Válaszok Gergely Árpád László opponens

Rácz István

MTA KFKI RMKI

FEKETELYUKAK A GRAVITÁCIÓ GEOMETRIZÁLT ELMÉLETEIBEN

című doktori értekezése kapcsán megfogalmazott kérdéseire

1. Az első kérdés:

„A második fejezetben említi: ‘A felületi gravitáció elnevezés onnan adódik, hogy egy sztatikus feketelyuk esetében éppen κ értéke mondja meg, hogy egy súlytalannak és eltéphetetlennek gondolt kötél végét a feketelyuktól végtelen nagy távolságban tartva mekkora erőt kellene kifejtenem ahhoz, hogy egy egységnyi tömegű testet nyugalomban tarthassak a feketelyuk horizontján.’ Mit jelent ebben az értelmezésben a felületi gravitáció nulla értéke? Amennyiben érvényes marad az értelmezés, hogyan tartja meg az egységnyi tömeget a horizonton a kötél végén ‘kifejtett’ nulla erő? Ha nem marad érvényben az értelmezés, hogyan pontosítaná?”

1.1. Válasz az első kérdésre:

A rövid válasz az, hogy igen, érvényben marad az értelmezés.

Az opponens által idézett mondat a felületi gravitáció általános matematikai definíciójához kiegészítésnek szánt lábjegyzetben fordul elő. Robert M. Wald [1] könyve – melyet szintén idézek a kérdéses lábjegyzetben – óvatosan fogalmaz és a sztatikus feketelyukakra érvényes

$$\kappa = lim_{r\rightarrow r_H}(a\,V) \tag{1}$$

összefüggés levezetése során fel is teszi azt, hogy κ értéke legyen nullától különböző. Az (1) egyenletben V a t^a sztatikus Killing-vektormező normáját, más néven a $V=\sqrt{-t^e t_e}$ vöröseltolódási faktort jelöli, míg az $u^a = t^a/\sqrt{-t^e t_e}$ egységnyi négyes-vektorral mozgó megfigyelő gyorsulásának nagyságát, a-t, a (mindig térszerű) négyes-gyorsulás

$$a^c = u^e\nabla_e u^c = \frac{1}{V^2}t^e\nabla_e t^c = \frac{1}{V^2}t_e[-\nabla^c t^e] = \frac{1}{2V^2}\nabla^c[-t_e t^e] = \nabla^c \ln V \tag{2}$$

normájaként, az $a=\sqrt{a^e a_e}$ összefüggéssel értelmezzük.

Ha $\kappa \neq 0$, akkor egy adott téridőpontban az egységnyi tömegű testre ható lokálisan ébredő erő (ezt éppen a értéke adja meg) az $r\rightarrow r_H$ határesetben végtelenhez tart, míg a végtelen távolban lévő, a kötél végét tartó megfigyelő által kifejtett $a\,V$ erő a $\lim_{r\to r_H} V = 0$ viselkedés folytán véges értékéhez tart.

A kérdés most már az, hogy mekkora a gyorsulás egy sztatikus extrém feketelyuk esetén. Bár a válasz általában és tetszőleges dimenzióban érvényes, az egyszerűség kedvéért tekintsük a négy-dimenziós extrém Reissner–Nordström-téridőt, melynek íveleme

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{3}$$

Ekkor $V = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2$ és így (2) alapján az $r, \theta, \phi =$*állandó* görbéken mozgó sztatikus megfigyelők által érzett lokális gyorsulás

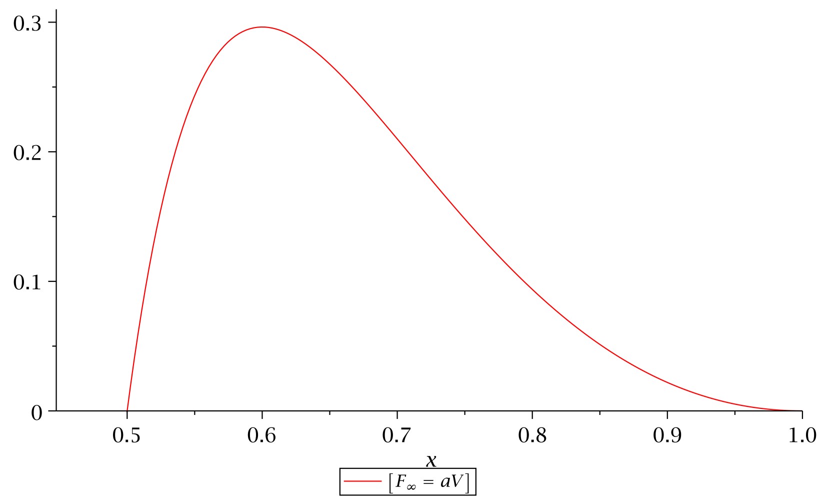
$$a = \sqrt{a^e a_e} = \sqrt{g^{rr}(\partial_r \ln V)^2} = 2\frac{M}{r^2}\,. \tag{4}$$

