

FEKETELYUKAK A GRAVITÁCIÓ GEOMETRIZÁLT ELMÉLETEIBEN

Doktori értekezés

Rác István
MTA KFKI RMKI

Budapest
2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. Sötét csillag	5
1.2. A Schwarzschild-téridő	6
1.3. A feketelyukak fizikája a 70-es és 80-as években	10
1.4. A dolgozat felépítése	14
2. Feketelyuk-téridők	19
2.1. Alapfogalmak	19
2.1.1. A téridő modellje	19
2.1.2. Általánosított domináns energiafeltétel	20
2.1.3. Gauss-féle fényszerű koordinátarendszerek	21
2.1.4. Csapdázott felületek	24
2.2. Feketelyuk-téridők	25
2.3. Stacionárius feketelyukak	28
2.4. Killing-horizontok	31
2.5. Felületi gravitáció	33
3. Feketelyuk-téridők lokális kiterjesztése	39
3.1. A lokális kiterjesztés megkonstruálása	39
3.1.1. Téridőkiterjesztések	39
3.1.2. A lokális kiterjesztési tétel bizonyítása	40
3.2. A $t=állandó$ hiperfelületek	45
3.2.1. Geometriai segédletek	46
3.2.2. A sztatikus hiperfelületek	47
3.2.3. A stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek	49
4. Feketelyuk-téridők globális kiterjesztése	51
4.1. A globális kiterjesztés megkonstruálása	51
4.1.1. A Killing-pályák tere	52
4.2. A globális kiterjesztés	56

4.3. Az anyagmezők kiterjesztése	58
5. A feketelyukak, mint hologramok	63
5.1. Deformált feketelyukak	63
5.2. A matematikai modell	64
5.2.1. A Newman-Penrose formalizmus	66
5.3. Deformált vákuum feketelyukak	67
5.3.1. A karakterisztikus kezdőértékprobléma megfogalmazása	67
5.3.2. A teljes kezdőadatrendszer meghatározása	71
5.3.3. A görbület viselkedése \mathcal{N} generátorai mentén	76
5.4. Deformált elektrovákuum feketelyuk-téridők	78
5.5. Záró megjegyzések és nyitott kérdések	82
6. A tengelyszimmetria létezéséről	85
6.1. A probléma felvezetése	85
6.2. A vizsgált stacionárius feketelyuk-téridők	86
6.3. A Killing-pályák tere	87
6.4. Az analitikus eset	89
6.4.1. u -invariancia a horizonton	91
6.4.2. Einstein–Maxwell rendszer	97
6.5. A megoldások szimmetriái	99
6.5.1. A gravitáció és anyag csatolt rendszerei	100
6.5.2. A Killing-vektormező megkonstruálása	102
6.6. A Killing-vektormező létezése a sima esetben	107
7. A feketelyukak topológiája	113
7.1. Hawking tételének általánosításai	114
7.2. Geometriai alapfeltevések	116
7.2.1. A marginális és a nemcsapdázott felületek irányítása	117
7.2.2. Szigorú értelemben vett stabilitás	118
7.3. A topológia tétel	119
7.4. Még egyszer a stabilitási feltételről	124
7.5. Záró megjegyzések	125
8. Összefoglalás	129
9. Köszönetnyilvánítás	133
10. Appendix	135

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Sötét csillag

Kicsit leegyszerűsítve a feketelyukakra úgy gondolhatunk, mint a tér azon lokalizált részeire, ahol a gravitáció olyan erős, hogy azokból már semmiféle hatás, még az elektromágneses kölcsönhatás sem képes információt az azokat körülvevő külső tartományokba eljuttatni. Ennél az egyszerű, ugyanakkor kissé meghökkentő meghatározásnál talán csak az meglepőbb, hogy a feketelyuk fogalma milyen korán megjelent a fizikában. 1783-ban Henri Cavendish egy John Michell nevű angol szerzetes dolgozatát ismertette a Royal Society előtt, amelyben egy olyan égitest, az úgynevezett „sötét csillag” létezésének lehetőségét veti fel, amelynek gravitációs vonzása elegendően nagy ahhoz, hogy a felületéről még a fény se szökhessen meg. 1796-ban Peter Simon Laplace, Michell-től függetlenül, hasonló érveléssel állt elő. Mindketten a newtoni gravitációelméletben – Newton fénykorpuszkula elméletére építve – jutottak el a „sötét csillag” fogalmához.

Mielőtt továbblépnénk, érdemes egy pillantást vetni Michell és Laplace érvelésének egyszerű mennyiségi következményeire. A newtoni gravitációelméletben szökési sebességen az első, nem zárt (parabola) pálya kialakulásához szükséges v_p sebességet értjük. Ennek értékét a

$$\frac{1}{2} \mu v_p^2 = \frac{G \mu m}{R} \quad (1.1.1)$$

relációval adhatjuk meg, ahol az adott csillag tömegét, sugarát, illetve a gravitációs állandót m , R , illetve G jelöli. A v_p szökési sebesség értéke például ~ 11 km/s a Föld esetében, és ~ 6000 km/s egy fehértörpére vonatkoztatva. A fenti megfontolások szerint valamely csillag akkor válik „sötétté”, ha a rá vonatkozó szökési sebesség legalább akkora, mint a

vákuumbeli fénysebesség, azaz $v_p \geq c$. Ez – (1.1.1) alapján – akkor következhet be, ha

$$\frac{1}{2} c^2 \leq \frac{G m}{R}. \quad (1.1.2)$$

Kicsit átrendezve az (1.1.2) egyenlőtlenséget azt mondhatjuk, hogy egy csillag akkor sötét – a fent bevezetett newtoni értelemben –, ha annak m tömege az

$$R_S = \frac{2 G m}{c^2} \quad (1.1.3)$$

sugárnál kisebb R sugarú térrészbe tömörül. Figyelemre méltó az, hogy R_S értéke éppen egybeesik az Einstein-féle gravitációelmélet – lentebb röviden ismertetett – Schwarzschild-megoldásának jól ismert karakterisztikus méretével, a Schwarzschild-sugárral.

Mivel a newtoni elméletben a fénysebesség nem kitüntetett, a sötét csillag elvi létezése egyáltalán nem jelentette azt, hogy az adott objektumról semmiféle információ nem juthat el egy távoli megfigyelőhöz. Ahhoz, hogy egy sötét csillagról információ juthasson el hozzánk, elegendő a fénysebességnél nagyobb sebességgel terjedő hatást találni, amelynek létezését a newtoni elmélet nem zárja ki.

A fény hullámtermészetére építő elmélet gyors sikereinek következtében John Michell és Laplace felvetései, valamint a kapcsolódó spekulációk nagyon gyorsan a feledés homályába merültek. A fény hullámtermészetére vonatkozó vizsgálatokat ugyanis lényegesen leegyszerűsítette az a feltételezés, hogy a leggyengébb kölcsönhatásként számontartott gravitáció fényre kifejtett hatása a Földön megszokott körülmények között nyugodtan elhanyagolható. Így egyáltalán nem meglepő, hogy a sötét csillag fogalma csak jóval az Einstein-féle gravitációelmélet megszületése után került ismét a tudományos érdeklődés homlokterébe.

1.2. A Schwarzschild-téridő

Az Einstein-egyenletek mindmáig legfontosabb egzakt megoldását Karl Schwarzschild, néhány hónappal az alapegyenletek közzététele után, 1916-ban adta meg [109]. A Schwarzschild-téridő segítségével mód nyílik olyan alapvető fogalmak, mint a *csapdázott felületek*, vagy az *eseményhorizont* egyszerű és szemléletes bevezetésére. Mivel ezek a fogalmak a későbbiekben alkalmazott absztrakt matematikai leírásban központi szerepet játszanak, fontosnak gondolom ezeknek az egyik legegyszerűbb téridőmodellen keresztül történő bemutatását.

A Schwarzschild-téridő a vákuumra vonatkozó Einstein-egyenletek gömbszimmetrikus

statikus megoldása, melynek ívelemét a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (1.2.4)$$

formában írhatjuk fel. A téridő alapsokasága $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$, a t és r koordináták a $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, míg a ϑ és φ koordináták a szokásos gömbi tartományokat futják be. Mivel a metrika nem függ a t koordinátától, $t^a = (\partial/\partial t)^a$ Killing-vektormező M felett, azaz t^a eleget tesz a $\nabla_{(a}t_b) = 0$ egyenletnek. Az is belátható, hogy t^a időszerű a $2m < r < \infty$ egyenlőtlenség által kijelölt M_I téridőtartomány felett, azaz a Schwarzschild-téridő stacionárius M_I tartományban. Mivel az is igaz, hogy t^a hiperfelület-merőleges, azaz a $t_{[a}\nabla_b t_{c]}$ kifejezés azonosan nulla M felett, a téridő sztatikus M_I felett.

A metrika (1.2.4) alakjából az is azonnal látszik, hogy tetszőleges m értékre az $r \rightarrow \infty$ határesetben éppen a sík Minkowski-téridő geometriájához tart, így a Schwarzschild-téridő aszimptotikusan sík. Annak sebessége, ahogyan a Schwarzschild-téridő metrikája a sík Minkowski-téridő geometriájához tart, egyedül az m paraméter értékétől függ, amiről megmutatható, hogy egy képzeletbeli, a gömbszimmetria centrumába helyezhető forrás tömegével azonosítható [53, 115]. Ezen túlmenően, Birkhoff 1923-ban bizonyított eredménye szerint a Schwarzschild-téridő unikális abban az értelemben, hogy a vákuum Einstein-egyenletek bármely gömbszimmetrikus, legalább kétszer folytonosan deriválható, azaz C^2 osztályú megoldása izometrikus a Schwarzschild-téridő valamely résztartományával [9].

A $(t, r, \vartheta, \varphi)$ lokális koordinátákra vonatkozó (1.2.4) ívelem alakjából következik, hogy a Schwarzschild-metrika szinguláris az $r = 0$, valamint az $r = R_S = 2m$ helyen.¹ Az utóbbi szingularitásról kiderült, hogy az *koordináta-szingularitás*, azaz megfelelő új koordináták bevezetésével kiküszöbölhető [70, 111]. Ez az adott speciális esetben úgy történik, hogy az M_I téridőtartomány felett a (t, r) koordináták helyett bevezetjük a (T, X) Kruskal-Szekeres-típusú koordinátákat az

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} = X^2 - T^2 \quad (1.2.5)$$

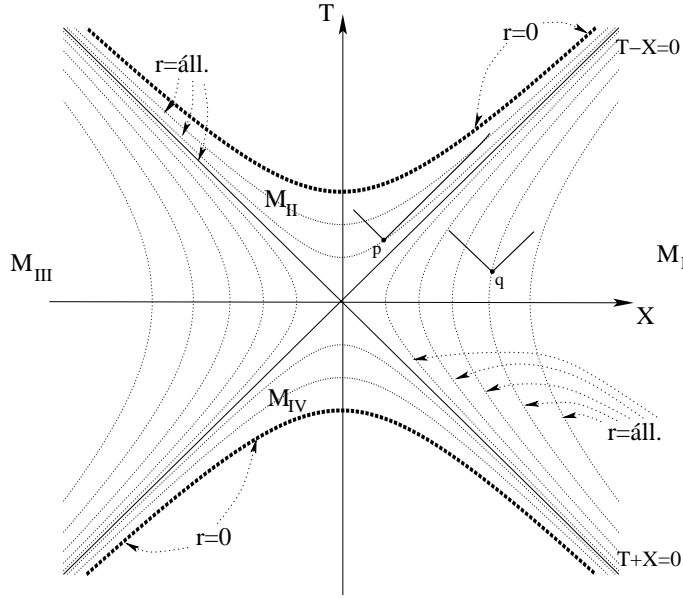
$$\tanh\left(\frac{t}{4m}\right) = \frac{T}{X} \quad (1.2.6)$$

implicit relációk segítségével! Az ily módon bevezetett $(T, X, \vartheta, \varphi)$ lokális koordinátákat felhasználva a Schwarzschild-téridő ívelemét a

$$ds^2 = \frac{32m^3 e^{-\frac{r}{2m}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (1.2.7)$$

¹Itt és a jelen dolgozat hátralévő részében mindenütt geometriai egységeket használunk, azaz a $c = G = 1$ feltételezéssel élünk.

alakban írhatjuk fel. Ez a metrika már nem szinguláris az $r = 2m$ helyen. Az (1.2.6) relációt felhasználva az is könnyen látható, hogy a kétdimenziós $T - X$ szekcióban a lehető legnagyobb koordinátatartomány, ahol az (1.2.7) ívelem értelmezett, az $r = 0$ értéknek megfelelő $T^2 - X^2 = 1$ hiperbolaágak – ezeket az 1.1. ábrán a vastagon jelzett szaggatott vonalak jelenítik meg – között elhelyezkedő, az M_I -nél lényegesen kiterjedtebb tartomány. Az 1.1. ábrán az is jól látható, hogy a kiindulási M_I téridőtartományunk pontosan a jobb



1.1. ábra. Az ábra a Schwarzschild-téridőnek a Kruskal-Szekeres-féle koordináták segítségével megadható maximális analitikus kiterjesztésének megjelenítésére szolgál. A konformisan sík $T - X$ szekció pontjai egy-egy kétdimenziós r sugarú gömböt helyettesítenek. A pontozott vonalak az azonos r értékkel rendelkező „pontokat” kötik össze. Míg r értéke a p pontból mind a befelé, mind pedig a kifelé futó, jövőirányú, fényszerű geodetikusok mentén csökken, addig q pontból – a Minkowski-téridőben megszokott módon – a befelé induló, jövőirányú, fényszerű geodetikusok mentén csökken, míg a kifelé futók mentén növekszik.

oldali „negyednek” felel meg, amelyet két, az origón áthaladó és az X tengellyel ± 45 fokos szöget bezáró egyenes határol. Vegyük észre, hogy az (1.2.6) ívelem a $T - X$ szekcióban konformisan sík, tehát az ehhez a szekcióhoz tartozó, radiális fényszerű geodetikusokat éppen a vízszintes X tengellyel ± 45 fokos szöget bezáró egyenesek ábrázolják. Ebből egyrészt az látszik, hogy a négy különálló negyed elválasztó, $T = \pm X$ egyenletek által meghatározott felületek fényszerű hiperfelületek, másrészt az, hogy M_{II} -es tartományban felvett ki-, illetve befutó radiális fényszerű geodetikusok mindegyike szükségképpen az $r = 0$ helyen lévő szingularitáson végződik. Így – a relativitáselmélet alapfeltevéseivel összhangban – nem létezik olyan kauzális görbe, amely egy itteni pontból indulva átjuthatna az M_I tartományba.

Vegyük észre azt is, hogy az ábra a Schwarzschild-téridő olyan ábrázolását adja, ahol a $T - X$ sík minden egyes pontja egy olyan kétdimenziós – az (1.2.6) összefüggésnek meg-

felelő r sugarú gömböt helyettesít, melynek felszíne $\mathcal{A} = 4\pi r^2$. Az ábráról az is könnyen leolvasható, hogy az r koordináta értéke, azaz a megfelelő gömbök felszíne csökken az M_{II} tartomány bármely pontjából jövőirányban indított, radiális, fényszerű geodetikus mentén attól függetlenül, hogy azok „kifelé” vagy „befelé” irányítottak. Penrose nyomán [86] az olyan kompakt kétdimenziós felületeket, amelyeket még a róluk jövőirányba kifelé induló, fényszerű geodetikusok mentén – a fényszerű vektormező által meghatározott, egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport segítségével – elmozgatva is mindig egyre kisebb felszínű felületekhez jutunk, *csapdázott felületeknek* nevezzük. Azokat a kompakt kétdimenziós felületeket, amelyek esetében a felszín éppen csak nem csökken a jövőirányba kifelé induló, fényszerű geodetikusok mentén, *marginálisan csapdázott felületeknek* nevezzük (a pontos és általános definíciók megtalálhatók a 2.1.4. alfejezetben).

A Schwarzschild-téridő esetén a marginálisan csapdázott felületek pontosan azok, amelyek kijelölik az M_{II} tartomány határát, azaz azon jövőhalmaz határát, amelynek belsejében lévő pontok mindegyike valamely jövő értelemben csapdázott felülethez tartozik. Könnyen ellenőrizhető, hogy M_{II} -ben a csapdázott felületek az $r < 2m$ és $T > 0$ összefüggések által meghatározott tartományban helyezkednek el, míg az $r = 2m$ és $T > 0$ relációkkal adott fényszerű hiperfelületek pontjai reprezentálják a marginális csapdázott felületeket.

Érdemes megjegyezni, hogy bármely sztatikus, azaz az $r, \vartheta, \varphi = \text{állandó}$, $r \geq 2m$ pályán mozgó megfigyelő által belátható téridőtartomány éppen az $M_I \cup M_{IV}$ résztér-idővel esik egybe. Mindezek alapján az M_{II} által megjelenített részt a Schwarzschild-téridő *feketelyuk-tartományának* tekintjük, míg a négy különálló negyedlet elválasztó, $T = \pm X$ egyenletek által meghatározott hiperfelületekre – melyek egy kettéhasadó Killing-horizontot képeznek – mint a Schwarzschild-téridő *eseményhorizontjára*, addig ennek a $T, X > 0$ relációk által kijelölt negyedére, mint a Schwarzschild-téridő *jövő eseményhorizontjára* szoktunk hivatkozni.

