0,01	24,98	**0,032975**	**itt kapja el!!!!**	
1,499	-0,56143	-32,1674	75,24408	-47,324	0,075244	-0,04732	25,02227	-0,02658	0,01	24,99	-0,03227		

(a legalsó sorban a sas már „túlszaladt” a nyúlon)

Látszik, hogy eddig a sas kb 25m-t tesz meg vízszintesen, a nyúl csak 10m-t!