Így a nem extrém esettel ellentétben, mivel maga a lokális gyorsulás is véges, a $\kappa = lim_{r\to r_H}(a\,V)$ határérték a $lim_{r\to r_H} V = 0$ összefüggés alapján zérus, a rövid válaszban megfogalmazott állításnak megfelelően.

Az extrém és nem extrém feketelyukak felületi gravitációjának az idealizált kötél esetében fellépő különbségének megértését segítheti annak felidézése is, hogy míg a nem extrém feketelyukak esetében a kettéhasadó Killing-horizont kettéhasadási felülete a külső kommunikációs tartomány bármely pontjától véges térszerű távolságban helyezkedik el, addig az extrém esetben ilyen kettéhasadási felület nem létezik, azaz az csak egy megfelelő konformis kompaktifikáció alkalmazása révén jeleníthető meg a kérdéses téridő Carter–Penrose-ábráján is. Anélkül, hogy a konformis kompaktifikációkhoz tartozó technikai elemeket áttekintenénk, csak annyit szeretnék felidézni, hogy az extrém feketelyukak esetében bármely a külső kommunikációs tartományában elhelyezkedő pont ugyanúgy végtelen távolságban van a múlt- és jövőeseményhorizontok képzeletbeli találkozási helyétől, mint a múlt és jövő fényszerű végtelenek képzeletbeli találkozási helyétől, azaz a térszerű végtelentől. Ez magyarázza azt is, hogy míg a nem extrém esetben a lokális gyorsulás nagysága végtelenhez tart a kettéhasadási felülethez közelítve, addig az extrém esetben ennek a gyorsulásnak a határértéke véges marad.

A helyzet megértését segítheti az, ha az egységnyi tömegű test megtartásához végtelen távolban kifejtett $F_\infty = aV$ erő r, vagy inkább az $x = \frac{r}{M+r}$, függését tekintjük. Az ábrán látható, hogy a kérdéses függvény a két, $r = M$ és $r = \infty$, szélsőértéktől eltekintve mindenütt pozitív.

Bár ez teljesen ellentmond a természetes várakozásainknak, mindezekből következik, hogy egy egységnyi tömegű testet valóban meg lehet tartani egy súlytalannak és eltéphetetlennek gondolt kötél végét a feketelyuktól végtelen nagy távolságban zérus nagyságú erő kifejtésével feltéve, hogy sikerült oda „leengednünk”.



1. ábra. A végtelen távolban kifejtett $F_\infty = aV$ erő helyfüggése: $x = \frac{r}{M+r}$ és $M = 1$.

2. A második kérdés:

„Napjainkban meglehetősen kiterjedt irodalom foglalkozik az extrém fekete lyukak horizont-közeli tartományának vizsgálatával. Ennek legegyszerűbb és legrégebben ismert esete szerint az extrém Reissner-Nordström téridő horizont-közeli tartományát a Bertotti-Robinson téridővel azonosítják. A kétféle téridő egymásba transzformálható, azonban komplex koordináta transzformációval. Az értekezésben bemutatott módszerek, eredmények fényében miként vélekedik a két téridő azonosításáról?"