A Schwarzschild-téridőben az $r = 2m$ koordinátaszingularitás mellett, a fekete- és a fehérlyuk-tartomány határán – az $r = 0$ helyet megjelenítő $T^2 - X^2 = 1$ hiperbolaágak mentén – valódi görbületi szingularitás van. A szingularitás jellegének megvilágításához tekintsük most az árapályerők viselkedését egy radiálisan az $r = 0$ szingularitás felé befutó, a

$$u^e \nabla_e u^a = 0 \quad (1.2.8)$$

egyenletnek eleget tevő, időszerű geodetikus görbe mentén. Mivel Einstein gravitációelméletében nincs abszolút vonatkoztatási rendszer, így nincs is értelme arról beszélni, hogy valamely testnek mekkora a gyorsulása. Bár az abszolút gyorsulás fogalma hiányzik, a gravitációs teret helyettesítő téridő geometriájának görbülségét felhasználva kifejezhetjük az egymáshoz infinitezimálisan közeli megfigyelők vagy próbarészecskék relatív gyorsulá-

sát, azaz az úgynevezett árapálygyorsulásokat. Ennek bemutatásához tekintsük az alábbi geometriai elrendezést.

Legyen u^a egy kauzális vektor valamely $p \in M$ pontban, és terjesszük ki u^a -t sima módon valamely p -n u^a -ra transzverzálisan futó $z(\zeta)$ görbe mentén. Tekintsük most a $z(\zeta)$ pontjaiból u^a érintővektorral induló kauzális geodetikusok seregét. Az Z^a eltérésvektor – ez $z(\zeta)$ -n éppen $Z^a = (\partial/\partial\zeta)^a$ – a geodetikusok deviációját kifejező

$$u^e \nabla_e (u^f \nabla_f Z^a) + R_{ehf}{}^a u^e Z^h u^f = 0 \quad (1.2.9)$$

egyenletnek tesz eleget. Ezt kiértékelve a radiálisan befelé futó geodetikusok kiválasztott családjá mentén, a Z^a vektormezőnek a koordináta bázisvektorok átskálázásából kapott, párhuzamosan elterjesztett, ortonormált bázisra vonatkozó $Z^r, Z^\vartheta, Z^\varphi$ komponenseire a

$$\frac{d^2 Z^r}{d\tau^2} = \frac{2m}{r^3} Z^r \quad (1.2.10)$$

$$\frac{d^2 Z^\vartheta}{d\tau^2} = -\frac{m}{r^3} Z^\vartheta \quad (1.2.11)$$

$$\frac{d^2 Z^\varphi}{d\tau^2} = -\frac{m}{r^3} Z^\varphi \quad (1.2.12)$$

relációkat kapjuk, ahol az u^a vektormező által meghatározott kauzális kongruencia elemeinek érintő vektorát $u^a = (\partial/\partial\tau)^a$ jelöli. Ezekből az következik, hogy a kiválasztott időszerű geodetikus mentén az $r = 0$ szingularitás felé mozgó test radiális irányban egyre nagyobb nyújtást, míg az erre merőleges irányokban egyre nagyobb kompressziót kell elszenvedjen. Határesetben, az $r = 0$ helyen ezek a hatások végtelen mértékben felerősödnek.

A fenti formulákból az is látszik, hogy a Schwarzschild-téridő eseményhorizontján, azaz az $r = 2m$ helyen, annál kisebb a fellépő árapálygyorsulás, minél nagyobb a feketelyuk m tömege. Így ahhoz, hogy bármely, közel gömbszimmetrikus feketelyuk esetében egy 1 cm hosszúságú szakasz két végpontja között fellépő árapályerők által okozott relatív gyorsulás értéke elérje a földi gravitációs gyorsulás tízszeresét, annak $r \sim 240 \text{ km} \gg R_S \sim 3 \text{ km}$ távolságban kell lennie a középponttól, ha a feketelyuk tömege megegyezik a Nap tömegével, míg akkor, ha a feketelyuk tömege a Nap tömegének egymilliószorosa, akkor $r \sim 240 \text{ 000 km} \ll R_S \sim 3 \text{ 000 000 km}$ ez a távolság.

1.3. A feketelyukak fizikája a 70-es és 80-as években

Az Einstein-elméletben a feketelyukakhoz kapcsolódó tudásunk igen nagy hányada az előbbi részben ismertetett sztatikus Schwarzschild-téridő [109], továbbá a stacionárius és

tengelyszimmetrikus Kerr-téridő [65] – mely a Schwarzschild-téridő forgó általánosítása – ismeretén nyugszik. Érdekes megjegyezni, hogy még a legegyszerűbb esetben is, konkrétan a Schwarzschild-téridő esetében, meglepően hosszú időre, mintegy négy évtizedre volt szükség a geometriai tulajdonságok megértéséhez, azaz a Kruskal [70] és Szekeres [111] által leírt maximális analitikus kiterjesztés elkészítéséhez. Érdekes módon még ezek az eredmények és a hozzájuk kapcsolódó megértés sem egyszerűsítette le azt a folyamatot, melynek eredményeként megadhatóvá vált a Kerr-téridő maximális analitikus kiterjesztése – melyet Boyer és Lindquist [11] készített el – vagy a Kerr-téridő globális tulajdonságainak feltérképezése, mely Carter [18]-as munkájában található.

Valójában – mégha nagyon áttételes formában is – ezeket az eredményeket az 1950-es évek vége felé történt csillagászati megfigyelések – a kvazárok, kicsiny méretű röntgenforrások, illetve a pulzárok észlelése – és az azok kapcsán beindult spekulációk ösztönözték. Az akkoriban tapasztalt új jelenségek magyarázata elképzelhetetlennek látszott a gravitációs összeomlási folyamatok során felszabaduló irdatlan mennyiségű energia forrásának megértése nélkül. Ennek hatására a hatvanas évek vége felé az Einstein-féle gravitációelméletben intenzív fejlődés vette kezdetét. Ennek csak egyik eredménye a feketelyuk-fizika megszületése. Ezen belül is erőteljes fejlődés indult el a feketelyukak egyértelműségének bizonyítása kapcsán. Az első fontos idevágó eredmények Israel és Carter [58, 59, 20, 21] munkáival kapcsolhatók össze. Ezekben a munkákban, többek között azt mutatták meg, hogy az Einstein-elméleten belül a stacionárius, aszimptotikusan sík, vákuum feketelyukak külső kommunikációs tartományának (a pontos meghatározás megtalálható a 2.2. alfejezetben) geometriája egyértelműen meghatározott a teljes energia és a teljes impulzuszómomentum által. Így minden stacionárius, aszimptotikusan sík, vákuum feketelyuk-téridő külső kommunikációs tartománya egy, a Kerr-téridőosztályhoz tartozó feketelyuk-téridő megfelelő részével izometrikus.²

A feketelyukak lehetséges végállapotáról az Einstein-elméletben a kialakított elképzelések további egyszerűsödéséhez vezettek a 60-as évek végén, illetve a 70-es évek elején elvégzett perturbációs vizsgálatok is. Ezek elsősorban azon nagyon fontos eredményekre épültek, melyek szerint a Schwarzschild- és a Kerr-feketelyukak stabilak a lineáris perturbációkkal szemben [102, 121, 114, 23]. Ezen perturbációkról azt is sikerült megmutatni, hogy az időeltolási invarianciát megjelenítő Killing-vektormező Killing-paraméterében mérve exponenciális gyorsasággal csengenek le.

²Ezek az eredmények valójában a következő egyszerű, bár technikailag nagyon nehezen kivitelezhető felismerésen alapultak. Először azt mutatták meg, hogy a sztatikus esetben a $t = \text{állandó}$, illetve a stacionárius és tengelyszimmetrikus esetben a $t = \text{állandó}$ hiperfelületekből a $t - \varphi$ tükrözési szimmetria felhasználásával származtatott hányadossterén az Einstein-egyenletek elliptikus egyenletekké írhatók át [58, 59, 20, 21, 72, 13]. Ezek után megmutatták, hogy a peremeken, azaz a térszerű végtelenben és a jövő és múlt eseményhorizontok találkozásánál fekvő kettéhasadási felületen megadható adatokra nézve a kérdéses elliptikus peremérték-probléma megoldása egyértelmű [13].

Mindezen részeredményeknek köszönhetően a 70-es évek eleje óta a gravitációs összeomlási folyamatok lehetséges végállapotainak – azaz a kialakuló feketelyukak tulajdonságainak – meghatározása az általános relativitáselméleti kutatások homlokterében maradt. A fent említett perturbációs analízis eredményeire alapozva az az általános vélekedés alakult ki, hogy a végállapotot megjelenítő téridő stacionárius, azaz azzal a feltételezéssel éltek, hogy egy olyan, mindenütt értelmezett Killing-vektormezőt hordoz, amely legalább az aszimptotikus tartományban időszerű.

Éppen ezért érdemes azt is röviden felidézni, amit a stacionárius feketelyuk-téridők (jövő) eseményhorizontjával kapcsolatban a 90-es éveket megelőző időszakban tudtunk. A stacionárius feketelyuk-téridőkről kialakított elképzeléseink valójában Hawking és Carter alábbi, egymást lényegében kiegészítő érvelésén alapultak, így ezeket használták az ilyen típusú feketelyuk-téridők egyértelműségi tételeinek bizonyítása során is.

Hawking, azzal a feltételezéssel élve, hogy (1) a vákuum- vagy elektrovákuum Einstein-egyenletek teljeseznek, és hogy (2) a feketelyuk – úgy, mint a Schwarzschild- vagy a Kerr-feketelyuk-téridők is – egy kettéhasadó Killing-horizonttal rendelkezik, valamint (3) a téridő (és minden a bizonyításaiban előforduló geometriai struktúra) analitikus, úgy érvelt [53, 54], hogy az eseményhorizonton megadható karakterisztikus kezdőadatok invariánsak egy olyan egyparaméteres izometriatranszformáció-csoport hatásával szemben, melynek pályái egybeesnek a horizont fényszerű geodetikus generátoraiival. Ezek után a karakterisztikus kezdőértékprobléma egyértelműségére, továbbá a téridő analitikus voltára hivatkozva úgy érvelt, hogy ekkor az eseményhorizont környezetében léteznie kell egy olyan Killing-vektormezőnek, mely merőleges az eseményhorizontra, így az valójában egy Killing-horizont. Érvelésének megfelelően, ha ez a Killing-vektormező nem esik egybe az aszimptotikus tartományban értelmezhető, ott időeltolási invarianciát generáló Killing-vektormezővel, akkor léteznie kell egy másik olyan Killing-vektormezőnek, ami zárt pályákkal rendelkezik és a horizonttal kompatibilis, továbbá a stacionárius Killing-vektormező lineárkombinációjaként áll elő. Ebben az esetben a stacionárius feketelyuk-téridő tengelyszimmetrikus is.³

Carter megközelítése [20, 21] fordított irányú volt. Ő azzal a feltételezéssel élt, hogy a gravitációs összeomlás után kialakuló egyensúlyi állapotban lévő feketelyuk vagy sztatikus, vagy pedig stacionárius és tengelyszimmetrikus úgy, hogy ugyanakkor egy további, úgynevezett $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával is rendelkezik. Ezek után megmutatta, hogy a sztatikus esetben az eseményhorizont a „sztatikussági határ” részhalmaza, azaz azon téridőtartomány határának részeként jeleníthető meg, ahol a sztatikus Killing-vektormező

³Érdemes kiemelni, hogy bár Hawking imént kivonatossan ismertetett érvelésének legfontosabb elemei később helytállónak bizonyultak, a matematikailag precíz bizonyítások több esetben akár három évtizedig is vártak magukra (lásd, például a dolgozat 6. fejezetében bemutatott, az axiális Killing-vektormező létezésére vonatkozó bizonyítást).

időszerű. Hasonlóan, a stacionárius-tengelyszimmetrikus esetben azt mutatta meg, hogy az eseményhorizont az úgynevezett „cirkularizációs határ” részeként jeleníthető meg, azaz azon téridőtartomány határának része, ahol a stacionárius és tengelyszimmetrikus Killing-vektormezőknek lehet még olyan, állandó együtthatós lineárkombinációja, amely időszerű. A sztatikus esetben maga a sztatikus Killing-vektormező merőleges az eseményhorizontra. A stacionárius és tengelyszimmetrikus feketelyukak esetén pedig a stacionaritást és a tengelyszimetriát meghatározó Killing-vektormezőknek van olyan állandó együtthatókkal képzett lineárkombinációja, mely merőleges az eseményhorizontra. Érdekes azt is megjegyezni, hogy a Carter által használt feltételek sokkal erősebbek, mint azok, amelyeket Hawking alkalmazott. Mivel Carter imént felidézett eredményeinek származtatásához valójában nincs is szükség az Einstein-egyenletek használatára, ezek az eredmények elvileg az Einstein-elméletnél szélesebb körben is alkalmazhatóak lehettek volna.

Israel [58, 59] és Carter [20] a feketelyukak geometriájának egyértelműségét igazoló tételeik bizonyítása során Hawking azon eredménye mellett, miszerint egy stacionárius feketelyuk eseményhorizontja szükségképpen Killing-horizont, azt is feltették, hogy ez a Killing-horizont kettéhasadó, azaz feltételezték, hogy a jövő eseményhorizont mellett létezik egy múlt horizont is úgy, hogy ezek egymást egy kétdimenziós, kompakt \mathcal{S} felületben metszik. Hawking egy másik eredménye – a feketelyuktopológia-tétel – alapján [54, 53] azt is tudjuk, hogy ez a felület – szokásos körülmények között – a kétdimenziós gömb topológiájával rendelkezik (további részletek és a pontos megfogalmazás megtalálható a 7. fejezetben). Israel és Carter, eredményeik származtatása során, azzal a további feltételezéssel is éltek, hogy a természetes módon értelmezhető sztatikus, vagy stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek sima, azaz C^∞ módon terjednek ki az \mathcal{S} felülethez. Ezen feltételek jogosságát Carter később, a [21] referenciában található, sokkal részletesebb vizsgálataiban, az elektrovákuum esetben meg is mutatta. Carter ezen eredményei – Robinson [106], Mazur [72] és Bunting (lásd a [22]-es hivatkozást is) idevágó későbbi eredményeivel együtt – igazolják, hogy a „nem-extrém” esetben az egyedüli elektrovákuum-feketelyukak a Kerr-Newmann-téridőosztályba tartoznak [80], azaz valamely elektromosan töltött Kerr-téridővel [65] esnek egybe.⁴ Meg kell azonban jegyeznünk, hogy Carter idevágó eredményei nagymértékben a forrásmentes Einstein-Maxwell-egyenletek használatára épültek, így biztosan nem alkalmazhatóak olyan általános esetekben, amikor más típusú anyagmezők vannak jelen a téridőben, vagy az Einstein-elmélettől eltérő gravitáció-elméletben gondolkodunk. Ezért a feketelyukak lehetséges végállapotainak meghatározása során a Killing-horizonttal rendelkező téridők tulajdonságainak tisztázása alapvető fontosságúnak bizonyult. Így például fontos annak kiderítése, mennyire erős az a feltételezés, hogy az általános esetben egy stacionárius feketelyuk kettéhasadó Killing-horizonttal ren-

⁴Érdekes megjegyezni, hogy az extrém esetre vonatkozó bizonyítás csak most, a jelen dolgozat megírása közben került közlésre [1].

delkezik. Ezek után, még ha azt találjuk is, hogy ez általánosan így van, nyitott marad a kérdés: jogosan élhetünk-e azzal a feltételezéssel, hogy a sztatikus, vagy stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek sima módon terjednek ki a kettéhasadási felülethez?

Ezekkel teljesen analóg kérdések fogalmazódtak meg nemcsak a feketelyuk egyértelműségi tételek kapcsán, hanem olyan elméleti megfontolásokban is, ahol a kvantumtérelmélet görbült téridőkre kifejlesztett változatának elvi és gyakorlati problémái kerültek előtérbe [64].

1.4. A dolgozat felépítése

A dolgozat következő, 2. fejezetében olyan alapfogalmak rövid bevezetése található, mint *téridő*, (általánosított) *domináns energiafeltétel*, *csapdázott felület*, *feketelyuk* és *Killing-horizont*. Érdemes kiemelni, hogy már ebben a részben is számos fogalom a szokásosnál általánosabb keretek között kerül megfogalmazásra, és több saját eredményt is ennek megfelelő, általánosított formában mutatok be.

A 2. fejezet ilyen típusú részei között említhetjük például a feketelyuk-termodinamika nulladik főtételehez kapcsolódó alfejezetet, ahol először azt mutatom meg, hogy a κ felületi gravitáció értéke szükségképpen állandó, amennyiben az általánosított domináns energiafeltétel teljesül. Ezek után azt is megmutatom, hogy – speciálisan a négydimenziós téridők esetén – a horizonttal kompatibilis Killing-vektormezőhöz tartozó örvényvektor eltűnése a felületi gravitáció állandóságának szükséges és elégséges feltétele [92]. Ezen általános tétel egyszerű következményeként visszkapjuk Carter azon eredményét, melynek értelmében a felületi gravitáció állandó a horizonton, ha a feketelyuk sztatikus vagy úgy stacionárius és tengelyszimmetrikus, hogy ugyanakkor a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával is rendelkezik.

Ismert, hogy amennyiben a κ felületi gravitáció értéke nem nulla az eseményhorizontot ábrázoló Killing-horizont valamely γ fényszerű generátora mentén, akkor γ nem lehet geodetikus értelemben teljes. Megmutatom, hogy egy ilyen inkomplett geodetikus mentén a görbületi tenzor egy párhuzamosan elterjesztett bázisra vonatkozó komponensei nem maradhatnak végesek, ha κ gradiense nem azonosan nulla γ mentén [91].

