Válaszok Szenthe János opponens

Rácz István

MTA KFKI RMKI

FEKETELYUKAK A GRAVITÁCIÓ GEOMETRIZÁLT ELMÉLETEIBEN

című doktori értekezése kapcsán megfogalmazott kérdéseire

1. Az első kérdés:

„Lát-e lehetőséget arra, hogy a 6. fejezet eredményei a tengelyszimmetria fogalmának definíciójában szereplő összes feltétel teljesüléséig fejlődjenek tovább?”

1.1. Válasz az első kérdésre:

A rövid válasz az, hogy igen.

Attól tartok, hogy jogos a kérdésben implicit módon megbújó kritika. Bármely témakörben az ott aktívan kutatók gyakran elkövetik azt a hibát, hogy legvégül mindig csak a sarkalatos probléma valamely matematikai értelemben ekvivalens megfogalmazásával foglalkoznak. Így történhetett meg az, hogy a tengelyszimmetria létezésének bizonyítására hivatott 6. fejezet megírása során nem fordítottam elegendő figyelmet arra, hogy az ismertetett eredmények vonatkozó következményeit megfelelő részletességgel ismertessem. A kérdésre adott válasz azonban egyszerűen megadható a dolgozatban bemutatott eredmények felhasználásával.

Ahogyan azt a dolgozat bevezető részében is megfogalmazom, a 6. fejezetben négydimenziós, stacionárius, aszimptotikusan sík elektrovákuum feketelyuk-téridőket tekintünk. Feltéve, hogy a vizsgált feketelyuk eseményhorizontja nem-degenerált, megmutatom, hogy a $t^a a$ stacionárius Killing-vektormező mellett mindig létezik egy olyan másik – az eseményhorizonttal kompatibilis – k^a Killing-vektormező, mely sima esetben a feketelyuk-tartományban, analitikus esetben a külső kommunikációs tartományban is értelmezhető, és amely által indukált izometria-transzformációkra nézve az eseményhorizont egy Killing-horizont, és amelynek hatásával szemben maga az elektromágneses tér is invariáns [2, 3].

A kérdés lényegében arra vonatkozik, hogy az eseményhorizonttal kompatibilis Killing-vektormező létezése – feltéve, hogy az különbözik az aszimptotikusan stacionárius Killing-vektormezőtől – valóban garantálja-e azt, hogy a kérdéses feketelyuk tengelyszimmetrikus.

Az igenlő válasz bizonyításához az alábbi érvelés révén juthatunk el. Először is bármely két Killing-vektormező állandó együtthatókkal vett lineárkombinációja is Killing-vektormező, így a

$$\varphi^a = t^a - k^a \tag{1}$$

vektormező a téridő izometria-transzformációit határozza meg. Ezek után érdemes felidézni, hogy – ahogyan azt a dolgozatom 6.3 alfejezetében megmutatom – a stacionárius feketelyuk-téridők $\mathcal{N}$ eseményhorizontja mindig az $\mathcal{N} = \Sigma \times \mathbb{R}$ szorzattopológiával rendelkezik, továbbá a 6.3.1 állítás értelmében, amikor a fényszerű energiafeltétel teljesül – és ez mindig teljesül a fejezetben vizsgált vákuum, vagy elektrovákumm téridőkre – a t^a Killing-vektormezőre nézve stacionárius feketelyuk-téridőben a t^a által meghatározott ϕ_t-izometriacsoport egyrészt az $\mathcal{N}$ eseményhorizontot önmagára képezi le, másrészt létezik egy olyan $t_0 > 0$ szám úgy, hogy ϕ_{t_0} az $\mathcal{N}$ eseményhorizont minden egyes fényszerű generátorát önmagára képezi le. Az utóbbi állítás bizonyítása úgy történt, hogy megmutattam, a ϕ_t-izometriacsoportnak az $\mathcal{N}$-en futó Killing-pályák $\mathscr{S}$ terére vett φ_t visszahúzottja egy $\varphi_t : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ izometriacsoportot határoz meg az $\mathscr{S}$-en indukált Riemann-féle metrikára nézve. A bizonyítás hátralévő részében azt kihasználva, hogy az $\mathscr{S}$ sokaság topológiailag S^2, megmutattam, hogy φ_t-hez létezik egy φ^a térszerű Killing-vektormező $\mathscr{S}$-en, melynek Killing-pályái zártak. Ez a φ^a vektormező nem más, mint a keresett négydimenziós tengelyszimmetria előképe, melyet az $\mathcal{N}$ eseményhorizontot az $\mathscr{S}$ Killing-pályák terébe képező $\pi : \mathcal{N} \to \mathscr{S}$ leképezés segítségével visszahúzhatunk $\mathcal{N}$-re, ahol φ^a az őt meghatározó eljárás, valamint az $\mathcal{N}$-en indukált metrika degeneráltsága folytán éppen a $t^a - k^a$ különbség Killing-vektorral esik egybe.