2.1. Válasz a második kérdésre:

Mielőtt a kérdés megválaszolásához hozzákezdenék, szeretnék felidézni néhány egyszerű tényt az extrém Reissner–Nordström-, valamint a Bertotti–Robinson-téridők kapcsolatáról. Ahogyan azt az imént láttuk, az extrém Reissner–Nordström-téridő metrikáját a (2) egyenlettel, míg a hozzá tartozó elektromágneses teret a $A_a = -\frac{M}{r}\, dt_a$ vektorpotenciállal adhatjuk meg. Ebből a metrikából kiindulva a Bertotti–Robinson-téridő metrikáját az alábbi két lépésben kaphatjuk meg:

(i) Vezessük be a Reissner–Nordström-téridőben a szokásos t, r koordináták helyett azokat a $\tilde{t}, \tilde{r}$ koordinátákat, amelyeket a

$$t = \frac{\tilde{t}}{\epsilon}, \quad \text{valamint az} \quad r = M + \epsilon\, \tilde{r} \tag{5}$$

relációkkal értelmezünk. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $(\tilde{t}, \tilde{r}, \phi, \theta)$ koordinátátákban az extrém Reissner–Nordström-téridő metrikáját a

$$ds^2 = -\frac{\tilde{r}^2}{(M+\epsilon\,\tilde{r})^2}\,d\tilde{t}^{\,2} + \frac{(M+\epsilon\,\tilde{r})^2}{\tilde{r}^2}\,d\tilde{r}^2 + (M+\epsilon\,\tilde{r})^2\,(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\,d\phi^2)\,. \quad (6)$$

alakban írhatjuk fel. Mivel csak egy koordináta-transzformációt hajtottunk végre, a (g_{ab}, A_a) páros $\epsilon > 0$ tetszőleges értékére az Einstein-Maxwell-egyenletek Reissner–Nordström-megoldását adja.

(ii) Vezessük be az $\tilde{r}$ koordináta helyett az $r_* = M^2/\tilde{r}^2$ koordinátát, majd tekintsük a kapott ívelem $\epsilon \to 0$ határesetben előálló alakját, mely a

$$d\tilde{s}^2 = \frac{M^2}{r_*^2}\,\left[-d\tilde{t}^{\,2} + dr_*^2 + r_*^2\,(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\,d\phi^2)\right] \quad (7)$$

egyenlettel adható meg.

A (7) egyenlet által meghatározott konformisan sík metrika a Bertotti–Robinson-téridő metrikája, mely a $\tilde{A}_a = -\frac{M}{r_*}\,d\tilde{t}_a$ vektorpotenciál által meghatározott elektromágneses térrel együtt eleget tesz az Einstein-Maxwell-egyenleteknek. Érdemes kiemelni, hogy a konformis faktor szinguláris volta ellenére maga a Bertotti–Robinson-téridő nem szinguláris még az $r_* = 0$ helyen sem, mert például az $R_{ab}R^{ab}$, valamint az $R_{abcd}R^{abcd}$ skalárgörbületi invariánsokra

$$R_{ab}R^{ab} = \frac{4}{M^4}\,, \quad \text{valamint} \quad R_{abcd}R^{abcd} = \frac{8}{M^4} \quad (8)$$

adódik.

A két téridőre gondolhatnánk úgy is, mint az $r = M$, illetve $r_* = M$ helyen lévő, $Q = M$ töltéssel rendelkező infinitezimális héj által keltett külső téridőre, melyekhez belül sík Minkowski-téridőt illesztettünk [2]. Kiderül, hogy az extrém Reissner–Nordström- és a Bertotti-Robinson-téridők különbözősége abban is egyértelműen tükröződik, hogy az $r = M$, illetve $r_* = M$ helyen lévő infinitezimális héjak mechanikai feszültsége az extrém Reissner–Nordström-téridők esetén azonosan nulla, míg a Bertotti-Robinson-téridők esetén $S_\phi{}^\phi = S_\theta{}^\theta = -\frac{1}{4\pi M}$ adódik.

Ahogy a kérdésben is megfogalmazódott, az extrém Reissner–Nordström- és a Bertotti-Robinson-téridők valós koordináta-transzformációval nem vihetők át egymásba, ugyanakkor mindkettő az Einstein-Maxwell-egyenletek gömbszimmetrikus statikus megoldása, mely mutatja azt is, hogy a vákuum esetben érvényes Birkhoff-tétel nem terjeszthető ki triviális módon az elektrovákuum téridőkre.

Érdemes azt is megemlíteni, hogy a (7) egyenlet alapján

$$ds^2 = \frac{M^2}{r_*^2}\,\left[-d\tilde{t}^{\,2} + dr_*^2\right] + M^2\,(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\,d\phi^2)\,, \quad (9)$$

azaz az összes r_* sugarú gömb felszíne $\mathscr{A} = 4\pi M^2$, ami azt jelzi, hogy a Bertotti-Robinson-téridők sokkal speciálisabbak mint a Reissner–Nordström-téridők, továbbá az utóbbiakkal ellentétben nem aszimptotikusan sík megoldások.