A feketelyuk-téridők lokális kiterjesztését ismertető 3. fejezetben olyan téridőket tekintek, amelyekben létezik egy egyparaméteres izometriacsoport, és a feketelyuk jövő eseményhorizontját egy \mathcal{N} Killing-horizont jeleníti meg, mely invariáns az izometriatranszformációkkal szemben, továbbá a Killing-vektormező merőleges rá. Felteszem, hogy az \mathcal{N} -en futó Killing-pályák \mathbb{R} -el diffeomorfak, továbbá \mathcal{N} -hez található Σ globális szelés, azaz Σ -t minden egyes Killing-pálya pontosan egyszer metsz. Megmutatom, hogy amikor a κ felületi gravitáció nem zérus és állandó a horizonton, akkor annak valamely környezete ki-

terjeszthető úgy, hogy a kiterjesztett téridőben \mathcal{N} valódi részhalmaza lesz egy kettéhasadó Killing-horizontnak. Ebben a fejezetben mutatom meg azt is, hogy minden sztatikus vagy a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával rendelkező stacionárius és tengelyszimmetrikus téridőben, amelyben egy kettéhasadó Killing-horizont található, a természetes módon értelmezhető sztatikus, vagy stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek sima, azaz C^∞ módon terjednek ki a kettéhasadási felülethez [91].

A 4. fejezetben olyan globálisan hiperbolikus, stacionárius feketelyuk-téridőket tekintek, amelyek egyrészt nem tartalmaznak fehérlyukat, másrészt az \mathcal{N} -el jelölt jövő eseményhorizontjuk egy kompakt globális szeléssel rendelkező Killing-horizont. Megmutatom, hogy ebben az esetben az \mathcal{N} elegendően kicsiny környezetében futó Killing-pályák halmaza egy triviális $-\mathbb{R}$ struktúracsoportú – szorzatnyaláb-szerkezettel látható el. Továbbá – amennyiben a felületi gravitáció nem nulla és \mathcal{N} -en állandó – elkészítem a téridő egy olyan globális kiterjesztését, amely azt is biztosítja, hogy \mathcal{N} a kiterjesztés során egy kettéhasadó Killing-horizont valódi részhalmozására képeződik le. Ebben a fejezetben található az anyagmezőknek az így kapott megnagyobbított téridőkre történő kiterjeszhetőségét bemutató eredményem is. Megmutatom, hogy minden olyan sztatikus (és így t tükrözési szimmetriával rendelkező), vagy olyan stacionárius és tengelyszimmetrikus feketelyuk-téridőben, amely a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával is rendelkezik, az anyagmezők is kiterjeszthetők a megnagyobbított téridőre feltéve, hogy az eredeti téridőben az anyagmezők is rendelkeznek a geometria szimmetria-tulajdonságaival [92].

Érdemes kiemelni, hogy a 2. – 4. fejezetekben bemutatott eredmények egyik legfontosabb következménye az, hogy igazolják azt a korábban csak hipotézisként használt feltevést, miszerint a gravitációs összeomlási folyamat végállapotát megjeleníteni hivatott stacionárius feketelyukak eseményhorizontja – nem csak a négydimenziós Einstein-elméletben, hanem minden ($n \geq 2$)-dimenziójú téridőben, ahol az általánosított domináns energiafeltétel teljesül – mindig olyan Killing-horizont, amely vagy kettéhasadó, vagy pedig $\kappa \equiv 0$ rajta.

Az 5. fejezetben olyan négydimenziós téridőket tekintek az Einstein-Maxwell elméletben, amelyekben egy Killing-vektormező és egy azzal kompatibilis kettéhasadó, azaz nemdegenerált Killing-horizont található. A téridő aszimptotikus tulajdonságaira vonatkozóan semmiféle feltevést nem alkalmazok. Így a kiválasztott téridőkre, mint az általános deformált feketelyukakra is gondolhatunk. Megmutatom, hogy a C^∞ esetben a téridő geometriája és az elektromágneses tér a négydimenziós téridő feketelyuk-tartományában mindenütt egyértelműen meghatározott, mihelyt a kétdimenziós kettéhasadási felületen az ott indukált metrika, egy komplex függvény, továbbá az egyik komplex elektromágneses potenciál is adott [99]. Azokat a feltételeket is meghatározom, amelyek – analitikus esetben – az eseményhorizont külső kommunikációs tartománynak megfelelő oldalán is

hasznos egyértelműséget biztosítanak. Mindezek következtében úgy is tekinthetünk egy négydimenziós, stacionárius, nem-degenerált elektrovákuum feketelyuk-téridő kettéhasadási felületére, mint egy olyan kompakt adathordozóra, mely (legalább is az analitikus esetben) hordozza a teljes elemi környezet előképét. Ezen adatok alapján – a téregyenleteknek a segítségével – a geometria és az elektromágneses mező mindig felépíthető. Ebben az értelemben a kettéhasadási felületre, mint hologramra is tekinthetünk, mely a vizsgált elektrovákuum feketelyuk-téridővel kapcsolatos összes információt hordozza.

Ezt követően, a 6. fejezetben négydimenziós, stacionárius, aszimptotikusan sík elektrovákuum feketelyuk-téridőket tekintek. Felteszem, hogy a vizsgált feketelyuk eseményhorizontja nem-degenerált, azaz a horizontot kifesztítő fényszerű geodetikusok mindegyike múlt-irányban, geodetikus értelemben inkomplett. Megmutatom, hogy a stacionárius Killing-vektormező mellett mindig létezik egy olyan másik – az eseményhorizonttal kompatibilis – Killing-vektormező, mely sima esetben a feketelyuk-tartományban, analitikus esetben a külső kommunikációs tartományban is értelmezhető, és amely által indukált izometria-transzformációkra nézve az eseményhorizont egy Killing-horizont, és amelynek hatásával szemben maga az elektromágneses tér is invariáns [37, 95]. Ez az eredmény Hawking feketelyuk-merevségi tételeként emlegetett azon állításának bizonyítását is adja, mely szerint amikor egy stacionárius feketelyuk nem sztatikus, akkor a kérdéses feketelyuk stacionárius és tengelyszimmetrikus.

A bizonyítás bemutatásához a kezdőérték-problémák és téridő-szimmetriák kapcsolatát is meg kellett vizsgálnom. Ebben a vonatkozásban megmutattam, hogy a gravitáció olyan metrikus elméleteiben, ahol a gravitáció-anyagi rendszerek hiperbolikus fejlődési egyenleteknek tesznek eleget, a kezdőadatok szimmetriái megőrződnek az evolúció során [96, 97].

Ahogy azt az előző részben említettem, az Einstein-elméletben a '70-es évek elejére kibontakozó feketelyuk-fizika egyik kulcsfontosságú eredménye Hawking feketelyuk-topológiai tétele [54], ami azt állítja, hogy a dinamikai feketelyuk-tartomány határának gondolt „apparent horizon” szelései – ezek a szigorúan stabilnak nevezett esetben marginális csapdafelületek – topológiai értelemben szükségképpen kétdimenziós gömbök. Majdnem három évtizeddel később Gibbons [50] és Woolgar [119] Hawking bizonyításának módosításával, az Einstein-elmélet negatív kozmológiai állandóra vonatkozó alakjában – erre az esetre Hawking eredeti bizonyítása nem alkalmazható – az úgynevezett topológiai feketelyukak felszínrel arányos entrópiájára adtak meg fontos alsó korlátot. Az elmúlt évek során Galloway és munkatársai [15, 43, 44, 45] mind Hawking eredeti feketelyuk-topológiai tételét, mind pedig Gibbons és Woolgar eredményeit sikeresen általánosították a magasabb dimenziós Einstein-elméletre. A 7. fejezetben ezen általánosításoknak egy egyszerű és új bizonyítását mutatom be [100]. Ez a bizonyítás az egyszerűsége mellett azt is nyil-

vánvalóvá teszi, hogy a feketelyuk-topológiai tételek és azok általánosításai nemcsak az Einstein-elméletben, de a geometrizált gravitációelméletekben mindenütt alkalmazhatók. Ezt követően megmutatom, hogy bármely $(n \geq 4)$ -dimenziójú téridőben nemcsak a szigorúan stabil marginális csapdafelületeknek, hanem bármely szigorúan stabil felületnek is teljesen analóg topológiai jellemzése adható meg [101].

Szeretném kiemelni, hogy az értekezésben bizonyítással közölt összes lemma, állítás és tétel saját, tudományos közleményben publikált eredmény. Néhány esetben ezek még a publikáltnál is általánosabb formában kerültek kimondásra, így azok a bizonyításaikkal együtt új, önálló eredményeknek tekintendők. Végül ismételtén szeretném az olvasó figyelmét felhívni arra, hogy a 2–4., valamint a 7. fejezetekben ismertetett eredmények származtatása során sehol nem használtam konkrét téregyenleteket, amelyek akár a téridő geometriáját, akár a rajta értelmezett anyagmezők tulajdonságait érintették volna.

2. fejezet

Feketelyuk-téridők

Ebben a fejezetben a jelen dolgozatban gyakran használt alapfogalmak tisztázása mellett¹ már több, a Killing-horizontok alapvető tulajdonságait érintő saját eredményem is bemutatásra kerül.

2.1. Alapfogalmak

Mielőtt a feketelyuk-téridők fogalmának meghatározásához hozzálátnánk, érdemes rögzíteni, hogy valójában mit is értünk téridőn a gravitáció metrikus elméleteiben.

2.1.1. A téridő modellje

2.1.1. Definíció. *Téridőn mindig egy olyan (M, g_{ab}) párt értünk, ahol M egy n -dimenziós sima (C^∞) , parakompakt, összefüggő, irányítható, differenciálható sokaság, g_{ab} pedig egy sima Lorentz-szignatúrájú metrika M -en.² Feltesszük továbbá, hogy az (M, g_{ab}) téridő időirányítható, és egy időirányítást ki is választottunk rajta.*

A továbbiakban a latin indexek mindig absztrakt tenzorindexeket, a görög indexek tenzoriális objektumok koordinátabázisokra vonatkozó komponenseit, míg a nagybetűs latin indexek mindig $(n - 2)$ -dimenziós térszerű felületeken értelmezett tenzoriális objektumok

¹Bár a legfontosabb és gyakran használt alapfogalmak ismertetésére folyamatosan törekszem, a jelen dolgozat adta keretek mégsem teszik lehetővé az összes alapfogalom bevezetését. Minden ilyen, a dolgozatban felhasznált, de itt részleteiben nem ismertetett fogalmat és állítást igyekszem hivatkozással ellátni.

²Konkrétabban, a dolgozat azon fejezeteiben, ahol a Newmann-Penrose-formalizmust használok a szignatúra $(+, -, \dots, -)$, míg az összes többi esetben $(-, +, \dots, +)$.

ottani koordinátabázisokra vonatkozó komponenseit jelölik. A dolgozatban alkalmazott egyéb jelölések a Robert Wald könyvében [115] található jelöléseket követik.

A zárt, vagy majdnem zárt kauzális görbék létezését az Einstein-elmélet alapfeltevései nem zárják ki. Ugyanakkor ezek létezése ellentmondani látszik például azon elvárásunknak, hogy elvileg bármely kísérletet szabadon elvégezhetünk. Az Einstein-elmélet prediktív képességére apellálva általában ennél jóval többet, a globális hiperbolikusságot is elvárjuk a fizikailag reálisnak tekintett téridőmodellektől. Mégis, mivel több állításunk bizonyítható az általánosabb, erősen kauzális téridők esetében is, most mindkét fogalmat felidézzük.

2.1.2. Definíció. *Az (M, g_{ab}) téridőt akkor nevezünk kauzálisnak, ha az nem tartalmaz zárt kauzális görbét. Azt mondjuk, hogy az erős kauzalitási feltétel teljesül valamely $p \in M$ pontban, ha p bármely környezeté tartalmazza p -nek olyan elegendően kicsiny környezetét, amelyet minden kauzális görbe csak egyszer metsz. A téridő erősen kauzális, ha minden pontjában az.*

A $p \in M$ pontból indított jövőirányú kauzális görbék mentén elérhető pontok halmazát, azaz a p pont kauzális jövőjét $J^+(p)$ -vel jelöljük. Hasonlóan definiálható a p pont kauzális múltja, $J^-(p)$ is.

2.1.3. Definíció. *Az (M, g_{ab}) téridőt globálisan hiperbolikusnak nevezzük, ha erősen kauzális és bármely $p, q \in M$ pontpárra a $J^+(p) \cap J^-(q)$ metszet kompakt részhalmaza M -nek.*

Valamely Σ akauzális³ hiperfelületet Cauchy-fejlődésén azt a $D[\Sigma] \subset M$ -val jelölt halmazt értjük, amelynek bármely pontjából az onnan kiinduló minden jövő- vagy múltirányban kiterjeszthetetlen, kauzális görbe metszi Σ -t.

Geroch megmutatta [46, 47], hogy a globális hiperbolikusság feltétele azzal egyenértékű, hogy a téridő teljes egésze valamely alkalmasan választott kezdőfelületén megadott kezdőadatok Cauchy-fejlődéseként áll elő, azaz létezik olyan Σ akauzális hiperfelület M -ben, hogy $M = D[\Sigma]$. Ekkor Σ -t az (M, g_{ab}) téridő Cauchy-felületének is nevezzük. Geroch azt is megmutatta, hogy a globális hiperbolikus téridők szorzat-topológiával rendelkeznek, azaz az (M, g_{ab}) téridő alapsokasága $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ alakban írható fel, ahol Σ az (M, g_{ab}) téridő Cauchy-felülete.

2.1.2. Általánosított domináns energiafeltétel

Anyagmezőkre általában – az 5. és 6. fejezetektől eltekintve – csak mint absztrakt tenzormezőkre fogunk hivatkozni. Az egyetlen megszorítás, melyet ezekben az esetekben

³A Σ hiperfelületet *akauzálisnak* nevezzük, ha Σ -t bármely kauzális görbe csak egyszer metszi.

használni fogunk, az úgynevezett domináns energiafeltétel általánosítása lesz. Mielőtt ezt ismertetnénk, idézzük fel a domináns energiafeltétel fogalmát!

2.1.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (M, g_{ab}) téridőn értelmezett anyagmezők eleget tesznek a domináns energiafeltételnek, ha a hozzájuk tartozó T_{ab} energiaimpulzus-tenzornak bármely $p \in M$ pontban egy tetszőleges t^a jövőirányú időszerű vektorral vett $-T^a{}_e t^e$ kontrakciója jövőirányú, időszerű vagy fényszerű vektor.*

Ez a feltétel azzal a fizikailag megalapozottnak tűnő elvárásunkkal ekvivalens, hogy a tetszőlegesen választott megfigyelők által mért energiasűrűségek, illetve energiaáramvektorok legyenek nem negatívak, illetve nem térszerűek. Az is belátható, hogy a domináns energiafeltétel – az elnevezéssel összhangban – pontosan akkor teljesül, ha a T_{ab} energiaimpulzus-tenzor tetszőleges ortonormált bázisra vonatkozó komponenseire a $T^{00} \geq |T^{ab}|$ teljesül, tetszőleges a és b indexválasztás mellett.

Az Einstein-elméletben az energiaimpulzus-tenzort – és így a domináns energiafeltételt is – kifejezhetjük a tőle⁴ csak egy pozitív konstans szorzóban eltérő, $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ Einstein-tenzor segítségével. Fontos hangsúlyozni, hogy az Einstein-tenzor mindig értelmezhető, amikor a téridő geometriája ismert. Akkor is, ha esetleg anyagmezők egyáltalán nincsenek jelen a téridőben, vagy az Einstein-egyenletektől lényegesen eltérő módon kapcsolódnak a geometriához. Ez lehetőséget ad a domináns energiafeltétel következő általánosítására.

2.1.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (M, g_{ab}) téridő eleget tesz az általánosított domináns energiafeltételnek, ha található M -en olyan f sima függvény, hogy bármely $p \in M$ pontban egy tetszőleges t^a jövőirányú időszerű vektorra a $-[G^a{}_b t^b + f t^a]$ kontrakció jövőirányú, időszerű vagy fényszerű vektor.*

Könnyen ellenőrizhető, hogy az Einstein-elméletben, nem zérus Λ kozmológiai állandót feltételezve az általánosított domináns energiafeltétel pontosan akkor teljesül az $f = \Lambda$ választás mellett, ha a T_{ab} energia-impulzus tenzor eleget tesz az 2.1.4. definícióban megfogalmazott domináns energiafeltételnek.

2.1.3. Gauss-féle fényszerű koordinátarendszerek

A későbbi fejezetekben bemutatott eredmények származtatása során az egyik leggyakrabban használt technikai segédeszköz a fényszerű geodetikuskok segítségével definiálható,

⁴Zérus kozmológiai állandót feltételezve.

úgynevezett Gauss-féle fényszerű koordinátarendszer. Ezek rövid bemutatása található ebben az alfejezetben.

