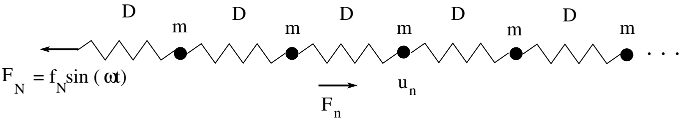
Rugók varázsa

Groma István

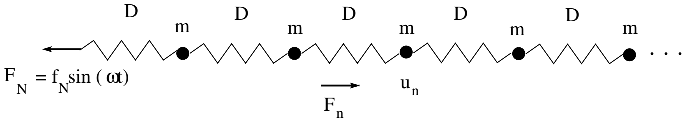
ELTE

March 11, 2019

Rugó rezgetése



$$
\begin{aligned}
ma_n &= -F_n + F_{n-1} \\
F_{n-1} &= -D(u_n - u_{n-1})
\end{aligned}
$$



Mozgásegyenlet

$$
\begin{aligned}
ma_n &= -F_n + F_{n-1} \\
F_{n-1} &= -D(u_n - u_{n-1})
\end{aligned}
$$

Megoldás alakja

$$
\begin{aligned}
F_n &= f_n \sin(\omega t + \phi) \\
u_n &= A_n \sin(\omega t + \phi) \\
a_n &= -\omega^2 A_n \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

A mozgásegyenlet

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\
f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1})
\end{aligned}
$$

A mozgásegyenlet

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\
f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1})
\end{aligned}
$$

Keressük a megoldást a következő alakban

$$f_n = -DK_nA_n$$

A mozgásegyenlet

$$\begin{aligned} m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\ f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

Keressük a megoldást a következő alakban

$$f_n = -DK_nA_n$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \omega^2 m A_n &= -DK_nA_n + DK_{n-1}A_{n-1} \\ -DK_{n-1}A_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

Effektív rugóállandó

Bevezetve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Effektív rugóállandó

Bevezetve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} A_n &= -K_n A_n + K_{n-1} A_{n-1} \\ K_{n-1} A_{n-1} &= (A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

Effektív rugóállandó

Bevezetve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} A_n &= -K_n A_n + K_{n-1} A_{n-1} \\ K_{n-1} A_{n-1} &= (A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

0-ra rendezve

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + K_n \right) A_n + K_{n-1} A_{n-1} \\ 0 &= A_n - (1 + K_{n-1}) A_{n-1} \end{aligned}$$

Nemtriviális megoldás

Lineáris egyenlet rendszer

$$
\begin{aligned}
y_1 &= aA_n + bA_{n-1} \\
y_2 &= cA_n + dA_{n-1}
\end{aligned}
$$

Nemtriviális megoldás

Lineáris egyenlet rendszer

$$
\begin{aligned}
y_1 &= aA_n + bA_{n-1} \\
y_2 &= cA_n + dA_{n-1}
\end{aligned}
$$

Ennek megoldása

$$y_1 d - y_2 b = (ad - bc)A_n$$

Nemtriviális megoldás

Lineáris egyenlet rendszer

$$\begin{aligned} y_1 &= aA_n + bA_{n-1} \\ y_2 &= cA_n + dA_{n-1} \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$y_1 d - y_2 b = (ad - bc)A_n$$

Van nemtriviális megoldás ha

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + K_n\right)(1 + K_{n-1}) - K_{n-1} = 0$$

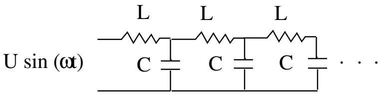
Rekurzív egyenlet

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

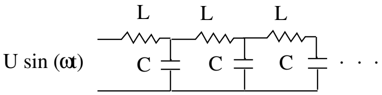
Rekurzív egyenlet K_n-re

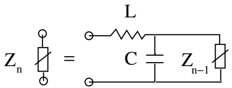
$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$



Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$



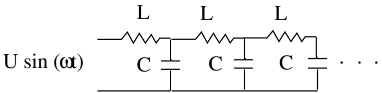


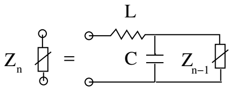
$$Z_n = j\omega L + \frac{\frac{1}{j\omega C} Z_{n-i}}{\frac{1}{j\omega C} + Z_{n-1}}$$

Rekurzív egyenlet

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$





$$Z_n = j\omega L + \frac{\frac{1}{j\omega C} Z_{n-i}}{\frac{1}{j\omega C} + Z_{n-1}}$$

Bevezetve $K_n = j\omega C Z_n$ és $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ jelöléseket visszakapjuk ugyanazt mint a rugóra.

Fixpont

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

Fixpont

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

Mi van $n \to \infty$

$$K_\infty = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_\infty}{1 + K_\infty}$$

Fixpont

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

Mi van $n \to \infty$

$$K_\infty = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_\infty}{1 + K_\infty}$$

Megoldása

$$K_{\infty_{1,2}} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - 4\,\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}{2} \quad \text{ha} \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 4 \quad !!$$

Változócserék I.

Bevezetve

$$c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1$$

Változócserék I.

Bevezetve

$$c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1$$

K_n -re adódik

$$K_{n+1} = 2(c-1) + \frac{K_n}{1+K_n}$$

Változócserék I.

Bevezetve

$$c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1$$

K_n -re adódik

$$K_{n+1} = 2(c-1) + \frac{K_n}{1+K_n}$$

A sorozat fixpontja

$$K_{\infty_{1,2}} = (c-1) \pm \sqrt{c^2-1} \quad \textit{ha} \quad |c| < 1 \quad !!$$

Változócserék II.