Ezek után, például a C^∞ esetben a kezdőérték-problémák és téridő-szimmetriák kapcsolatát vizsgáló [4, 5] munkáimban található eredmények felhasználásával, megmutatható, hogy a $t^a - k^a$ különbség vektor – a fentebbi megjegyzésünknek és a dolgozatom 6.6.2 tételében megfogalmazott feltételeknek megfelelően – éppen a keresett zárt pályákkal rendelkező tengelyszimmetriát meghatározó Killing-vektormező a $J^+[\mathcal{N}] \cap \mathscr{U}$ halmaz felett. A dolgozat 6.4 alfejezetében ismertetett érvelés segítségével az analitikus esetben is mutatható, hogy az $\mathcal{N}$ eseményhorizont egy elegendően kicsiny nyílt környezetében $t^a - k^a$ a keresett tengelyszimmetriát adja.

Szeretném végül megjegyezni, hogy amint az a k^a eseményhorizonttal kompatibilis Killing-vektormező konstrukciójából következik, a t^a és k^a Killing-vektormezők kommutálnak. Következésképpen a $[t^a, \varphi^a]$ kommutátor is zérus. Ezen túlmenően, ahogyan az a dolgozatom 2.3 alfejezetében, a 2.3.3 definíciót követő részben felidézett eredményekből következik, a kérdéses elektrovákuum feketelyuk-téridők szükségképpen rendelkeznek a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával is.

2. A második kérdés:

„Míg Hawking feketelyuk-topológiai tételében az eseményhorizont egy szelése szerepel, addig e tétel általánosítását célzó, Galloway és munkatársaitól származó, tételben egy térszerű hiperfelületen levő marginálisan csapdázott felület. Lát-e lehetőséget arra, hogy e két tétel kapcsolata pontosabban tisztázódjon?”

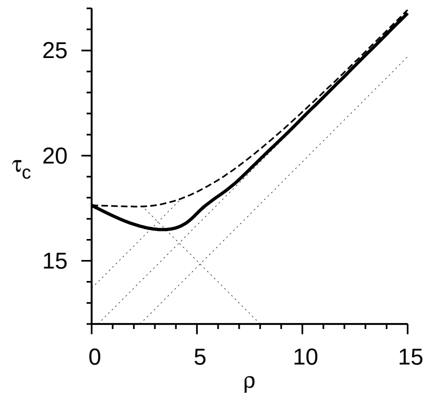
2.1. Válasz a második kérdésre:

Valóban van egy látszólagos ellentmondás abban, ahogyan Galloway és munkatársai eredményét Hawking feketelyuk-tételének általánosításaiként emlegetjük. Ugyan mindkét tétel az Einstein-elméletre vonatkozik, az általánosítások azonban nemcsak négydimenzióban érvényesek, így ebben az vonatkozásban biztosan általánosabbak Hawking tételénél. A látszólagos különbség valójában onnan ered, hogy míg Hawking a tételét olyan stacionárius feketelyuk-téridőkre bizonyította, amelyek *regulárisan megjósolhatóak* – ezek eleget tesznek Penrose „*gyenge Kozmikus Cenzor hipotézisének*” is – addig az általánosítások a szó legszorosabb értelemében vett általános dinamikai feketelyukakra is érvényes formában kerültek megfogalmazásra. Így a látszólagos ellentmondás akkor is megmarad, ha figyelembe vesszük, hogy a Hawking-tételben tekintett stacionárius feketelyuk-téridő eseményhorizontjának szelései ugyanúgy marginálisan csapdázott felületek, mint a Galloway-ék tételeiben szereplő látszólagos, vagy dinamikus feketelyuk-horizont szelései.