Legyen \mathcal{N} az (M, g_{ab}) téridő sima, azaz C^∞ , fényszerű hiperfelülete. Tegyük fel, hogy \mathcal{N} sima, továbbá $\Sigma \subset \mathcal{N}$ egy olyan $(n-2)$ -dimenziós sima térszerű felület, mely \mathcal{N} -nek egy (esetleg csak lokális) szelését határozza meg. Továbbá legyenek (x^3, \dots, x^n) tetszőleges lokális koordináták Σ valamely $\tilde{\Sigma}$ nyílt részhalmazán! Tegyük fel, hogy az \mathcal{N} felületet generáló fényszerű geodetikusok k^a érintővektora sima és sehol sem tűnik el $\tilde{\Sigma}$ valamely $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}$ nyílt környezetében. Továbbá jelölje $\tilde{\mathcal{N}}$ az \mathcal{N} felület azon részét, melyet a $\tilde{\Sigma}$ pontjain keresztülfutó fényszerű geodetikusok feszítenek ki.

Az $\tilde{\Sigma} \times \{0\}$ halmaz elegendően kicsiny S nyílt környezetében tekintsük azt a $\psi : S \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$ leképezést, amely minden (q, u) párhoz $\tilde{\mathcal{N}}$ azon pontját rendeli hozzá, mely k^a vektor q ponton áthaladó integrálgörbéje mentén pontosan u paraméterértékhez tartozik. Belátható, hogy a ψ leképezés C^∞ , továbbá az inverzfüggvény-tétel alapján az is igaz, hogy ψ egy-egy értelmű ráképezése $\tilde{\Sigma} \times \{0\}$ egy S -beli nyílt környezetének $\tilde{\Sigma}$ egy $\tilde{\mathcal{N}}$ -beli nyílt környezetére. Ezek után terjesszük ki a $\tilde{\Sigma}$ -on értelmezett x^3, \dots, x^n függvényeket $\tilde{\mathcal{N}}$ -ra úgy, hogy azok értékét állandónak tartjuk a k^a vektormező integrálgörbéi mentén. Ekkor az x^3, \dots, x^n függvények lokális koordinátákat határoznak meg $\tilde{\mathcal{N}}$ -on.

Ezek után tekintsük azt az egyértelműen meghatározott ℓ^a fényszerű vektormezőt $\tilde{\mathcal{N}}$ -on, mely minden egyes $p \in \tilde{\mathcal{N}}$ pontban eleget tesz a $\ell^a k_a = 1$ és az $\ell^a X_a = 0$ feltételeknek, ahol X^a tetszőleges $\tilde{\mathcal{N}}$ -ot érintő olyan vektor p -ben, amelyre $X^a \nabla_a u = 0$. Ekkor, az $\tilde{\mathcal{N}} \times \{0\}$ halmaz $\tilde{\mathcal{N}} \times \mathbb{R}$ -beli Q nyílt környezetét elegendően kicsinek választva, értelmezhető az a $\Psi : Q \rightarrow M$ leképezés, amely a $(p, r) \in Q$ ponthoz M azon pontját rendeli hozzá, mely a p -ből ℓ^a érintővektorral induló fényszerű geodetikus mentén éppen az r affinparaméter-értéknek megfelelő pont, ahol az ℓ^a vektormező által meghatározott fényszerű geodetikusok mentén értelmezett r affinparamétereket olymódon szinkronizáljuk, hogy a $\tilde{\mathcal{N}}$ felület pontjaiban $r = 0$. Ekkor a konstrukció jellegeből fakadóan a Ψ leképezés C^∞ , továbbá az inverzfüggvény-tétel alapján az is igaz, hogy Ψ egy-egy értelmű ráképezése $\tilde{\mathcal{N}} \times \{0\}$ egy nyílt környezetének $\tilde{\mathcal{N}}$ valamely M -beli $\tilde{\mathcal{O}}$ nyílt környezetére. A fent alkalmazott eljáráshoz hasonlóan terjesszük ki most az u, x^3, \dots, x^n függvényeket $\tilde{\mathcal{N}}$ -ról $\tilde{\mathcal{O}}$ -ra úgy, hogy azok értékét állandó értéken tartjuk az ℓ^a érintővektor által meghatározott geodetikus görbék mentén. Ezekhez a függvényekhez az $\tilde{\mathcal{O}} \subset M$ halmaz felett definiált r -et hozzávéve az (u, r, x^3, \dots, x^n) lokális koordinátarendszerhez jutunk, melyek $\tilde{\Sigma}$ és a rajta bevezetett (x^3, \dots, x^n) koordináták megválasztásának erejéig egyértelműek, és amelyekre sokszor, mint *Gauss-féle fényszerű koordinátákra* hivatkozunk.

Ekkor a korábban csak $\tilde{\mathcal{N}}$ -on definiált k^a és ℓ^a vektormezők a $k^a = (\partial/\partial u)^a$ és $\ell^a = (\partial/\partial r)^a$ összefüggések által $\tilde{\mathcal{O}}$ felett mindenütt értelmezetteké válnak. Ezen relációkból az is adódik, hogy k^a és ℓ^a kommutál $\tilde{\mathcal{O}}$ felett, továbbá mivel ℓ^a fényszerű, $g_{rr} = 0$ $\tilde{\mathcal{O}}$

felett. Az

$$\mathcal{L}_\ell g_{ru} = \ell^a \nabla_a (\ell^b k_b) = \ell^a \ell^b (\nabla_a k_b) = \ell^a k^b (\nabla_b \ell_a) = \frac{1}{2} k^b \nabla_b (\ell^a \ell_a) = 0 \quad (2.1.1)$$

összefüggésnek megfelelően a $g_{ru} = 1$ reláció nemcsak az $\tilde{\mathcal{N}}$ felületen, de $\tilde{\mathcal{O}}$ felett mindeütt teljesül [91]. Hasonlóan belátható, hogy a metrikus tenzor g_{r3}, \dots, g_{rn} komponensei sem függenek r értékétől, azaz $\tilde{\mathcal{O}}$ felett mindenütt $g_{r3} = \dots = g_{rn} = 0$. Mindezen felül a fenti konstrukció azt is garantálja, hogy a g_{uu} és g_{uA} komponensek nulla értéket vegyenek fel az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelületen. Így az $\tilde{\mathcal{O}}$ halmaz felett léteznek olyan α és β_A sima függvények, amelyekre $\alpha|_{\tilde{\mathcal{N}}} = -\frac{1}{2}(\partial g_{uu}/\partial r)|_{r=0}$ és $\beta_A|_{\tilde{\mathcal{N}}} = -\frac{1}{2}(\partial g_{uA}/\partial r)|_{r=0}$ teljesül, továbbá $\tilde{\mathcal{O}}$ felett a legáltalánosabb téridőmetrikát a

$$ds^2 = 2 (dr - r \cdot \alpha du - r \cdot \beta_A dx^A) du + \gamma_{AB} dx^A dx^B \quad (2.1.2)$$

alakban írhatjuk fel, ahol α , β_A és γ_{AB} az u, r, x^3, \dots, x^n változók sima függvényei, γ_{AB} pozitív definit $(n-2) \times (n-2)$ -es mátrix, valamint a nagy latin indexek mindenütt a $3, \dots, n$ értékeket veszik fel.

Érdemes megemlíteni, hogy a $\beta_a = \beta_A (dx^A)_a$ és a $\gamma_{ab} = \gamma_{AB} (dx^A)_a (dx^B)_b$ kifejezések függetlenek az (x^3, \dots, x^n) lokális koordináták megválasztásától, és így az $\tilde{\mathcal{O}}$ típusú nyílt környezetek \mathcal{O} unióján – mely abban az esetben, ha Σ az \mathcal{N} hiperfelület globális szelése, az \mathcal{N} egy teljes M -beli nyílt környezetét adja – az u és r koordinátákkal együtt jól definiáltak. A k^a és ℓ^a vektormezők merőlegesek β_a -ra és γ_{ab} -re, azaz $\beta_a k^a = \beta_a \ell^a = 0$ és $\gamma_{ab} k^a = \gamma_{ab} \ell^a = 0$, továbbá \mathcal{O} felett a téridőmetrikát – az (x^3, \dots, x^n) lokális koordinátákra való hivatkozás nélkül – megadhatjuk a

$$g_{ab} = 2 (\nabla_{(a} r - r \cdot \alpha \nabla_{(a} u - r \cdot \beta_{(a}) \nabla_{b)} u) + \gamma_{ab} \quad (2.1.3)$$

alakban is.

Az \mathcal{O} nyílt környezet C^∞ módon foliázható az $u = \text{állandó}$ és $r = \text{állandó}$ $(n-2)$ -dimenziós $\Sigma_{u,r}$ szintfelületekkel. Az ezeken a felületeken indukált metrikát a

$$q_{ab} = r^2 \beta^c \beta_c \ell_a \ell_b - 2r \beta_{(a} \ell_{b)} + \gamma_{ab} \quad (2.1.4)$$

alakban adhatjuk meg, melyből azonnal látszik, hogy \mathcal{N} -en, és általában csak ott, a q_{ab} és γ_{ab} metrika egybeesik.

2.1.4. Csapdázott felületek

Ahogy az a bevezetőből is kiderült, a kettő kodimenzióval rendelkező csapdázott, illetve nemcsapdázott felületek fontos szerepet játszanak vizsgálataimban. Ezért most röviden felidézem a kapcsolódó fogalmakat.

Tekintsünk egy $(n-2)$ -dimenziós sima, irányítható, határ nélküli kompakt \mathcal{S} felületet az n -dimenziós (M, g_{ab}) téridőben. Legyenek ℓ^a és n^a az \mathcal{S} felületen értelmezett sima, jövő- és múltirányú, fényszerű vektormezők, amelyek eleget tesznek az $n^a \ell_a = 1$ normálási feltételnek, továbbá merőlegesek \mathcal{S} -re, azaz bármely az \mathcal{S} felületet érintő X^a vektorra $g_{ab} \ell^a X^b|_{\mathcal{S}} = g_{ab} n^a X^b|_{\mathcal{S}} = 0$ teljesül. Vegyük észre, hogy ezek a feltételek automatikusan biztosítják azt, hogy sem ℓ^a , sem pedig n^a nem válhat nullvektorra \mathcal{S} -en. Tekintsük most azokat az \mathcal{N} és \mathcal{L} fényszerű hiperfelületeket, amelyeket külön-külön az \mathcal{S} felületről ℓ^a és n^a érintővektorral indított fényszerű geodetikusok feszítenek ki! Az ℓ^a és n^a vektormezők, ezen geodetikus menti párhuzamos eltolással, külön-külön kiterjeszthetők \mathcal{N} -re és \mathcal{L} -re. Jelölje u és r ezen geodetikus családok olyan szinkronizált affin-parametrizációit, amelyekre $u = r = 0$ az \mathcal{S} felületen! A fenti konstrukció következtében az \mathcal{N} és \mathcal{L} fényszerű hiperfelületek simák \mathcal{S} elegendően kicsiny környezetében, továbbá az $u = \text{állandó}$ és $r = \text{állandó}$ szintfelületek egy sima \mathcal{S}_u és \mathcal{S}_r foliációját adják \mathcal{N} -nek és \mathcal{L} -nek a kérdéses környezetben. Jelöljük ϵ_q -val az \mathcal{S}_u és \mathcal{S}_r szintfelületeken indukált, q_{ab} metrikához tartozó térfogatelemet. Ekkor az ℓ^a és n^a fényszerű vektormezőkre vonatkozó expansziót az

$$\mathcal{L}_\ell \epsilon_q = \theta^{(\ell)} \epsilon_q \quad \text{és} \quad \mathcal{L}_n \epsilon_q = \theta^{(n)} \epsilon_q \quad (2.1.1)$$

összefüggésekkel definiáljuk, ahol \mathcal{L}_ℓ és \mathcal{L}_n az ℓ^a és n^a fényszerű vektormezők menti Lie-deriváltakat jelöli.

Penrose eredeti definícióját [86] követve, egy négydimenziós téridő valamely kétdimenziós \mathcal{S} felületét akkor nevezzük jövő-, illetve múlt-csapdázottnak, ha mindkét, rá merőlegesen jövő, illetve múlt irányban indított fényszerű geodetikus család konvergál \mathcal{S} -en. Ennek megfelelően a csapdázott, nemcsapdázott, illetve marginális felületeket az alábbiak szerint definiáljuk.

2.1.6. Definíció. *Legyen egy $(n-2)$ -dimenziós sima, irányítható, határ nélküli kompakt \mathcal{S} felület az n -dimenziós (M, g_{ab}) téridőben. Ekkor az \mathcal{S} felületet akkor nevezzük csapdázottnak, ha a $\theta^{(\ell)}$ és $\theta^{(n)}$ expansziók egyike nem negatív, míg a másik nem pozitív \mathcal{S} -en úgy, hogy közben egyik expanszió sem válik azonosan zérussá. Hasonlóan, $(n-2)$ -dimenziós \mathcal{S} felületet akkor nevezzük nemcsapdázottnak, ha a $\theta^{(\ell)}$ és $\theta^{(n)}$ expansziók egyidejűleg nem negatívak, vagy nem pozitívak \mathcal{S} -en, ugyanakkor egyik expanszió sem válik azonosan zérussá. A határesetben, azaz amikor a $\theta^{(\ell)}$ és $\theta^{(n)}$ expansziók egyike azonosan nulla, a felületet marginálisan csapdázottnak nevezzük.*

Érdeemes észben tartani, hogy az $(n - 2)$ -dimenziós sima, irányítható, határ nélküli kompakt \mathcal{S} felületek halmaza sokkal tágabb, mint azt a fenti három kategória megengedné, azaz rengeteg olyan felület létezik, amelyik ezen kategóriák egyikébe sem tartozik. Ennek belátásához elegendő csak arra gondolni, hogy egy marginális csapdázott \mathcal{S} felület mindig deformálható úgy, hogy a deformáció után az eredetileg azonosan zérus expanzió helyett kapott expanzió előjelet váltson.

2.2. Feketelyuk-téridők

Ahogy az az előző részben megfogalmazott definícióból is kiderül, a Penrose által bevezetett [86] csapdázott felület fogalma éppen annak a fizikai elrendezésnek a geometrizált megfogalmazása, amely akkor valósul meg, amikor a tér valamely véges kiterjedésű, lokalizált részében a gravitáció már olyannyira erős, hogy onnan még a fény sem tud kiszökni, azaz a kifelé indított fénysugarak által kirajzolt hullámfrontok felszíne sem növekszik az időben előrehaladva. Érdeemes megjegyezni, hogy ilyen típusú csapdázott felületek létezésének általános vizsgálatát Schoen és Yau végezték el elsőként. Az találták, hogy Einstein gravitációelméletében szükségképpen kialakulnak csapdázott felületek, amikor elegendően sok energia halmozódik fel egy megfelelően kicsiny térrészben [107]. Nemrégiben, a gravitációs sugárzás esetleges bezáródásának tanulmányozása kapcsán, hasonló motivációjú vizsgálatok ismét az érdeklődés középpontjába kerültek [24, 68].

A bevezetőben már említettem, hogy feketelyukon intuitív alapon olyan – eddig még meg nem határozott értelemben – lokalizált tartományt értünk, amelyből semmiféle fizikai hatás felhasználásával nem lehet információt kijuttatni a feketelyukon kívüli téridő-tartományban lévő megfigyelőkhöz. A lokalizáltsággal kapcsolatos elvárásunkhoz is jól illeszkedik az, ha a feketelyuk-tartományon olyan események összességét értjük, amelyek külön-külön egy-egy jövő értelemben csapdázott felülethez tartoznak. Ebben az esetben a feketelyuk-tartomány határát – erre a Hawking által bevezetett „apparent horizon” elnevezés alapján, mint „látszólagos horizontra” hivatkozhatunk, bár sokkal inkább a „dinamikai” vagy „csapdázási horizont” elnevezés illene hozzá – várakozásaink szerint marginálisan csapdázott felületek feszítik ki. A feketelyukak fizikáján belül a közelmúlt egyik legjelentősebb eredménye éppen az volt, amikor az Einstein-féle gravitációelméletben sikerült igazolni a csapdázási horizont létezését. Pontosabban fogalmazva [2, 3]-ben a szerzőknek azt sikerült bizonyítani, hogy amikor egy $\{\mathcal{C}_t\}$ (parciális) Cauchy felületekkel, mint referencia foliázással ellátott téridő-tartományban, valamely \mathcal{C}_0 (parciális) Cauchy felületen található egy $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{C}_0$ szigorú értelemben stabil marginális csapdafelület, akkor a \mathcal{C}_0 közelében fekvő \mathcal{C}_t felületeken található olyan \mathcal{S}_t marginális csapdafelületek, melyek

egy $\mathcal{H} = \cup_t \mathcal{S}_t$, nyílt csőszerű tartományt alkotnak \mathcal{C}_0 közelében.⁵ Később, a 7. fejezetben visszatérünk az imént említett, szigorú értelemben vett stabilitási feltétel vizsgálatához. Most, a részletek felidézése nélkül, csak azt szeretném megjegyezni, hogy ez a feltétel lényegében arra szolgál, hogy a feketelyuk-tartományon kívül a jövő értelemben csapdázott felületek megjelenését kizárja.

Az iménti bekezdésben – anélkül, hogy a feketelyuk fogalmát a lehető legáltalánosabb keretek között végleges definícióba foglaltuk volna – a geometrizált elméletekben széles körben alkalmazott fogalomalkotás legfőbb elemeit tekintettük át. A szakirodalomban van egy, ettől a „kvázilokális” megközelítéstől látszólag teljesen független, másik feketelyuk-fogalom is, mely a stacionárius és aszimptotikusan sík, vagy aszimptotikusan anti de-Sitter feketelyuk-téridők vizsgálata során alakult ki, illetve erősödött meg. Fontos hangsúlyozni, hogy mindkét esetben éppen az aszimptotikusnak tekinthető tartomány léte teszi lehetővé a feketelyuk-definíció alábbi megfogalmazását. Talán a legfontosabb közös tulajdonságuk az, hogy az aszimptotikusan sík, illetve aszimptotikusan anti de-Sitter feketelyuk-téridők esetében létezhetnek olyan, a feketelyuk-tartománytól távol eső megfigyelők, melyek az általuk mért sajátidőben elvileg végtelen hosszú ideig élhetnek, miközben mindvégig az aszimptotikus tartományban maradnak. Ilyen esetben a téridő feketelyuk-tartományán a téridőnek azt a részét értjük, mely az összes ilyen távoli megfigyelő által látható tartományból hiányzik.

