VIZSGAKÉRDÉSEK/FELADATOK

A

BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBE

című

SPECIÁLKOLLÉGIUM

második féléves anyagához

1. Lineáris közelítést használva a téridő metrikája legyen adva a
$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$$
alakban, ahol η_{ab} a Minkowski-téridő metrikáját jelöli! Mutassa meg, hogy az alkalmazott közelítésben
$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab}$$
teljesül. (Az indexek felhúzását mindenütt az η^{ab} metrikával végezzük!)

2. Legyen u^a egységnyi normájú időszerű vektormező, $u^e u_e = -1$, az (M, g_{ab}) párral meghatározott téridőn. Definiáljuk a ${\pi_a}^b = {\delta_a}^b + u_a u^b$ összefüggéssel a $\pi : TM \to TM$ leképezést, ahol ${\delta_a}^b$ a TM érintőtéren ható identikus hozzárendelést jelöli.

   Mutassa meg, hogy

   (a) ${\pi_a}^b u_b = 0$, ${\pi_a}^b u^a = 0$, ${\pi_a}^e {\pi_e}^b = {\pi_a}^b$, továbbá, ha $g_{ef} X^e u^f = 0$, akkor $X^a \in TM : X^a = {\pi_e}^a X^e$, azaz $\pi : TM \to TM$ egy olyan merőleges vetítés, amely minden p pontban az ottani érintőtér, T_pM, bármely eleméhez annak u^a-re merőleges részét rendeli!

   (b) $g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}$, ahol $h_{ab} = {\pi_a}^e {\pi_b}^f g_{ef}$!

   (c) Jelölje $\dot{u}^a$ az $u^e \nabla_e u^a$ kifejezést! Mutassa meg, hogy $\dot{u}^a$ mindig merőleges u^a-ra, azaz $g_{ef} \dot{u}^e u^f = 0$!

3. Igazolja, hogy valamely u^a megfigyelőre nézve izotróp kozmológiai modellben bármely szimmetrikus $(0,2)$-típusú S_{ab} tenzor az
$$S_{ab} = (S_{ef} u^e u^f) u_a u_b + \frac{1}{3}(S_{ef} h^{ef}) h_{ab}$$
alakban írható fel.

4. Mutassa meg, hogy

   (a) a k^a,
$$k^\alpha = (1, \sqrt{1 - kr^2}/a(t), 0, 0)$$
   komponensekkel rendelkező vektormező a
$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 \right) \right]$$
   vonalelemmel adott izotróp kozmológiai modell metrikájára nézve fényszerű.

(b) a $\tilde{k}^a = a^{-1}(t) \cdot k^a$ fényszerű vektormezőre

$$\tilde{k}^e \nabla_e \tilde{k}^a = 0$$

teljesül.

5. Tekintsünk egy olyan tökéletes folyadékkal ábrázolt anyagi rendszert, amelynek 4-es sebességvektora u^a, valamint a folyadékkal együttmozgó megfigyelők által mért energiasűrűsége és nyomása ρ, illetve P, azaz tegyük fel, hogy

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \;!$$

Határozza meg a $\nabla^a T_{ab} = 0$ egyenlet

$$u^b(\nabla^a T_{ab}) = 0,$$

valamint

$$\pi_a{}^e(\nabla^a T_{ae}) = 0$$

vetületeit!

6. Írja fel a Schwarzschild-téridőben befelé futó radiális fényszerű geodetikusok egyenletét, valamint adja meg azok explicit megoldását.

Minden érdeklődőt kérek, hogy a vizsgák lehetséges időpontját előre, emailben, vagy telefonon egyeztesse!

Budapest, 2006. június 6.

Rácz István

KFKI RMKI, Elméleti Főosztály

iracz@sunserv.kfki.hu

06 - 30 - 426 - 1197