Ahogyan azt a dolgozatom 2.2-es alfejezetében felidézem, Hawking azt is bebizonyította [6, 7], hogy minden aszimptotikusan megjósolható téridőben a csapdázott felületeknek az eseményhorizont mögött, a feketelyuk tartományban kell elhelyezkedniük. Érdemes megjegyezni, hogy Hawking ezen eredményével összhangban, a dinamikus feketelyuk-téridők általános vizsgálataiban azt tapasztaljuk (lásd például [8]), hogy a látszólagos, vagy dinamikai horizont aszimptotikusan sík esetben mindig a feketelyuk-tartomány belsejében fut, és csak a dinamikai folyamatok lejátszódása után, közelít belülről az eseményhorizonthoz.

Mindezekből automatikusan adódik a Hawking és Galloway-ék tételeiben alkalmazott feltételek és a használt bizonyítások egyes részleteinek szükségszerű eltérése is. Hawking azt mutatja meg, hogy amennyiben az eseményhorizont valamely szelése nem lenne gömbi topológiájú, úgy létezne az adott szelést teljes egészében a feketelyuk-tartomány komplementerébe képező olyan deformáció, amely eredményeként egy olyan csapdázott felület jelenne meg a külső kommunikációs tartományban, amelynek létezését éppen Hawking fent említett általános tétele zárja ki.

Galloway és munkatársai nem használhatták ezt az indirekt bizonyítást, mert a fentebb említett példából is látszik, hogy az általános esetben a térszerű hiperfelületen fekvő marginálisan csapdázott felület deformációjával előállított felület nem kerül



1. ábra. Az ábrán egy numerikus szimuláció segítségével követett gömbszimmetrikus (minden pont egy gömböt helyettesít) gravitációs összeomlás során kialakuló feketelyuk dinamikai horizontja (vastag folytonos vonal), valamint a centrumban elhelyezkedő görbületi szingularitás (vastag szaggatott vonal) látható [8]. A dinamikai horizont aszimptotikusan közelit az egyik közel egyenes kifelé futó fényszerű geodetikushoz, mely lényegében a kialakuló feketelyuk eseményhorizontjának is tekinthető.

ki a feketelyuk-tartomány belsejéből. Éppen ezért vezetik be az általuk alkalmazott matematikai kerethez jobban illeszkedő „*szigorú értelemben vett stabilitási feltételt*”, mely lényegében azt biztosítja, hogy a használt térszerű hiperfelületen belül mozogva ne lehessen teljes egészében kifelé deformálni egy marginális csapdafelületet úgy, hogy az így kapott felület jövő-értelemben csapdázott legyen. Mindezekből az is következik, hogy abban az esetben, ha Galloway-ék tételét stacionárius feketelyuk-téridőkre alkalmaznánk, akkor a szigorú értelemben vett stabilitási feltételt lecserélhetnénk a Hawking által használt, aszimptotikusan megjósolhatóságra vonatkozó feltételre és így Hawking feketelyuk-topológiai tételének valóban egy szigorú értelemben vett általánosításához jutnánk.

Gödöllő, 2011 május 12.

....
Rácz István

Hivatkozások

[1] Wald R M *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984)

[2] H. Friedrich, I. Rácz and R.M. Wald: *On rigidity of spacetimes with stationary event- or compact Cauchy horizons*, Commun. Math. Phys. **204** 691-707 (1999)

[3] I. Rácz: *On further generalisation of the rigidity theorem for spacetimes with a stationary event horizon or a compact Cauchy horizon*, Class. Quant. Grav. **17** 153-178 (2000)

[4] I. Rácz: *On the existence of Killing vector fields*, Class. Quant. Grav. **16**, 1695-1703 (1999)

[5] I. Rácz: *Symmetries of spacetime and their relation to initial value problems*, Class. Quant. Grav. **18**, 5103-5113 (2001)

[6] S.W. Hawking and G.R.F. Ellis: *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge, (1973)

[7] S.W. Hawking: *Black holes in general relativity*, Commun. Math. Phys. **25**, 152-66 (1972)

[8] Péter Csizmadia, István Rácz: *Gravitational collapse and topology change in spherically symmetric dynamical systems* , Class. Quantum Grav. **27** 015001 (2010)