Mindezen bevezetőnek szánt ismeretek felidézése után tekintsük most már az általános esetet. Az extrém téridők horizont-közeli tartományának vizsgálatánál is központi szerepet játszanak a dolgozatom 2.1.3. alfejezetében részletesen ismertetett Gauss-féle fényszerű-koordinátarendszerek. Ahogy ott részletesen kifejtettem, egy általános n-dimenziós téridőben egy sima $\mathcal{N}$ fényszerű hiperfelület – ilyen például egy feketelyuk téridő eseményhorizontja is – valamely $\mathcal{O}$ nyílt környezetében mindig bevezethetők olyan $(u, r, x^3, \dots, x^n)$ Gauss-féle fényszerű-koordináták, amelyek segítségével a téridőmetrika a

$$\mathrm{d}s^2 = 2\left(\mathrm{d}r - r \cdot \alpha\, \mathrm{d}u - r \cdot \beta_A\, \mathrm{d}x^A\right) \mathrm{d}u + \gamma_{AB}\, \mathrm{d}x^A \mathrm{d}x^B \tag{10}$$

alakban írható fel, ahol α, β_A és γ_{AB} az $u, r, x^3, \dots, x^n$ változók sima függvényei, γ_{AB} Riemann-féle $(n-2)$-dimenziós metrika. Mivel γ_{AB} az $\mathcal{O}$ nyílt környezet felett mindenütt pozitív definit, $\gamma_{AB}|_{\mathcal{N}}$ is az. Amikor $\mathcal{N}$ egy stacionárius feketelyuk téridő eseményhorizontja, mely egyben Killing-horizont az $U^a = (\partial/\partial u)^a$ Killing-vektormezőre nézve az α, β_A és γ_{AB} mezők függetlenek az u-koordinátától. Ha ezen felül a feketelyuk, vagy a Killing-horizont extrém, azaz $\kappa = 0$, akkor létezik olyan $\hat{\alpha}$ sima függvény, amelyre $\alpha = r\,\hat{\alpha}$. Ezek után a (10) metrika horizontközeli megfelelőjét az

$$u = \frac{\tilde{u}}{\epsilon}\,, \qquad r = \epsilon\,\tilde{r} \tag{11}$$

helyettesítéssel, valamint az $\epsilon \to 0$ határátmenettel értelmezzük, azaz

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = 2\left(\mathrm{d}\tilde{r} - \tilde{r}^2 \cdot \tilde{\alpha}\, \mathrm{d}\tilde{u} - \tilde{r} \cdot \tilde{\beta}_A\, \mathrm{d}x^A\right) \mathrm{d}\tilde{u} + \tilde{\gamma}_{AB}\, \mathrm{d}x^A \mathrm{d}x^B\,, \tag{12}$$

ahol $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}|_{\mathcal{N}}$, $\tilde{\beta}_A = \beta_A|_{\mathcal{N}}$ és $\tilde{\gamma}_{AB} = \gamma_{AB}|_{\mathcal{N}}$.

Az elektromágneses tér általában nem rendelkezik horizontközeli megfelelővel, de geometrizált gravitációelméletek azon széles osztályában, ahol a horizonton teljesül az $R_{ab}U^aU^b = 0$ egyenlet – idetartozik az n-dimenziós Einstein–Maxwell-elmélet is – megmutatható, hogy a Maxwell-tenzor F_{ab}^{HK} horizontközeli alakja mindig az

$$F_{ab}^{HK} = d_a(r\, f\, d_b u) + \tilde{\mathcal{F}}_{ab} \tag{13}$$

alakban írható fel, ahol $f = -F_{ur}|_{\mathcal{N}}$ továbbá $\tilde{\mathcal{F}}_{ab}$ egy alkalmas zárt kétforma $\mathcal{N}$-en.

Fontos hangsúlyozni, hogy például az n-dimenziós Einstein–Maxwell-elmélet esetében az egyenletek megoldásait a (11) helyettesítés az $\epsilon \to 0$ határátmenetben mindig megoldásokra képezi le, így a horizontközeli geometria és az elektromágneses tér együttese is mindig megoldása az Einstein–Maxwell-egyenleteknek [3].