Figyelemre méltó, hogy az imént felidézett fogalomalkotás során az aszimptotikus tartomány konkrét geometriai tulajdonságai – azon az elváráson túl, hogy benne olyan megfigyelők létezhetnek, amely megfigyelők a sajátidejükben mérve elvileg tetszőlegesen sokáig élhetnek és bármikor megfigyeléseket végezhetnek – egyáltalán nem játszanak szerepet. Ez ad lehetőséget az alábbi, a szokásos tárgyalásnál (lásd például a [53, 115, 25] referenciákat) általánosabb fogalomalkotásra.

Az (M, g_{ab}) téridőben futó λ időszerű görbét *kiterjeszthetetlennek* nevezzük, ha M -ben sem jövő, sem pedig múlt végpont nem tartozik hozzá. A λ időszerű, kiterjeszthetetlen görbét *teljesnek* nevezzük, ha sajátidő-paraméterének tetszőleges negatív vagy pozitív értékére értelmezett.

2.2.1. Definíció. Legyen (M, g_{ab}) erősen kauzális téridő és jelölje M' az M sokaság azon részhalmazát, amelyet az (M, g_{ab}) téridőben futó, kiterjeszthetetlen és teljes időszerű görbék pontjai határoznak meg. M' általában maximális, összefüggő halmazok diszjunkt uniójaként adható meg. Jelölje M_{asz} az egyik ilyen maximális, összefüggő komponenst, melyet ezentúl az (M, g_{ab}) téridő aszimptotikus tartományának nevezünk. Ekkor azt mondjuk,

⁵Fontos megemlíteni, hogy amikor a szigorú értelemben vett stabilitási feltételtől eltekintünk, akkor előfordulhat, hogy egy marginális csapdafelület nem a feketelyuk-tartomány határán, hanem annak belsejében helyezkedik el [8].

hogy az (M, g_{ab}) téridőben az M_{asz} aszimptotikus tartományra vonatkozóan található feketelyuk, ha az M_{asz} aszimptotikus tartomány kronológiai múltja, $I^-[M_{asz}]$, nem a téridő alapsokaságával esik egybe. Ekkor a

$$\mathcal{B} = M \setminus I^-[M_{asz}] \neq \emptyset \quad (2.2.2)$$

részalmazt feketelyuk-tartománynak nevezzük.

Hasonlóan, amikor az M_{asz} aszimptotikus tartományban futó, tetszőlegesen hosszú élettartammal rendelkező megfigyelők kronológiai jövőjének uniója, azaz $I^+[M_{asz}]$ nem a teljes téridővel esik egybe, akkor a

$$\mathcal{W} = M \setminus I^+[M_{asz}] \neq \emptyset \quad (2.2.3)$$

részalmazt az M_{asz} aszimptotikus tartományra vonatkozó fehérlyuk-tartománynak nevezzük. Mivel általános az a vélekedés, hogy az aszimptotikus tartománnyal rendelkező téridőkben dinamikai folyamat révén fehérlyuk-tartomány sohasem alakulhat ki, a további vizsgálataink során kiindulásként mindig olyan téridő-modelleket tekintünk, amelyekben nincs fehérlyuk-tartomány, azaz feltesszük, hogy

$$M = I^+[M_{asz}]. \quad (2.2.4)$$

2.2.2. Definíció. Az $M_{asz} \subset M$ aszimptotikus tartomány kronológiai múltjának és jövőjének metszetét a külső kommunikáció tartományának nevezzük és \mathcal{D} -vel jelöljük. Amikor (2.2.4) teljesül,

$$\mathcal{D} = I^-[M_{asz}]. \quad (2.2.5)$$

2.2.3. Definíció. A téridő jövő eseményhorizontján a külső kommunikációs tartomány határát, azaz az

$$\mathcal{N} = \partial I^-[M_{asz}] \quad (2.2.6)$$

relációval meghatározott halmazt értjük.

Az utóbbi hiperfelület választja el az aszimptotikus tartományban futó megfigyelők által elvileg észlelhető eseményeket a feketelyuk-tartományon belül elhelyezkedő eseményektől. Mivel ez egy múlt-halmaz határa, úgy is gondolhatunk rá, mint arra a „legkülső” hullámfrontra, amely már éppen nem érheti el az aszimptotikus tartományt.

Mivel az \mathcal{N} jövő eseményhorizont egy múlt-halmaz határa, megmutatható, hogy \mathcal{N} legalább lokálisan eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek, azaz legalább C^1 -differenciálhatósági osztályba tartozik [53]. Mivel \mathcal{N} egy múlt-halmaz határa, az is bizonyítható, hogy

bármely jövőirányú, fényszerű geodetikus generátora maximális, és végig az \mathcal{N} felületben fut [53, 87, 115]. Így a horizont szerkezetének változására az az egyedüli lehetőség, ha új geodetikus generátorok csatlakoznak a már meglévőkhöz.

Annak megmutatásához, hogy az imént bevezetett feketelyuk-fogalom, bizonyos körülmények között, jól összeegyeztethető a fejezet elején ismerttetett kvázilokális definícióval, érdemes felidézni Penrose „kozmosz cenzor” létezésére vonatkozó hipotéziseit [86, 88, 89]. A hipotézis első és egyben gyengébb verziója azon elvárásunkat fejezi ki, hogy a dinamikai folyamatok során, amikor egy csapdázott felület megjelenése a szingularitás-tételek értelmében automatikusan maga után vonja a téridő-szingularitások kialakulását is, az így létrejött szingularitás az aszimptotikus tartományban lévő megfigyelőktől elrejtve, mindig csak az eseményhorizont mögött, a feketelyuk-tartományban jelenhet meg [86]. A kozmosz cenzor hipotézis erős alakjának megfogalmazásakor Penrose továbbment, és azt a várákozást fogalmazta meg, hogy az elegendően általános téridők mindig globálisan hiperbolikusak, azaz valamely Cauchy-felületen megadott reguláris kezdőadatok időfejlődése révén jönnek létre [88, 89].

Hawking, az aszimptotikusan sík feketelyuk-téridők Einstein-elméleten belül végzett vizsgálata során, az imént említett gyenge és erős kozmosz cenzor hipotézis között elhelyezkedő, közbülső cenzor hipotézisnek tekinthető, alábbi feltételt használta [54, 53]. Feltette, hogy a vizsgált aszimptotikusan sík feketelyuk-téridő *erős értelemben aszimptotikusan megjósolható*, azaz a feketelyuk-téridőben található olyan (M', g_{ab}) globálisan hiperbolikus résztéridő, mely tartalmazza a *külső kommunikációs tartomány* $I^-[M_{asz}] \cap \overline{M}$ lezártját, azaz egyaránt magába foglalja az eseményhorizontot $\mathcal{N} = \partial I^-[M_{asz}]$, valamint az $\mathcal{D} = I^+[M_{asz}] \setminus \mathcal{B}$ tartományt. Hawking bizonyította [54, 53], hogy az erős értelemben aszimptotikusan megjósolható négydimenziós feketelyuk-téridőkben található bármely csapdázott felület – azaz minden olyan kompakt kétdimenziós irányítható felület, amelyen még a kifelé indított, jövőirányú, fényszerű geodetikusok expanziója is mindeütt nem pozitív –, még a legkülső marginális is, szükségképpen a feketelyuk-tartományon belül helyezkedik el.

2.3. Stacionárius feketelyukak

Ebben a fejezetben a stacionárius feketelyuk-téridők legfontosabb tulajdonságait idézem fel. Egy feketelyuk-téridőt stacionáriusnak tekintünk, ha található benne olyan Killing-vektormező, amely időszerű a feketelyuktól távol eső, aszimptotikus tartományban.

2.3.1. Definíció. *Legyen (M, g_{ab}) erősen kauzális feketelyuk-téridő az $M_{asz} \subset M$ aszimptotikus tartományra nézve (lásd a 2.2.1. definíciót). ϕ_t pedig legyen az (M, g_{ab}) téridőn*

ható egyparaméteres izometriacsoport, melyet egy t^a Killing-vektormező generál. Ekkor az (M, g_{ab}) feketelyuk-téridőt stacionáriusnak nevezzük, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- (i) Az M_{asz} aszimptotikus tartományban található egy \mathcal{C} sima, akauzális, az M_{asz} tartományban határ nélküli hiperfelület úgy, hogy $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{stac} \cup \mathcal{C}'$, ahol \mathcal{C}^{stac} és \mathcal{C}' részhalmazok diszjunktak.
- (ii) \mathcal{C}^{stac} az $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B(R^{stac})$ halmazzal diffeomorf, ahol $B(R^{stac})$ az \mathbb{R}^{n-1} halmaz R^{stac} sugarú, zárt gömbjét jelöli.
- (iii) A t^a Killing-vektormező szigorú értelemben időszerű \mathcal{C}^{stac} felett, azaz létezik olyan $\varepsilon_t > 0$ valós szám, amelyre $-t^a t_a \geq \varepsilon_t$ tetszőleges $p \in \mathcal{C}^{stac}$ pontban teljesül.
- (iv) Amikor az (M, g_{ab}) téridőben valamilyen anyagmező található, akkor az azt megjelenítő tenzormező is legyen invariáns ϕ_t hatására nézve.

Az imént meghatározott feketelyuk-téridőkben az aszimptotikus tartomány stacionárius részét egyszerűen a \mathcal{C}^{stac} halmaz $M^{stac} = \phi\{\mathcal{C}^{stac}\} = \cup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t[\mathcal{C}^{stac}]$ pályájaként definiálhatjuk. Érdekes azt is megjegyezni, hogy a t^a Killing-vektormező M^{stac} -ban futó Killing-pályái kiterjeszthetetlen, teljes, időszerű görbék, azaz $M^{stac} \subset M_{asz}$. Ennek belátásához idézzük fel, hogy amikor a t^a Killing-vektormezőre vonatkozó $\nabla_a t_b + \nabla_b t_a = 0$ Killing-egyenletet a $t^a t^b$ kifejezéssel kontraháljuk, akkor a $t^e \nabla_e (t^a t_a) = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek megfelelően, az $M^{stac} \subset M$ tartományban időszerű t^a Killing-vektormező bármely ottani integrálgörbéje mentén a görbe $s(t, t_0) = \int_{t_0}^t (-t^a t_a)^{1/2} dt'$ sajátidőben mért hossza mind múlt, mind pedig jövő irányban pontosan akkor nem korlátos, amikor a t Killing-paraméterre ugyanez a feltétel teljesül. Mivel a ϕ_t izometria-csoport globális, azaz tetszőleges t valós értékre értelmezett, az M^{stac} tartományban futó időszerű Killing-pályák sajátidőben mért hossza sem korlátos.

Mivel M^{stac} felett t^a szigorú értelemben időszerű, az is belátható, hogy bármely $p \in \mathcal{C}^{stac}$ és $q \in \mathcal{C}$ pontpárra $\gamma_p \cap I^+(q) \neq \emptyset$ és $\gamma_p \cap I^-(q) \neq \emptyset$, ahol γ_p a p pont $\phi\{p\}$ pályáját jelöli. Így az is megmutatható, hogy tetszőleges $p \in M^{stac}$ és $q \in M_{asz}$ pontpárhoz található olyan t_p^+ és t_p^- valós számok, hogy $q \in I^-(\phi_{t_p^+}(p))$ és $q \in I^+(\phi_{t_p^-}(p))$. Mindezek alapján $I^+[M^{stac}] \supset I^+[M_{asz}]$ és $I^-[M^{stac}] \supset I^-[M_{asz}]$, ami $M^{stac} \subset M_{asz}$ miatt azt adja, hogy $I^\pm[M^{stac}] = I^\pm[M_{asz}]$. Most megmutatjuk, hogy mindezekon felül [25] 3.1. lemmájának állítása is igaz marad a 2.3.1. definícióban kiválasztott stacionárius feketelyuk-téridőkre.

2.3.1. Lemma. *Legyen (M, g_{ab}) egy stacionárius feketelyuk-téridő és $Q \subset M$ egy ϕ_t -invariáns részhalmaz, azaz $\phi\{Q\} = Q$. Ekkor $I^+[Q] \supset M^{stac}$, vagy $I^+[Q] \cap M^{stac} = \emptyset$, és hasonlóan $I^-[Q] \supset M^{stac}$, vagy $I^-[Q] \cap M^{stac} = \emptyset$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $I^+[Q] \cap M^{stac} \neq \emptyset$ és $p \in I^+[Q] \cap M^{stac}$. Mivel $\phi\{I^+[Q]\} = I^+[\phi\{Q\}] = I^+[Q]$, és hasonlóan, mivel $\phi\{M^{stac}\} = M^{stac}$, ekkor bármely $t \in \mathbb{R}$ értékre $\phi_t(p) \in I^+[Q] \cap M^{stac}$, azaz a p ponton átmenő $\gamma_p = \phi\{p\}$ pálya az $I^+[Q] \cap M^{stac}$ halmaz részhalmaza. Felhasználva ekkor, hogy tetszőleges $q \in M^{stac}$ választás mellett mindig található olyan elegendően nagy abszolútértékű t_p^- negatív valós szám, hogy $q \in I^+(\phi_{t_p^-}(p))$, azt kapjuk, hogy $M^{stac} \subset I^+(\gamma_p) \subset I^+[Q]$, amint azt meg szeretnénk volna mutatni. \square

Befejezésül idézzük fel a sztatikus, valamint az olyan stacionárius és tengelyszimmetrikus feketelyuk-téridők fogalmát, amelyek az úgynevezett $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával is rendelkeznek.

2.3.2. Definíció. Az (M, g_{ab}) stacionárius feketelyuk-téridőt sztatikusnak nevezzük, ha a t^a Killing-vektormező hiperfelület-merőleges, azaz t^a -ra a $t_{[a} \nabla_b t_{c]} = 0$ egyenlet teljesül.

Ekkor a $t_{[a} \nabla_b t_{c]} = 0$ feltétel, valamint a Frobenius-tétel (lásd például a [115]-as referencia B.3. appendixét) felhasználásával megmutatható, hogy bármely $p \in M$ ponthoz léteznie kell olyan \mathcal{O}_p nyílt környezetnek, valamint $t, f : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvényeknek, hogy $t_a = f \nabla_a t$ az \mathcal{O}_p környezetben. Tegyük fel, hogy t^a hiperfelület-merőleges és \mathcal{C}_{t_0} a $t = t_0$ hiperfelület egy olyan darabja, ahol t^a nem tűnik el. Legyenek (x^2, \dots, x^n) lokális koordináták \mathcal{C}_{t_0} -on. Ezeket, a t^a integrálgörbéi mentén fixen tartva, kiterjeszthetjük a \mathcal{C}_{t_0} halmaz $\phi\{\mathcal{C}_{t_0}\}$ pályájára, ahol a t, x^2, \dots, x^n függvények lokális koordinátákat határoznak meg, és $\phi\{\mathcal{C}_{t_0}\}$ -on a téridőmetrikát a

$$ds^2 = F dt^2 + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.3.7)$$

alakban adhatjuk meg, ahol F és $h_{\alpha\beta}$ az (x^2, \dots, x^n) koordináták sima függvénye, $h_{\alpha\beta}$ pozitív definit metrika, valamint az α, β indexek most a $2, \dots, n$ értékeket vehetik fel. A (2.3.7) alakból nyilvánvalóan látszik, hogy minden sztatikus téridőmetrika rendelkezik a t időtükrözési szimmetriával, azaz az ívelem alakja nem változik a $t \rightarrow -t$ transzformáció alkalmazása során.

2.3.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M, g_{ab}) feketelyuk-téridő stacionárius és tengelyszimmetrikus, ha a t^a stacionárius Killing-vektormező mellett létezik egy olyan másik térszerű φ^a Killing-vektormező is, melynek pályái zártak, továbbá a t^a és φ^a vektormezők kommutálnak. Azt mondjuk, hogy az (M, g_{ab}) stacionárius és tengelyszimmetrikus feketelyuk-téridő rendelkezik a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával, ha téridőpontonként a t^a és φ^a Killing-vektormezőkre merőleges $(n-2)$ -dimenziós vektorterek integrálhatók, azaz található hozzájuk olyan $(n-2)$ -dimenziós hiperfelületeknek egy kétparaméteres serege, melyet a t^a és φ^a Killing-vektormezőkre merőleges vektorok mindenütt érintenek.

Carter egy fontos eredménye [19] alapján tudjuk (lásd a [115]-es referencia 7.1.1. tételét is), hogy egy stacionárius és tengelyszimmetrikus téridő biztosan rendelkezik a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával, ha

- (1) a $t_{[a}\varphi_b\nabla_c t_{d]}$ vagy $t_{[a}\varphi_b\nabla_c t_{d]}$ kifejezések eltűnnek legalább egy téridőpontban, továbbá
- (2) a $t^a R_a^{[b} t^c \varphi^{d]}$ és $\varphi^a R_a^{[b} \varphi^c t^{d]}$ kifejezések mindenütt eltűnnek, ahol R_{ab} a Ricci-tenzort jelöli.