Legyen

$$K_+ = (c - 1) + \sqrt{c^2 - 1}$$

Változócserék II.

Legyen

$$K_+ = (c-1) + \sqrt{c^2-1}$$

Bevezetve

$$y_n = K_n - K_+$$

Változócserék II.

Legyen

$$K_+ = (c-1) + \sqrt{c^2-1}$$

Bevezetve

$$y_n = K_n - K_+$$

y_n-re kapjuk, hogy

$$y_{n+1} = \frac{\left(c - \sqrt{c^2-1}\right) y_n}{c + \sqrt{c^2-1} + y_n}$$

Változócserék III.

A kevesebb írás kedvéért jelöljük

$$S = c - \sqrt{c^2 - 1} \quad ill. \quad S^* = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

Változócserék III.

A kevesebb írás kedvéért jelöljük

$$S = c - \sqrt{c^2 - 1} \quad ill. \quad S^* = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

Így

$$y_{n+1} = \frac{S y_n}{S^* + y_n}$$

Változócserék III.

A kevesebb írás kedvéért jelöljük

$$S = c - \sqrt{c^2 - 1} \;\; ill. \;\; S^* = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

Így

$$y_{n+1} = \frac{S y_n}{S^* + y_n}$$

További változó csere

$$t_n = \frac{1}{y_n}$$

Végül

Kapjuk, hogy

$$t_{n+1} = \frac{1}{S} + \frac{S^*}{S} t_n$$

Végül

Kapjuk, hogy

$$t_{n+1} = \frac{1}{S} + \frac{S^*}{S} t_n$$

Végül

$$t_n = l_n + G \quad ha \quad G = -\frac{1}{2\sqrt{c^2 - 1}}$$

Végül

Kapjuk, hogy

$$t_{n+1} = \frac{1}{S} + \frac{S^*}{S} t_n$$

Végül

$$t_n = l_n + G \quad ha \quad G = -\frac{1}{2\sqrt{c^2 - 1}}$$

Kapjuk, hogy

$$l_{n+1} = \frac{S^*}{S} l_n$$

A megoldás

Geometriai sor

$$l_n = l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n$$

A megoldás

Geometriai sor

$$l_n = l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n$$

Visszahelyettesítve

$$K_n = \frac{2\sqrt{c^2 - 1}}{l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2 - 1}$$

A megoldás

Geometriai sor

$$l_n = l_0 \left(\frac{S^*}{S}\right)^n$$

Visszahelyettesítve

$$K_n = \frac{2\sqrt{c^2-1}}{l_0 \left(\frac{S^*}{S}\right)^n - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2-1}$$

Emellett

$$A_n = (K_{n-1}+1)\,A_{n-1}$$

Határérték

$$\begin{aligned}
&Ha \qquad c < -1 \quad azaz \quad \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 4\right) \\
&\frac{S^*}{S} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 1}}{c + \sqrt{c^2 - 1}} < 1
\end{aligned}$$

Határérték

$$\text{Ha} \qquad c < -1 \;\; \text{azaz} \;\; \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 4\right)$$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 1}}{c + \sqrt{c^2 - 1}} < 1$$

ekkor

$$K_N = \frac{2\sqrt{c^2 - 1}}{\approx 0 - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2 - 1}$$

Határérték

$$Ha \qquad c < -1 \quad azaz \quad \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 4\right)$$

$$\frac{S^*}{S} \quad = \quad \frac{c - \sqrt{c^2 - 1}}{c + \sqrt{c^2 - 1}} < 1$$

ekkor

$$K_N \quad = \quad \frac{2\sqrt{c^2 - 1}}{\approx 0 - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2 - 1}$$

Így

$$K_N \quad = \quad c - 1 - \sqrt{c^2 - 1}$$

Periodikus megoldás

Ha

$$-1 < c < 1$$
$$c + \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0 = S^*$$
$$c - \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0 = S$$

Periodikus megoldás

$$
\begin{aligned}
&\textit{Ha} \qquad -1 < c < 1 \\
&c + \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0 = S^* \\
&c - \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0 = S
\end{aligned}
$$

ekkor

$$\frac{S^*}{S} = \cos(2\varphi_0) + i\sin(2\varphi_0)$$

Periodikus megoldás

$$\begin{aligned} \textit{Ha} \qquad & -1 < c < 1 \\ & c + \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0 = S^* \\ & c - \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0 = S \end{aligned}$$

ekkor

$$\frac{S^*}{S} = \cos(2\varphi_0) + i\sin(2\varphi_0)$$

Így

$$\left(\frac{S^*}{S}\right)^n = \cos(2n\varphi_0) + i\sin(2n\varphi_0)$$

Összegezve

$$I_0 = |I_0|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$K_n = \frac{2i\sin\varphi_0}{I_0 e^{i2\varphi_0 n} - 1} + e^{i\varphi_0} - 1$$

Összegezve

$$l_0 = |l_0|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$K_n = \frac{2i\sin\varphi_0}{l_0 e^{i2\varphi_0 n} - 1} + e^{i\varphi_0} - 1$$

Ha $|l_0| = 1$ akkor (kis számolás után)

$$K_n = \cos\varphi_0 - 1 + \frac{\sin\varphi_0 \sin(n\varphi_0 + \varphi)}{|l_0|\cos(n\varphi_0 + \varphi) - 1}$$

valós

Numerikus megoldás