Érdemes megemlíteni, hogy a horizontközeli (12) metrika az $U^a = (\partial/\partial u)^a$ Killing-vektormező által indukált egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport hatása mellett invariáns az $X^a = u\,(\partial/\partial u)^a - r\,(\partial/\partial r)^a$ vektormező által indukált diffeomorfizmusokra nézve is. Így a téridőszimmetriák rögtön egy G_2 kétdimenziós nem-Abeli szimmetriacsoportot alkotnak, melyek például az Einstein-egyenletek teljesülése esetén automatikusan az $SO(2,1)$ csoporttá bővülnek [4]. Ez az eredmény lényegében annak a fentebb említett felismerésnek az általánosítása, miszerint a Bertotti-Robinson-téridő szimmetriacsoportja tágabb, mint a kiinduláshoz használt extrém Reissner–Nordström-téridőé.

Miért érdekesek ezek a horizontközeli geometriák?

(1) A feketelyuk-(termo)dinamika egyik legfontosabb következtetése az, hogy a feketelyukakhoz entrópia rendelhető és az – Bekenstein és Hawking felismerésének megfelelően – arányos a feketelyuk felszínével. Ennek az entrópiának statisztikus fizikai magyarázatát mind ez idáig csak a húrelméletben, bizonyos (szuperszimmetrikus) extrém feketelyukak esetében sikerült származtatni úgy, hogy ezen gravitációs rendszerek és az erősen csatolt kétdimenziós konformtérelméleti modellek között fennálló megfeleltetési lehetőségeket alkalmazták.

(2) Ennek a sikernek köszönhetően jelentősen megnövekedett a magasabb dimenziós elméletek extrém feketelyuk megoldásainak megtalálásának, illetve osztályozásának igénye.

(3) Önmagában ez a probléma is túlságosan összetettnek bizonyult, melynek egy egyszerűsítését kínálja az extrém feketelyukaknál sokkal speciálisabb horizonthoz közeli megfelelők felkutatása és osztályozása. Fontos azonban észben tartani, hogy amíg minden extrém feketelyukhoz tartozik horizonthoz közeli megfelelő, addig lehetnek olyan esetek, amikor az egyszerűsítő feltételekkel kapott „horizonthoz közeli” megoldásokhoz nem létezik az elvárt aszimptotikával rendelkező extrém feketelyuk megoldás.

3. A harmadik kérdés:

„A 7. fejezetben ismerteti új, egyszerűbb bizonyításait az általános relativitáselméletben már ismert, de magasabb dimenziós Einstein elméletekben is bizonyított tételeknek, úgy mind Hawking feketelyuk-topológiai tétele, valamint ennek Gibbons és Woolgar által kidolgozott, negatív kozmológiai állandó esetén érvényes általánosítása.

A magasabb dimenziós Einstein elméleteknek viszont csak vákuumban van jelentősége, tekintettel arra, hogy a standard modell mezői 3+1 dimenziósak. Ezt az anyagot disztribúció formájában lehet figyelembe venni egy magasabb dimenziós Einstein elméletben, 5 dimenzió esetén ezt a brán-elmélet teszi meg. Érvényes-e a kidolgozott *bizonyítás (ellenkező esetben mi mondható el) a brán-elméletre, mely az egyetlen olyan magasabb dimenziós Einstein elmélet, mely a megfigyelésekkel összhangban áll?*

[A brán-elméletben az 5-dimenziós kozmológiai állandó negatív, maga a brán pedig egy disztribúció jellegű energia-impulzus tenzort tartalmazó időszerű hiperfelület, azaz az 5-dimenziós Einstein elméletnek disztribúció jellegű forrása (is) van. Az 5-dimenziós fekete lyuk horizontja kimetsz egy zárt felületet a bránból, amit ott (4-dimenziós világunkban) 4-dimenziós fekete lyukként érzékelünk.]"

3.1. Válasz a harmadik kérdésre:

Bár a kérdésfelvetés meglehetősen összetett, a kérdés (értelmezésem szerint) lényegében a bizonyításaimban használt differenciálhatósági feltételek esetleges gyengíthetőségének lehetőségére irányul. Az opponens által említett ötdimenziós bránelméletben az anyag egy négydimenziós időszerű hiperfelületen helyezkedik el, így az ötdimenziós Einstein-egyenletek csak disztribucionális értelemben teljesednek, azaz a modellben szereplő téridő nem C^∞ differenciálhatósági osztályú. Így a dolgozatban ismertetett levezetéseim – ezek az alkalmazott struktúrák simaságát feltételezik – direkt módon nem alkalmazhatók a bránelméleti modellekre.