Az első feltétel meglehetősen gyenge, hiszen biztosan teljesül, ha a t^a és φ^a vektorok közül legalább az egyik eltűnik valamelyik pontban. A második feltétel is azonnal teljesül, ha $R_{ab} \equiv 0$, vagy olyan speciális esetekben, mint például az Einstein-elméletben egy elektrovákuum, vagy egy olyan tökéletes folyadék esetén, amikor a folyadék négyessebesség vektora mindenütt a t^a és φ^a vektorok által kifeszített síkban fekszik [19].

Amikor a téridő rendelkezik a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával, az integrálható $(n - 2)$ -dimenziós hiperfelületek egyikén bevezetett (x^3, \dots, x^n) lokális koordinátákat a t^a és φ^a vektormezők pályái mentén elterjesztve, majd ezekhez hozzávéve a t és φ Killing-paramétereket, egy olyan $(t, \varphi, x^3, \dots, x^n)$ lokális koordinátarendszerhez jutunk, amelyben a téridőmetrikát a

$$ds^2 = F dt^2 + G dt d\varphi + H d\varphi^2 + \gamma_{AB} dx^A dx^B \quad (2.3.8)$$

alakban adhatjuk meg, ahol F, G, H és γ_{AB} az (x^3, \dots, x^n) koordináták sima függvényei, γ_{AB} pozitív definit metrika, valamint az A, B indexek a $3, \dots, n$ értékeket vehetik fel. A (2.3.8) alakból nyilvánvalóan látszik, hogy az ily módon meghatározott téridőmetrika valóban rendelkezik a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával, azaz az ívelem alakja nem változik a $t \rightarrow -t$ és $\varphi \rightarrow -\varphi$ transzformációk egyidejű alkalmazása során.

2.4. Killing-horizontok

A bevezetőben említettem, hogy a stacionárius feketelyuk-téridők eseményhorizontja az ismert speciális megoldások esetén egyben mindig egy Killing-horizont is. Ebben a fejezetben olyan (M, g_{ab}) téridőket tekintünk, amelyekben létezik Killing-horizont. Így feltezzük, hogy (M, g_{ab}) -n megadható olyan χ_u egyparaméteres izometriacsoport, melyet valamely ξ^a vektormező generál.

2.4.1. Definíció. Az \mathcal{N} hiperfelületet az (M, g_{ab}) téridő ξ^a Killing-vektormezőjéhez tartozó Killing-horizontjának nevezzük, ha \mathcal{N} a ξ^a által generált χ_u izometria-transzformációkra nézve invariáns fényszerű hiperfelület, továbbá $\xi^a \xi_a = 0$ \mathcal{N} -en.

Általában feltételezzük, hogy \mathcal{N} egy C^∞ hiperfelület. Ebben a vonatkozásban érdekes felidézni, hogy – amint azt a [26, 41] munkák szerzői megmutatták – amennyiben a stacionárius feketelyuk-téridő sima vagy analitikus (azaz mind az M sokaság, mind pedig a g_{ab} metrika sima vagy analitikus), akkor az eseményhorizont is sima vagy analitikus hiperfelülete a vizsgált téridőnek.

Emellett az egyszerűség kedvéért azt is feltesszük, hogy \mathcal{N} triviális szorzattopológiával rendelkezik.

2.4.1. Feltétel. *Megköveteljük, hogy ξ^a Killing-vektormező minden pályája legyen \mathbb{R} -rel diffeomorf, továbbá létezzen \mathcal{N} -nek a pályákra nézve globális szelése, azaz egy olyan Σ részsokasága \mathcal{N} -nek, amelyet minden pálya pontosan egyszer metsz.*

Ekkor \mathcal{N} valóban az $\mathbb{R} \times \Sigma$ topológiával rendelkezik. A feltétel azon része, hogy minden Killing-pálya \mathbb{R} -rel diffeomorf, kizárja azt a lehetőséget, hogy a χ_u izometria-transzformációnak lehessen fix pontja \mathcal{N} -en. Feltételünk kizárja az olyan, a körrel diffeomorf pályák létét is, mint amilyenek például a Taub-NUT téridő Cauchy-horizontján található. A körrel diffeomorf pályák – mint fényszerű geodetikusok – jelenléte biztosan a kauzalitás sérülésével járna együtt. Így, ha az (M, g_{ab}) téridő eleget tesz az *erős kauzalitási feltételnek*, és a χ_u izometria-transzformációnak nincs fix pontja \mathcal{N} -en, akkor \mathcal{N} -hez található lokális szelések, azaz \mathcal{N} egy \mathbb{R} struktúracsoportú principális szálnyaláb szerkezetével rendelkezik. Ha ezen felül a Killing-pályák tere Hausdorff-féle topológiával látható el, akkor \mathcal{N} triviális szálnyaláb szerkezetű [110], azaz a fenti feltétel azonnal teljesül. Így a 2.4.1 feltétel mindig teljesül erősen kauzális téridőkben, amennyiben ξ^a vektormező sehol sem válik zérussá az \mathcal{N} felületen.

2.4.2. Definíció. *Az $\mathcal{H} \subset M$ részhalmazt az (M, g_{ab}) téridő kettéhasadó Killing-horizontjának nevezzük, ha \mathcal{H} két, a \mathcal{H}_A és a \mathcal{H}_B – a χ_u izometria-transzformációcsoport hatására nézve – Killing-horizont uniójaként áll elő, melyek egymást egy $(n - 2)$ -dimenziós térszerű \mathcal{S} felületben metszik.*

Nyilvánvaló, hogy \mathcal{S} pontjainak invariánsnak kell lennie a χ_u csoport hatásával szemben. Ezért a ξ^a vektormező biztosan zérussá válik az \mathcal{S} felületen, és így speciálisan \mathcal{H} nem tehet eleget a 2.4.1 feltételnek. Az is belátható, hogy minden irányítható és időirányítható téridőben, amelyben megadható egy olyan nem triviális egyparaméteres izometriacsoporthoz, mely valamely sima, irányítható, $(n - 2)$ -dimenziós, térszerű \mathcal{S} sokaság pontjait fixen hagyja, akkor az \mathcal{S} felületre merőleges, fényszerű geodetikusok által kifesztett hiperfelületek egy kettéhasadó Killing-horizontot határoznak meg. Ekkor az \mathcal{S} felület kiegészítő halmaza – úgy, ahogyan a bevezetőben ismertetett Schwarzschild-téridő esetében is – négy, nem összefüggő részből áll, melyek mindegyike külön-külön eleget tesz a 2.4.1 feltételnek.

2.5. Felületi gravitáció

2.5.1. Definíció. Mivel a ξ^a Killing-vektormező merőleges az \mathcal{N} felületre, továbbá \mathcal{N} -et a $\xi^a \xi_a|_{\mathcal{N}} = 0$ feltétel jelöl ki, biztosan létezik olyan $\kappa : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melynek értéke a

$$\frac{1}{2} \nabla^a (\xi^b \xi_b) = -\kappa \xi^a \quad (2.5.1)$$

egyenlet által adott. Ezt a κ függvényt nevezzük felületi gravitációnak⁶.

A (2.5.1)-es egyenletből – a metrika és a belőle származtatott struktúráknak a χ_u izometria-transzformációkra nézve invariáns voltából következően – egyrészt az látszik, hogy κ értéke állandó χ_u pályái mentén, azaz $\mathcal{L}_{\xi} \kappa = 0$, másrészt az \mathcal{N} felület generáló Killing-pályák fényszerű geodetikusok, mivel a pályák ξ^a érintővektora \mathcal{N} -en eleget tesz a

$$\xi^b \nabla_b \xi^a = \kappa \xi^a \quad (2.5.2)$$

geodetikus egyenletnek.

Az utóbbi egyenlet értelmében, ha κ értéke nulla valamely \mathcal{N} -en futó γ Killing-pálya mentén, akkor az u Killing-paraméter egyben γ affin paramétere is. Így γ geodetikus értelemben is teljes, azaz az affin paraméter tetszőlegesen nagy és kicsiny értékeire egyaránt értelmezett. Ha azonban $\kappa \neq 0$, akkor $\lambda = e^{\kappa u}$ affin paraméter, továbbá a γ mentén párhuzamosan elterjesztett $\ell^a = (\partial/\partial \lambda)^a$ érintővektormezőt az $\ell^a = (1/\kappa) e^{-\kappa u} \xi^a$ alakban adhatjuk meg. Mindezeknek megfelelően, ha κ nem nulla γ mentén, akkor γ affin értelemben nem teljes annak ellenére, hogy γ teljes az u Killing-paraméterre nézve.

A fenti észrevételek alapján alapvetően fontos annak meghatározása, hogy milyen feltételek mellett lehet a κ felületi gravitáció állandó.

2.5.1. Tétel. Legyen \mathcal{N} egy összefüggő Killing-horizont a ξ^a Killing-vektormezőre nézve. Ha az általánosított domináns energiafeltétel teljesül a téridőben, akkor a κ felületi gravitáció állandó \mathcal{N} -en.

Bizonyítás: Ismert – lásd például [115] (12.5.30)-as egyenletét –, hogy a felületi gravitáció eleget tesz a

$$\xi_{[a} \nabla_{b]} \kappa = -\xi_{[a} R_{b]}{}^c \xi_c \quad (2.5.3)$$

⁶A felületi gravitáció elnevezés onnan adódik, hogy egy sztatikus feketelyuk esetében éppen κ értéke mondja meg, hogy egy súlytalanak és eltéphetetlennek gondolt kötél végét a feketelyuktól végtelen nagy távolságban tartva mekkora erőt kellene kifejtenem ahhoz, hogy egy egységnyi tömegű testet nyugalomban tarthassak a feketelyuk horizontján. [Lásd például a [115]-as hivatkozás 332. oldalán található érvelést!]

relációnak. Mivel a ξ^a Killing-vektormező fényszerű \mathcal{N} -en, továbbá κ állandó az \mathcal{N} Killing-horizontot generáló fényszerű geodetikusok mentén, a (2.5.3) relációt ξ^a -val kontrahálva azt kapjuk, hogy a $R_{ab}\xi^a\xi^b$ kifejezés szükségképpen zérus \mathcal{N} -en. Ebből azonnal következik, hogy az $R^a{}_e\xi^e$ vektor merőleges ξ^a -ra, azaz érinti \mathcal{N} -et. Az általánosított energiefeltételt felhasználva most megmutatjuk, hogy $R^a{}_e\xi^e$ valójában párhuzamos ξ^a -val. Ennek belátásához idézzük fel először, hogy ξ^a fényszerűsége folytán a

$$0 = R_{ab}\xi^a\xi^b = G_{ab}\xi^a\xi^b + fg_{ab}\xi^a\xi^b \quad (2.5.4)$$

reláció teljesül \mathcal{N} -en. Ennek megfelelően a $G^a{}_b\xi^b + f\xi^a$ vektor érinti \mathcal{N} -et, ugyanakkor, az általánosított domináns energiefeltétel értelmében, $G^a{}_b\xi^b + f\xi^a$ mindenütt vagy időszerű, vagy fényszerű. Mindezekből az következik, hogy \mathcal{N} -en mind $G^a{}_b\xi^b + f\xi^a$, mind pedig a

$$R^a{}_b\xi^b = [G^a{}_b\xi^b + f\xi^a] + \left(\frac{1}{2}R - f\right)\xi^a \quad (2.5.5)$$

vektormező arányos ξ^a -val. Így a $\xi_{[a}R_{b]}{}^e\xi_e = 0$ reláció teljesül \mathcal{N} -en, amiből (2.5.3) figyelembe vételével az adódik, hogy

$$\xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa = 0, \quad (2.5.6)$$

azaz a κ felületi gravitáció szükségképpen állandó \mathcal{N} -en. □

Érdemes megjegyezni, hogy az imént bizonyított tétel a feketelyuk-termodinamika nulladik főtételenek (lásd például [115, 117]) érvényességi körét is meghatározza. Mivel a felületi gravitáció a stacionárius feketelyuk által keltett Hawking-sugárzás hőmérséklet paraméterével egy konstans szorzó erejéig megegyezik, a fenti tétel feltétele pontosan azt határozza meg, mikor lesz valamely, geometriai értelemben egyensúlyban lévő feketelyuk termodinamikai értelemben is egyensúlyban, azaz mikor lesz a kérdéses feketelyuk egyetlen hőmérsékletparaméterrel jellemezhető.

Az alábbi két állítás csak a négydimenziós elméletekre vonatkozik.

2.5.2. Tétel. *Legyen \mathcal{N} az (M, g_{ab}) négydimenziós téridőben egy összefüggő Killing-horizont a ξ^a Killing-vektormezőre nézve. Ekkor a κ felületi gravitáció pontosan akkor állandó \mathcal{N} -en, ha a ξ^a -hoz tartozó $\omega_a = \epsilon_{abcd}\xi^b\nabla^c\xi^d$ örvénymező külső deriváltja nulla a horizon-
ton, azaz*

$$\nabla_{[a}\omega_{b]}|_{\mathcal{N}} = 0. \quad (2.5.7)$$

Bizonyítás: A [115]-es hivatkozás (7.1.15)-ös egyenlete értelmében a ξ^a Killing-vektor-mezőhöz tartozó örvénymező eleget tesz a

$$\nabla_{[a}\omega_{b]} = -\epsilon_{abcd}\xi^{[c}R^{d]}_e\xi^e \quad (2.5.8)$$

egyenletnek. Összevetve ezt a (2.5.3) egyenlettel azt kapjuk, hogy a horizonton

$$\xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa = -\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\nabla^{[c}\omega^{d]}, \quad (2.5.9)$$

amiből a tétel állítása azonnal következik. \square

A fenti tétel, bizonyításának egyszerűsége ellenére, nagyon fontos következményekkel bír, melyeket az alábbi állításban fogalmaztam meg [92]. Érdemes megjegyezni, hogy ezen következmények további specializálásaként visszakapjuk Carter [21] néhány idevágó korábbi eredményét is, bizonyítva azt, hogy minden sztatikus, vagy olyan stacionárius és tengelyszimmetrikus feketelyuk-téridő esetén, mely rendelkezik a „ $t - \varphi$ ” koordinátákra vonatkozó tükrözési szimmetriával is, a felületi gravitáció szükségképpen állandó a horizonton.

2.5.1. Következmény. *Legyen \mathcal{N} az (M, g_{ab}) négydimenziós téridőben egy összefüggő Killing-horizont a ξ^a Killing-vektormezőre nézve. Ekkor*

- (i) *Ha ξ^a hiperfelületmerőleges, akkor κ állandó \mathcal{N} -en. Speciálisan, κ állandó bármely sztatikus feketelyuk eseményhorizontján.*
- (ii) *Ha létezik egy másik ψ^a Killing-vektormező, mely lineárisan független ξ^a -tól, kommutál ξ^a -vel, továbbá a horizonton $\nabla_a(\psi^b\omega_b) = 0$, akkor κ állandó \mathcal{N} -en. Speciálisan, ha a feketelyuk-téridő stacionárius és tengelyszimmetrikus, továbbá rendelkezik a $t - \varphi$ koordinátákra vonatkozó tükrözési szimmetriával, akkor κ állandó az eseményhorizonton.*

Bizonyítás: Az (i) pontban megfogalmazott első állítás helyessége azonnal látható, ha figyelembe vesszük, hogy ξ^a hiperfelület-merőlegessége ekvivalens azzal, hogy $\omega_a \equiv 0$. A második állítás abból következik, hogy a hiperfelület-merőleges, sztatikus Killing-vektormező éppen a horizontot generáló ξ^a Killing-vektormezővel esik egybe.

Az (ii) pontban megfogalmazott első állítás indirekt bizonyításához tegyük fel, hogy létezik olyan \mathcal{O} nyílt részhalmaza \mathcal{N} -nek, hogy \mathcal{O} pontjaiban $\xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa \neq 0$. Ekkor – az általánosság megszorítása nélkül – azt is feltehetjük, hogy $\kappa \neq 0$ \mathcal{O} felett. Mivel ξ^a és ψ^a Killing-vektormezők, továbbá ψ^a és ξ^a kommutál, \mathcal{O} felett teljesül a

$$0 = \mathcal{L}_\psi(\xi^a\xi_a) = 2\xi^a\xi^b\nabla_b\psi_a = -2\psi^a(\xi^b\nabla_b\xi_a) = -2\kappa\psi^a\xi_a \quad (2.5.10)$$

egyenlőség, melyből az következik, hogy ψ^a -nek érintenie kell az \mathcal{N} hiperfelületet az \mathcal{O} részhalmaz fölött. Amennyiben ψ^a és ξ^a párhuzamos – azaz valamely f függvényre a $\psi^a = f \cdot \xi^a$ reláció teljesül \mathcal{O} felett – ψ^a és ξ^a kommutativitásából $\xi^a \nabla_a f = 0$ következik. Másrészt, ekkor ψ^a is fényszerű, továbbá a ψ^a -hez tartozó $\tilde{\kappa}$ felületi gravitációra a $\tilde{\kappa} = f \cdot \kappa$ reláció teljesül. Alkalmazva ezek után a (2.5.3) összefüggést κ -ra és $\tilde{\kappa}$ -ra, azt kapjuk, hogy $\xi_{[a} \nabla_{b]} f = 0$. E két következményt összevetve az adódik, hogy $\nabla_a f = 0$ teljesül \mathcal{O} felett, ami ellentmond a ψ^a és ξ^a lineáris függetlenségére vonatkozó feltételünknek. Mindezekből az következik, hogy léteznie kell egy olyan $p \in \mathcal{O}$ pontnak, ahol ψ^a biztosan térszerű.