Ennek ellenére úgy gondolom, hogy a feketelyuk topológiai tételek, általánosításaikkal egyetemben, érvényben maradnak a geometrizált gravitációelméletek egy igen széles osztályára, mely a kérdéses ötdimenziós bránelméleteket is magába foglalja. Ezen várakozásom megerősítéseként szeretném felidézni Geroch és Traschen idevágó, alapvető munkájának [5] legfőbb eredményeit. Geroch és Traschen azt vizsgálták, mi az a metrikára és az anyagmezőkre vonatkozó minimális regularitási, azaz differenciálhatósági feltétel, amelynek teljesedése esetén a téregyenletek, legalábbis disztribucionális értelemben, jól definiáltak. Részletesen megvizsgálták például azt is, hogy a kérdéses feltételek mellett a téridő hány dimenziós részsokaságain helyezkedhetnek el azok a nem sima átmenetek, amelyek elválasztják a szokásos értelemben reguláris, legtöbb esetben C^∞ differenciálhatósági osztályúnak feltételezett téridőtartományokat. Megmutatták, hogy a disztribucionális értelemben való jól definiáltság kizárja a pontszerű részecskék, vagy a húrok történetének következetes leírását a négy-, vagy magasabb dimenziós nemlineáris gravitációelméletekben. Bebizonyították, hogy a téridő dimenziószámától csak egyel alacsonyabb dimenzióval rendelkező disztribucionális részsokaságok engedhetőek meg. A kérdésben említett ötdimenziós bránelmélet, ahol az anyag egy négydimenziós időszerű hiperfelületen helyezkedik el, eleget tesz ennek az elvárásnak.

Mindezeken túl Geroch és Traschen meghatározták azt a legtágabb, általuk *regulárisnak* nevezett, metrikacsaládot, amelynek elemei biztosítják a görbületi-, Ricci-, vagy Einstein-tenzorok disztribucionális értelemben vett jól definiáltságát, ugyanakkor a metrika maga nem, vagy csak „*gyenge értelemben*" differenciálható. A probléma egyáltalán nem triviális voltát és az eredmény fontosságát is jól illusztrálja, hogy a görbületi tenzor az

$$R_{abc}{}^{d} = r_{abc}{}^{d} - 2\Gamma^{d}{}_{m[a}\Gamma^{m}{}_{b]c} - 2\nabla_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} \tag{14}$$

formában adható meg, ahol $r_{abc}{}^{d}$ a ∇_e kovariáns deriváló operátorhoz tartozó görbületi tenzort jelöli, továbbá

$$\Gamma^{c}{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{ce}\left\{2\nabla_{(a}g_{b)e} - \nabla_{e}g_{ab}\right\}\ , \tag{15}$$

ugyanakkor a metrika, melynek „*deriváltjai*" mindkét egyenletben nemlineáris kifejezésekben fordulnak elő, csak gyenge értelemben deriválható.

Geroch és Traschen valamely szimmetrikus g_{ab} tenzormezőt akkor neveztek *regulárisnak*, ha

(1) található hozzá egy mindenütt értelmezett g^{ab} inverz úgy, hogy mind g_{ab}, mind pedig g^{ab} lokálisan korlátosak, valamint

(2) g_{ab} gyenge értelemben deriválható és ez a derivált négyzetesen integrálható.

A diszkussziónk szempontjából Geroch és Traschen legfontosabb eredménye (Theorem 4) az, hogy amikor egy g_{ab} *reguláris* metrika folytonos is, akkor mindig található hozzá olyan C^∞ metrikákból álló $\{{}_{(i)}g_{ab}\}$ $(i = 1, 2, \dots)$ sorozat, amelyik görbületben konvergál a g_{ab} *reguláris* metrikához, azaz tetszőleges $t^{abc}{}_{d}$ kompakt tartójú, sima, -1 súlyú, teszt tenzorsűrűség-mezőre teljesül a

$$\lim_{i\to\infty}\left({}_{(i)}R_{abc}{}^{d} * t^{abc}_{d}\right) = R_{abc}{}^{d} * t^{abc}_{d} \tag{16}$$

reláció, ahol a $R_{abc}{}^{d} * t^{abc}{}_{d}$ jelölés az $R_{abc}{}^{d}\, t^{abc}{}_{d}$ kontrakció M alapsokaságra vett $\int_M R_{abc}{}^{d}\, t^{abc}{}_{d}$ integrálját jelöli.