Mivel ψ^a egy olyan Killing-vektormező, amely kommutál ξ^a -val, (2.5.1) alapján azonnal adódik, hogy $\psi^a \nabla_a \kappa = 0$ a p pontban. Másrészt, (2.5.9) alapján azt kapjuk, hogy

$$\epsilon^{efab} \psi_f \xi_a \nabla_b \kappa = \psi_f \nabla^{[e} \omega^{f]}. \quad (2.5.11)$$

Ismét kihasználva azt, hogy a ψ^a Killing-vektormező kommutál ξ^a -val, az adódik, hogy

$$\psi_f \nabla^{[e} \omega^{f]} = \frac{1}{2} [\nabla^e (\psi_f \omega^f) - \mathcal{L}_{\psi} \omega^e] = \frac{1}{2} \nabla^e (\psi_f \omega^f). \quad (2.5.12)$$

Ezek után figyelembe véve azt, hogy ξ^a hiperfelület-merőleges \mathcal{N} -en, azaz ω_a azonosan eltűnik, azt kapjuk, hogy mind $\epsilon^{efab} \psi_f \xi_a \nabla_b \kappa$, mind pedig $\psi^a \nabla_a \kappa$ eltűnik p -ben, amiből – az indirekt feltételezésünkkel ellentétben – az következik, hogy $\xi_{[a} \nabla_{b]} \kappa = 0$ a p pontban, ami igazolja a (ii) pont első állításának helyességét.

A (ii) pontban megfogalmazott második állítás bizonyításához idézzük fel, hogy Carter eredményei alapján [21] bármely $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával rendelkező, stacionárius, tengelyszimmetrikus feketelyuk-téridő eseményhorizontja egyben egy Killing-horizont is egy olyan ξ^a Killing-vektormezőre nézve, mely a stacionaritást és a tengelyszimmetriát meghatározó Killing-vektormezők konstans lineárkombinációjával állítható elő. Ha most azzal a feltételezéssel élünk, hogy ψ^a -t a tengelyszimmetriát meghatározó Killing-vektormezőt jeleníti meg, akkor a $t - \varphi$ tükrözési szimmetria alapján azt kapjuk (lásd például a [115]-as referencia 7.1.1. tételének bizonyítását), hogy a $\psi^a \omega_a = 0$ reláció a téridőben mindenütt teljesül, azaz (ii) pontban megfogalmazott első állítás feltételei teljesednek. \square

Fontos hangsúlyozni, hogy a fenti állítások bizonyítása során mind a téridő kauzális szerkezete, mind pedig a Killing-horizont topológiai tulajdonságai (annak összefüggőségére vonatkozó egyszerűsítő feltételünktől eltekintve) teljesen általánosak, azaz ezekre vonatkozóan semmilyen megszorítást nem alkalmaztunk. Azt is érdemes kiemelni, hogy a fenti eredmények a gravitáció összes lehetséges, négydimenziós, geometrizált elméletében érvényesek. Így a torziót magukba építő elméletekben is alkalmazhatóak feltéve, hogy ∇_a a metrika által meghatározott torziómentes kovariáns deriválóoperátort jelöli.

A fenti eredményekből azt tudhatjuk meg, hogy milyen feltételek biztosítják azt, hogy valamely Killing-horizonton az ott értelmezett felületi gravitáció értéke állandó legyen. Érdekes azt is megvizsgálni, mi történik akkor, ha ezen feltételek nem teljesednek. Erre vonatkozik az alábbi tétel, melynek értelmében valamely Killing-horizont felületi gravitációja vagy állandó, vagy pedig görbületi szingularitásnak kell megjelennie a horizontot generáló minden olyan fényszerű geodetikus mentén, ahol a felületi gravitáció gradiense nem tűnik el [91].

2.5.3. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) olyan téridő, melyben a 2.4.1 feltételnek eleget tevő \mathcal{N} Killing-horizont található. Tegyük fel, hogy létezik olyan γ generátora \mathcal{N} -nek, mely geodetikus értelemben nem teljes, azaz $\kappa|_\gamma \neq 0$, valamint κ gradiense nem nulla γ mentén. Ekkor γ a párhuzamosan elterjesztett bázisokra nézve görbületi szingularitáson végződik, azaz a görbületi tenzor valamely párhuzamosan elterjesztett bázisra vonatkozó komponensei közül legalább az egyik végtelenül nagygyá válik γ mentén.*

Bizonyítás: Legyen p a γ geodetikus egy tetszőleges pontja! Mivel κ gradiense nem nulla, γ mentén biztosan található olyan $X^a \in T_p M$ térszerű vektor a p pont érintőterében, amely érinti \mathcal{N} -et, és amelyre $X^a \nabla_a \kappa \neq 0$. Az általánosság megszorítása nélkül az is feltehető, hogy γ mentén $\kappa > 0$, továbbá X^a egységnyi normájú.

Tekintsük most \mathcal{N} -nek egy olyan tetszőleges $\mathbb{R}^{(n-2)}$ -vel diffeomorf $\tilde{\Sigma}$ lokális szelését, melyet az X^a vektor érint p -ben. Terjesszük ki X^a -et a p pontból $\tilde{\Sigma}$ -ra oly módon, hogy a kiterjesztés továbbra is legyen egységnyi normájú és mindenütt érintse $\tilde{\Sigma}$ -át. Jelölje $Y_{(i)}^a$, $i = 4, \dots, n$, azt a szintén egységnyi normájú, térszerű vektormezőkből álló rendszert $\tilde{\Sigma}$ -on, melynek elemei mindenütt merőlegesek egymásra és X^a -ra, azaz a $\tilde{\Sigma}$ -on értelmezett X^a és $Y_{(i)}^a$, $i = 4, \dots, n$, vektormezők egy ortonormált bázist határoznak meg $\tilde{\Sigma}$ -on. Legyenek továbbá $k^a = (1/\kappa)\xi^a$ és ℓ^a azok a $\tilde{\Sigma}$ -án értelmezett fényszerű vektormezők, melyeket az $\ell^a X_a = \ell^a Y_{a(i)} = 0$ és az $k^a \ell_a = 1$ relációk egyértelműen meghatároznak⁷. Ekkor a $\{k^a, \ell^a, X^a, Y_{(i)}^a\}$, $i = 4, \dots, n$, rendszer egy pszeudo-ortonormált bázismezőt határoz meg $\tilde{\Sigma}$ -on. Jelölje most $\tilde{\mathcal{N}}$ a $\tilde{\Sigma}$ halmaz $\phi\{\tilde{\Sigma}\} = \cup_{u \in \mathbb{R}} \phi_u\{\tilde{\Sigma}\}$ Killing-pályáját! Ezek után terjesszük ki a $\tilde{\Sigma}$ -on értelmezett $\{k^a, \ell^a, X^a, Y_{(i)}^a\}$ pszeudo-ortonormált bázismezőt $\tilde{\mathcal{N}}$ -ra úgy, hogy az egyes báziselemeket párhuzamosan toljuk el $\tilde{\mathcal{N}}$ fényszerű generátorai mentén.

A bizonyítás következő részében először megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}_\xi(X^a \nabla_a \kappa)$ állandó γ mentén. Ennek belátásához tekintsük a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi(X^a \nabla_a \kappa) &= \xi^f \nabla_f (X^e \nabla_e \kappa) = (\xi^f \nabla_f X^e) \nabla_e \kappa + X^e \xi^f \nabla_e \nabla_f \kappa = \\ &= X^e \nabla_e (\xi^f \nabla_f \kappa) - X^e (\nabla_e \xi_f) \nabla^f \kappa = 0 \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

⁷Mivel $\tilde{\Sigma}$ lokális szelése \mathcal{N} -nek, k^a -nak a $\tilde{\Sigma}$ -on értelmezett X^a és $Y_{(i)}^a$ vektormezőkre való merőlegessége automatikusan biztosított.

egyenlőséget, ahol, az X^a vektormező $k^a = (1/\kappa)\xi^a$ mentén vett párhuzamos elterjesztettsége mellett, az utolsó sorban κ állandóságát, valamint az \mathcal{N} -re merőleges ξ^a vektormező hiperfelület-merőlegességét⁸ használtuk fel.

Tekintsük most az

$$\eta^a = (1/\kappa) e^{-\kappa u} \ell^a \quad (2.5.14)$$

vektormezőt, melynek segítségével a (2.5.1) egyenletből a

$$\kappa = -\eta^a \xi^b (\nabla_a \xi_b) \quad (2.5.15)$$

relációt kapjuk. Ekkor κ -nak az X^a vektormező menti gradiensére az

$$X^e \nabla_e \kappa = -X^e \nabla_e (\eta^a \xi^b) \nabla_a \xi_b - X^e \eta^a \xi^b \nabla_e \nabla_a \xi_b \quad (2.5.16)$$

egyenletet kapjuk. Ismét felhasználva ekkor ξ^a hiperfelület-merőlegességét, valamint az $\tilde{\mathcal{N}}$ -on értelmezett k^a, ℓ^a, X^a vektormezők belső szorzatainak páronkénti állandóságát, megmutatható, hogy az előző egyenlet jobb oldalán álló első kifejezés értéke nulla. Így

$$X^e \nabla_e \kappa = -X^e \eta^a \xi^b \nabla_e \nabla_a \xi_b = R_{abcd} \eta^a \xi^b X^c \xi^d = \kappa e^{\kappa u} R_{abcd} \ell^a k^b X^c k^d, \quad (2.5.17)$$

ahol a második egyenlőség származtatásánál a ξ^a -ra, mint Killing-vektormezőre vonatkozó $\nabla_e \nabla_a \xi_b = -R_{abcd} \xi^d$ egyenletet használtam fel.

Mivel (2.5.13) alapján (2.5.17) bal oldala egy nem-nulla konstans érték, ugyanakkor a bal oldalon a $e^{\kappa u}$ faktor biztosan nullához tart, miközben $u \rightarrow -\infty$, ezért a görbületi tenzorból képzett $R_{abcd} \ell^a k^b X^c k^d$ kontrakció szükségképpen végtelenné válik ebben a határesetben. \square

⁸Mivel \mathcal{N} hiperfelület-merőleges a ξ^a vektormezőre, a $\nabla_a \xi_b = \xi_{[a} v_{b]}$ reláció teljesül \mathcal{N} -en, ahol v^a egy \mathcal{N} -et érintő vektormező.

3. fejezet

Feketelyuk-téridők lokális kiterjesztése

3.1. A lokális kiterjesztés megkonstruálása

Az előző fejezetekben a Killing-horizontok különféle tulajdonságaival ismerkedtünk meg. Ebben a fejezetben megmutatom, hogy minden olyan téridő, amelyben egy olyan, a 2.4.1 feltételnek eleget tevő Killing-horizont található, amelyen a felületi gravitáció egy nullától különböző állandó érték, lokális értelemben kiterjeszthető úgy, hogy az eredeti Killing-horizont képe egy kettéhasadó Killing-horizont valódi részhalmaza lesz. Emellett azt is megmutatom, hogy a sztatikus, vagy stacionárius és tengelyszimmetrikus téridőkben a sztatikus, vagy stacionárius és tengelyszimmetrikus t -állandó hiperfelületek C^∞ módon terjednek ki a kettéhasadó Killing-horizont bifurkációs felületéhez.

3.1.1. Téridőkiterjesztések

A lokális kiterjesztés megkonstruálása előtt fontos annak meghatározása, hogy mikor tekinthetünk egy téridőt kiterjeszhetőnek. Az (M, g_{ab}) téridőt kiterjeszhetőnek nevezzük, ha az izometrikus egy másik téridő valódi részhalmazával [53, 115, 93, 94]. Pontosabban fogalmazva:

3.1.1. Definíció. Az (M^*, g_{ab}^*) téridőt az (M, g_{ab}) téridő kiterjesztésének nevezzük, ha (M, g_{ab}) -nek létezik egy $\Phi : (M, g_{ab}) \rightarrow (M^*, g_{ab}^*)$ izometrikus beágyazása (M^*, g_{ab}^*) -be, azaz egy olyan $\Phi : M \rightarrow M^*$ leképezés, mely diffeomorfizmus M és $\Phi[M] \subset M^*$ között, továbbá a g_{ab} metrikát a $g_{ab}^*|_{\Phi[M]}$ metrikára képezi. Az (M^*, g_{ab}^*) téridőt az (M, g_{ab}) téridő \mathcal{U} részhalmaza kiterjesztésének nevezzük, ha (M^*, g_{ab}^*) a fent meghatározott értelemben kiterjesztése az $(\mathcal{U}, g_{ab}|_{\mathcal{U}})$ téridőnek.

Mielőtt továbbmennénk, érdemes ismét felidézni néhány egyszerű tényt. Ismert, hogy az extrém feketelyukak esetében – ilyen például az extrém töltött Kerr-megoldás $m^2 = a^2 + e^2$ paraméterekkel – a felületi gravitáció értéke zérus, a horizont nem kettéhasad, ugyanakkor nem kiterjeszthető, hiszen minden fényszerű generátora geodetikus értelemben is teljes.

Az alábbi példa olyan négydimenziós téridőt mutat be, amely egy ettől lényegesen eltérő, bár ugyancsak nem kettéhasadó és általában ki nem terjeszthető Killing-horizontot tartalmaz.

3.1.1. Példa. *A téridő metrikáját írjuk fel a*

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) h(\vartheta, \varphi) du^2 + 2 du dr + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (3.1.1)$$

alakban. Ez a metrika az $M > 0$ tömegparaméterű Schwarzschild-téridő fényszerű koordinátákban felírt vonalelemétől csak a kétdimenziós gömbön értelmezett, mindenütt pozitív és sima $h = h(\vartheta, \varphi)$ függvény alkalmazása révén tér el. [Ha $h \equiv 1$, visszkapjuk a Schwarzschild-téridő vonalelemét.] Itt az u és r koordináták az $-\infty < u < \infty$ és $r > 0$ intervallumokat, míg ϑ és φ a szokásos gömbi intervallumokat futják be. Az így nyert téridőben – ugyan ez nem teljesíti a vákuum Einstein-egyenleteket – $(\partial/\partial u)^a$ Killing-vektormező, továbbá az $r = 2M$ felület Killing-horizont, amelyen a felületi gravitáció értéke $\kappa = h(\vartheta, \varphi)/4M$, azaz nem állandó, amennyiben $h = h(\vartheta, \varphi)$ nem az.

Amint azt már a dolgozat korábbi részében megmutattam (lásd a 2.5.3 tételt), a példában bemutatott téridőben a Killing-horizont minden egyes olyan generátora, mely mentén $\partial_\vartheta h$ vagy $\partial_\varphi h$ nem nulla, görbületi szingularitáson végződik. Ekkor a (3.1.1) vonalelem által meghatározott téridő \mathcal{N} Killing-horizontjának egyetlen környezete sem terjeszthető ki úgy, hogy a kiterjesztésben \mathcal{N} képe egy kettéhasadó horizont részeként legyen ábrázolható.

3.1.2. A lokális kiterjesztési tétel bizonyítása

Ebben a részben azt mutatom meg, hogy amennyiben az \mathcal{N} Killing-horizonton értelmezett κ felületi gravitáció nemnulla állandó, akkor a téridő lokálisan kiterjeszthető. A bizonyítás lényegében azon alapszik, hogy amikor a felületi gravitáció egy nullától különböző állandó érték, az eredetileg Eddington-Finkelstein-típusú koordinátákban adott metrika, Kruskal-típusú koordináták bevezetésével, egy nagyobb sokaságon is értelmezhetővé válik.

3.1.1. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) egy olyan téridő, melyben egy, a 2.4.1 feltételnek eleget tevő \mathcal{N} Killing-horizont található. Tegyük fel, hogy a felületi gravitáció állandó és nem zérus*

($\kappa = \kappa_0 > 0$) az \mathcal{N} hiperfelületen. Ekkor az \mathcal{N} hiperfelületnek létezik olyan \mathcal{U} nyílt környezete, mely kiterjeszthető egy \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizontot tartalmazó (M^*, g_{ab}^*) téridőbe úgy, hogy az \mathcal{N} felület M^* -beli képe az \mathcal{H} horizont valódi részalmazaként jelenik meg.

Bizonyítás: Legyen Σ az \mathcal{N} hiperfelület a 2.4.1 feltételnek megfelelő C^∞ szelése! Ekkor Σ -hoz, mint sima differenciálható sokasághoz, található C^∞ térképeknek egy olyan $\{\Sigma_{(i)}\}$ halmaza, mely Σ egy lefedését határozza meg. Legyen $\tilde{\Sigma}$ egyike ezeknek a térképeknek, amelyen (x^3, \dots, x^n) lokális koordináták. Jelölje $\tilde{\mathcal{N}}$ az \mathcal{N} hiperfelület azon részét, melyet a $\tilde{\Sigma}$ -án áthaladó fényszerű geodetikusok feszítenek ki. A továbbiakban először megmutatom, hogy $\tilde{\mathcal{N}}$ valamely $\tilde{\mathcal{U}}$ környezete kiterjeszthető a kívánt módon, majd az ilyen típusú kiterjesztések összeillesztésével állítom elő a tétel állításának megfelelő kiterjesztést.