Visszatérve a kérdésben említett ötdimenziós bránelméletre az alábbiak mondhatók el: Mivel bármely konkrét téridőmodellben az ötdimenziós alapsokaságon disztribucionális értelemben adott metrika folytonos a négydimenziós bránon, mint hiperfelületen keresztül, a metrika közelíthető olyan C^∞ metrikákból álló $\{{}_{(i)}g_{ab}\}$ $(i = 1, 2, \dots)$ sorozattal, amelyik görbületben konvergál g_{ab}-hez. Az is feltehető az általánosság elvesztésének veszélye nélkül, hogy a bránon értelmezett $\Psi_{(J)\dots}{}^{\dots}$ $(J = 1, 2, \dots$,j) anyagmezők is kiterjeszthetőek a brán egy tetszőlegesen kicsiny – annak érdekében, hogy az esetleges megfigyelésekkel se kerüljünk ellentmondásba, az ötödik dimenzióban mondjuk a Planck-hossznál nem nagyobb kiterjedésű – a bránhoz konvergáló környezet-rendszerére, és így egy $\{{}_{(i)}\Psi_{(J)\dots}{}^{\dots})\}$ a bránon értelmezett $\Psi_{(J)\dots}{}^{\dots}$ anyagmezőhöz konvergáló sorozatot határoznak meg. Ily módon előállíthatjuk a téridőknek egy olyan $\{(M,\ {}_{(i)}g_{ab},\ {}_{(i)}\Psi_{(J)\dots}{}^{\dots})\}$ sorozatát, mely az M alapsokaságon különkülön C^∞ ${}_{(i)}g_{ab}$ metrikából és ${}_{(i)}\Psi_{(J)\dots}{}^{\dots}$ anyagmezőből épül fel, és amely mind görbületben, mind pedig anyageloszlásban konvergál a bránelmélet téridejéhez.

Mivel a topológiai tulajdonságok lényegében csak a görbület viselkedésétől függenek, továbbá a görbületben való konvergencia biztosított g_{ab} folytonossága révén, az $(n-2)$-dimenziós felületek topológiai jellemzői feltehetően bármely disztribucionális értelemben jól definiált elméletben invariánsak maradnak a határátmenet során. A kérdés ezek után az, hogy a sima esetben megfogalmazott feketelyuk topológiai tételek további feltételei teljesülnek-e a vizsgált elméletben. Amennyiben az általánosított domináns energiafeltétel valamely ötdimenziós elméletben teljesül, a feketelyukak marginálisan csapdázott $(n-2)$-dimenziós felületei vagy S^3, vagy pedig $S^2 \times S^1$ topológiával rendelkeznek. Mivel azonban az említett ötdimenziós bránelméletben a kozmológiai konstans negatív, feltéve, hogy léteznek a keresett feketelyuk megoldások, az említett tételekre hivatkozva csak a negatív Yamabe-osztályba tartozó $(n-2)$-dimenziós felületek felszínére vonatkozóan adhatunk meg alsó korlátokat. Érdekes lehet az az eset, amikor az ötdimenziós bránelméletben az S^3 és $S^2 \times S^1$ topológiák esetleg kizártak, ugyanakkor a belső struktúrákat tekintve különben C^∞ bránon teljesül az általánosított domináns energiafeltétel, mivel az eredményeim fényében, ekkor a bránon megengedett feketelyukak topológiája szükségképpen S^2, amelyekhez esetleg csak „feketehúr" kiterjesztések létezhetnek az ötdimenziós bránelméletben.

Természetesen a fent vázolt gondolatmenet korántsem teljes, valószínűleg részletes kifejtést és további pontosításokat igényel.

Gödöllő, 2011 május 12.

....
Rácz István

Hivatkozások

[1] Wald R M 1984 *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago

[2] Øyvind Grøn and Steinar Johannese 2011 arXiv:1104.1383v1 [gr-qc]

[3] Kunduri H K 2011 arXiv:1104.5072v1 [hep-th]

[4] Kunduri H K, Lucietti J and Reall H S 2007 Class. Quant. Grav. **24**, 4169-4189

[5] Geroch R and Traschen J 1987 Phys. Rev. D **36**, 1017–1031