A következő lépésben a $k^a = \xi^a$ helyettesítéssel élve az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelület $\tilde{\mathcal{O}}$ nyílt környezetében a 2.1.3. alfejezetben leírt módon készítsük el az (u, r, x^3, \dots, x^n) Gauss-féle fényszerű koordinátákat, melyekre a Kerr-féle megoldásnál alkalmazott névhasználatra alapozva, mint Eddington-Finkelstein-féle koordinátákra is hivatkozhatunk. Jelölje $\ell^a = (\partial/\partial r)^a$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ felületen az 2.1.3. alfejezetben leírtaknak megfelelően értelmezett, $\tilde{\mathcal{N}}$ -re transzverzális, egyértelműen meghatározott, fényszerű vektormezőt. Mivel $\ell^a \xi_a \equiv 1$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelületen, az is következik, hogy ott $\chi_u^* \ell^a = \ell^a$. Ekkor az (u, r, x^3, \dots, x^n) fényszerű koordináták konstrukciójából azonnal adódik, hogy bármely $q \in \tilde{\mathcal{O}}$ pontra és bármely olyan elegendően kicsiny $\hat{u} \in \mathbb{R}$ értékre, amelyre $\chi_{\hat{u}}(q) \in \tilde{\mathcal{O}}$, a $\chi_{\hat{u}}(q)$ pont $(u', r', x'^3, \dots, x'^n)$ koordinátái, valamint a q pont (u, r, x^3, \dots, x^n) koordinátái között az $r' = r$, $x'^A = x^A$ és az $u' = u + \hat{u}$ relációk teljesülnek. Így az $\tilde{\mathcal{O}}$ nyílt környezetben

$$\xi^a = (\partial/\partial u)^a, \quad (3.1.2)$$

azaz a jelen esetben u valójában egy Killing-koordináta is, és így a 2.1.3. alfejezetben felírt

$$ds^2 = 2 (dr - r \cdot \alpha du - r \cdot \beta_A dx^A) du + \gamma_{AB} dx^A dx^B \quad (3.1.3)$$

vonalemben szereplő α , β_A és γ_{AB} kifejezések függetlenek az u koordinátától, azaz most csak az r, x^3, \dots, x^n változók sima függvényei. Az is azonnal látható, hogy $\tilde{\Sigma}$ -on megadható úgy egy olyan $\varepsilon_1(x^3, \dots, x^n)$ pozitív sima függvény, hogy az (u, r, x^3, \dots, x^n) fényszerű koordináták, valamint a α , β_A és γ_{AB} kifejezések minden $|r| < \varepsilon_1$ értékre jól meghatározottak legyenek.

Ezek után a (2.5.1) egyenletet felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\kappa = -\alpha(0, x^3, \dots, x^n). \quad (3.1.4)$$

Így a κ felületi gravitáció állandó az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelületen, azaz κ értéke nem változik generátorról generátorra, hanem mindenütt ugyanaz a $\kappa_0 \neq 0$ állandó. Ekkor $\alpha|_{\tilde{\mathcal{N}}} = -\kappa_0$, ezért az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelületnek biztosan létezik egy olyan $\tilde{\mathcal{O}}' \subset \tilde{\mathcal{O}}$ nyílt környezete, hogy ott α sehol nem tűnik el. Az $\tilde{\mathcal{O}}'$ nyílt környezetben α mellett az $1/\alpha$ és az $1/\alpha + 1/\kappa_0$ függvények is simák. Mivel $1/\alpha + 1/\kappa_0$ zérussá válik az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelületen, léteznie kell egy olyan $g(r, x^3, \dots, x^n)$ sima függvénynek az $\tilde{\mathcal{O}}'$ nyílt környezetében, amelyet az

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\kappa_0} = -r g(r, x^3, \dots, x^n) \quad (3.1.5)$$

összefüggés definiál.

Ezek után az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelület $\tilde{\mathcal{O}}'$ nyílt környezetében a Kruskál-típusú U, V koordinátákat az

$$U = e^{\kappa_0 u}, \quad \text{és a } V = -e^{-\kappa_0 u} r \exp \left[\kappa_0 \int_0^r g(r, x^3, \dots, x^n) dr \right] \quad (3.1.6)$$

összefüggések segítségével definiáljuk. Ezen relációkból azonnal látszik, hogy U és V sima függvények $\tilde{\mathcal{O}}'$ felett, továbbá (3.1.6) következtében a

$$\phi = UV \quad (3.1.7)$$

kifejezésre

$$\phi(r, x^3, \dots, x^n) = -r \exp \left[\kappa_0 \int_0^r g(r, x^3, \dots, x^n) dr \right] \quad (3.1.8)$$

teljesül. Ekkor (3.1.8) miatt $\partial\phi/\partial r \neq 0$ a $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelületen, azaz az $r = 0$ helyen. Így, az implicit függvények tétele értelmében, r az $r = 0$ hely környezetében az (3.1.8) egyenlet felhasználásával megadható úgy, mint a (ϕ, x^3, \dots, x^n) kifejezések sima függvénye. Pontosabban fogalmazva, léteznie kell olyan $\varepsilon_2(x^3, \dots, x^n)$ és $q(\phi, x^3, \dots, x^n)$ sima függvényeknek, hogy

$$r = q(\phi, x^3, \dots, x^n) \quad (3.1.9)$$

teljesül az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelület azon $\tilde{\mathcal{O}}''$ környezetében, amely pontosan azokból az $\tilde{\mathcal{O}}'$ -beli pontokból áll, amelyekre $|r| < \varepsilon_2$ is teljesül. Az imént megfogalmazott relációkból azonnal következik az is, hogy az $\tilde{\mathcal{O}}''$ nyílt környezet felett az (r, x^3, \dots, x^n) változók bármely sima függvényét kifejezhetjük az (U, V, x^3, \dots, x^n) változók olyan sima függvényeivel is, amelyek az U és V koordinátáktól kizárólag csak az UV szorzat alakjában függenek. Továbbá, mivel $r = 0$ amikor $\phi = 0$, (3.1.9) alapján található olyan ψ sima függvény, amelyre

$$q(\phi, x^3, \dots, x^n) = \phi \psi(\phi, x^3, \dots, x^n). \quad (3.1.10)$$

Így az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelület $\tilde{\mathcal{O}}''$ nyílt környezetében létezik olyan ψ sima függvény, amelyre

$$r = UV \psi(UV, x^3, \dots, x^n). \quad (3.1.11)$$

Legyen most $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Ekkor, mivel (3.1.6) miatt $\partial\psi/\partial r \neq 0$ az $r = 0$ helyen, ψ nem lehet zérus az $UV = 0$ helyen sem. Így a (3.1.11) reláció következtében mindig találhatunk olyan $\tilde{\varepsilon}(x^3, \dots, x^n) > 0$ sima függvényt $\tilde{\Sigma}$ -n, hogy $\tilde{\mathcal{O}}'$ -ben az $|r| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül feltéve, hogy $|UV| < \tilde{\varepsilon}$. Ezek után az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelület $\tilde{\mathcal{U}}$ nyílt környezetét úgy definiáljuk, hogy az álljon $\tilde{\mathcal{O}}'$ pontosan azon pontjaiból, amelyekre $|UV| < \tilde{\varepsilon}$. Nyilvánvaló, hogy ekkor az $\tilde{\mathcal{U}} \subset \tilde{\mathcal{O}}''$ reláció is teljesül.

Ezek után $\tilde{\mathcal{U}}$ felett a (3.1.3) metrika kifejezhető az (U, V, x^3, \dots, x^n) koordináták segítségével is. Vegyük észre, hogy (3.1.6) és (3.1.5) alapján

$$dU = \kappa_{\circ} U du \quad (3.1.12)$$

és

$$dV = -\kappa_{\circ} V du + \kappa_{\circ} \frac{V}{r\alpha} dr + \kappa_{\circ} V \left[\int_0^r \frac{\partial g}{\partial x^A} dr' \right] dx^A. \quad (3.1.13)$$

Legyen most

$$G = \frac{2r\alpha}{\kappa_{\circ}^2 UV} = \frac{2}{\kappa_{\circ}^2} \alpha \psi. \quad (3.1.14)$$

Ekkor G az $\tilde{\mathcal{U}}$ felett értelmezett, ott el nem tűnő sima függvénye az (U, V, x^3, \dots, x^n) koordinátáknak, továbbá

$$G dU dV = 2 \left(dr - r \cdot \alpha du + r \cdot \alpha \left[\int_0^r \frac{\partial g}{\partial x^A} dr' \right] dx^A \right) du. \quad (3.1.15)$$

Így a (3.1.3), (3.1.12), (3.1.13) és (3.1.15) egyenletek alapján

$$\begin{aligned} ds^2 &= G dU dV - 2 \left\{ \frac{V\psi\beta_A}{\kappa_{\circ}} + \frac{V\psi\alpha}{\kappa_{\circ}} \left[\int_0^r \frac{\partial g}{\partial x^A} dr' \right] \right\} dU dx^A + \gamma_{AB} dx^A dx^B \\ &= G dU dV + 2V H_A dU dx^A + \gamma_{AB} dx^A dx^B, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

ahol G , H_A és γ_{AB} az UV, x^3, \dots, x^n változók sima függvényei, melyek az $|UV| < \tilde{\varepsilon}$ egyenlőtlenség által kijelölt koordináta-tartományon mindenütt értelmezettek.

Vegyük észre, hogy $\tilde{\mathcal{U}}$ az $\tilde{\mathcal{O}}'$ pontosan azon pontjaiból áll, amelyekre az $|UV| < \tilde{\varepsilon}$ egyenlőtlenség mellett az $U > 0$ feltétel is teljesül. Ezek után jelöljük $\tilde{\mathcal{M}}$ -al azt a $\mathbb{R}^2 \times \tilde{\Sigma}$ szorzatsokaságot, melyen az (U, V, x^3, \dots, x^n) koordináták egy olyan térképet határoznak meg, amelyben az x^3, \dots, x^n koordináták a szokásos értelemben befutják $\tilde{\Sigma}$ -t, míg U és

V az összes olyan valós értéket felveheti, amelyekre

$$|UV| < \tilde{\varepsilon}(x^3, \dots, x^n). \quad (3.1.17)$$

Jelölje \tilde{g}_{ab} azt az \tilde{M} felett mindenütt értelmezett, sima, Lorentz-szignatúrájú metrikát, melyet a (3.1.16) vonalelem határoz meg. Ezt követően egyszerűen belátható, hogy az $U = 0$ és $V = 0$ hiperfelületek egy $\tilde{\mathcal{H}}$ kettéhasadó Killing-horizontot határoznak meg az $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ téridőben. Legyen most $\tilde{\Phi} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \tilde{M}$ az a leképezés, amely $\tilde{\mathcal{U}}$ minden egyes pontjához \tilde{M} ugyanazon (U, V, x^3, \dots, x^n) koordinátákkal rendelkező pontját rendeli hozzá. Könnyen látható, hogy $\tilde{\Phi}$ az $(\tilde{\mathcal{U}}, g_{ab}|_{\tilde{\mathcal{U}}})$ téridőnek az $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ téridőbe történő izometrikus beágyazását határozza meg, továbbá $\tilde{\Phi}[\tilde{\mathcal{N}}]$ a $\tilde{\mathcal{H}}$ kettéhasadó Killing-horizont azon részét alkotja, amelyre $U = 0$ és $V > 0$.

A bizonyítás hátralévő részében elkészítjük a kiterjesztésünk „térben globalizált” változatát. Legyen $\{\Sigma_{(i)}\}$ C^∞ térképek olyan halmaza, mely az \mathcal{N} Killing-horizont Σ globális szelésének egy lefedését határozza meg, az $\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}$ halmazok pedig jelöljék \mathcal{N} megfelelő rész-halmazait. Készítsük el az $\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}$ szekciók $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ környezeteit, valamint minden egyes ilyen részhez az $(\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}, g_{ab}|_{\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}})$ téridő fent ismertetett konstrukció szerint elkészített $(\tilde{M}_{(i)}, \tilde{g}_{(i)ab})$ kiterjesztését! Legyen \mathcal{U} az $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ halmazok uniója, azaz

$$\mathcal{U} = \bigcup_i \tilde{\mathcal{U}}_{(i)}. \quad (3.1.18)$$

Ekkor $\{(\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$ – ahol a $\psi_{(i)}$ leképezések az $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ halmazon értelmezett Kruskal-típusú koordináták által definiáltak – az $\mathcal{U} \subset M$ egy C^∞ atlaszát határozza meg. Ezek után az $\mathcal{U} \subset M$ halmaz keresett kiterjesztését az alábbiak szerint készíthetjük el. Legyenek $(\tilde{M}_{(i)}, \tilde{g}_{(i)ab})$ és $(\tilde{M}_{(j)}, \tilde{g}_{(j)ab})$ az $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$, illetve $\tilde{\mathcal{U}}_{(j)}$ halmazok kiterjesztései! Ezek után, vezessük be az \mathcal{R} -rel jelölt ekvivalenciarelációt a $\tilde{M}_{(i)}$ sokaságok összességén. Az $\tilde{M}_{(i)}$ sokaság $(U_{(i)}, V_{(i)}, x_{(i)}^3, \dots, x_{(i)}^n)$ koordinátájú pontját és az $\tilde{M}_{(j)}$ sokaság $(U_{(j)}, V_{(j)}, x_{(j)}^3, \dots, x_{(j)}^n)$ koordinátájú pontját pontosan akkor tekintjük \mathcal{R} -ekvivalensnek, ha $U_{(i)} = U_{(j)}$, $V_{(i)} = V_{(j)}$, valamint $(x_{(i)}^3, \dots, x_{(i)}^n)$ és $(x_{(j)}^3, \dots, x_{(j)}^n)$ a Σ sokaság ugyanazon pontját jelölik.

Jelölje M^* az \mathcal{R} ekvivalenciareláció által meghatározott

$$M^* = \{\cup_i \tilde{M}_{(i)}\} / \mathcal{R} \quad (3.1.19)$$

hányadosteret. Könnyen látható, hogy a fenti definíció következtében az M^* sokaság is az $\mathbb{R}^2 \times \Sigma$ szorzatszerkezettel rendelkezik, melyen a $\{(\tilde{M}_{(i)}, \Psi_{(i)})\}$ atlasz egy C^∞ differenciálhatósági struktúrát határoz meg, ahol a $\Psi_{(i)}$ leképezéseket az $\tilde{M}_{(i)}$ sokaságokon értelmezett Kruskal-típusú koordináták határozzák meg.

Tekintsük most azt a $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M^*$ leképezést, amely minden $p \in \mathcal{U}$ ponthoz M^* azon $\Phi(p)$ pontját rendeli hozzá, amelyre $\psi_{(j)}(p) = \Psi_{(j)}(\Phi(p))$ az i index valamely j értékére. Nyilvánvaló, hogy az így definiált $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M^*$ leképezés C^∞ , hiszen minden egyes i, j értékpárra az \mathcal{U} halmazon értelmezett $(\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}, \psi_{(i)})$, valamint az M^* sokaságon értelmezett $(\tilde{M}_{(j)}, \Psi_{(j)})$ térképek esetén, ha valamely $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ halmazra $\Phi[\mathcal{O}] \subset \tilde{M}_{(j)}$, akkor a $\psi_{(i)}[\mathcal{O}]$ halmazt a $\Psi_{(j)}[\tilde{M}_{(j)}]$ halmazba vivő $\Psi_{(j)} \circ \Phi \circ \psi_{(i)}^{-1}$ leképezés sima. Az is belátható, hogy a $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \Phi[\mathcal{U}]$ leképezés kölcsönösen egyértelmű és az inverze is C^∞ , azaz $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M^*$ az \mathcal{U} halmaz egy C^∞ beágyazását adja M^* -ba. Végül az is könnyen ellenőrizhető, hogy bármely i, j értékpárra a $\tilde{g}_{(i)ab}$ és $\tilde{g}_{(j)ab}$ metrikákra a $\tilde{g}_{(i)ab} = \tilde{g}_{(j)ab}$ reláció teljesül az $\tilde{M}_{(i)} \cap \tilde{M}_{(j)} \subset M^*$ metszet felett. Következésképpen az $\tilde{M}_{(i)}$ nyílt halmazok felett értelmezett $\tilde{g}_{(i)ab}$ metrikák egy C^∞ , Lorentz-szignatúrájú g_{ab}^* metrikát határoznak meg a teljes M^* sokaságon. Mindezek után nyilvánvaló, hogy $\Phi : (\mathcal{U}, g_{ab}|_{\mathcal{U}}) \rightarrow (M^*, g_{ab}^*)$ leképezés az \mathcal{N} Killing-horizont \mathcal{U} környezetének az (M^*, g_{ab}^*) téridőbe való keresett beágyazását adja. Vegyük észre azt is, hogy az (M^*, g_{ab}^*) téridőben a

$$\mathcal{H} = \{\cup_i \tilde{\mathcal{H}}_{(i)}\} / \mathcal{R} \quad (3.1.20)$$

relációval értelmezett halmaz egy kettéhasadó Killing-horizontot határoz meg, valamint a $\Phi[\mathcal{N}]$ halmaz \mathcal{H} egy valódi részhalmaza. \square

Érdemes kiemelni, hogy a fenti bizonyításban megkonstruált kiterjesztés az \mathcal{S} kettéhasadási felületre, mint tengelyre vett $(U, V, x^3, \dots, x^n) \rightarrow (-U, -V, x^3, \dots, x^n)$ – vagy ahogy a [64]-as hivatkozásban utalnak rá, „negyedekre vonatkozó” – tükrözési szimmetriával is rendelkezik. Természetesen, amikor egy ilyen kiterjesztés létezik, akkor mindig megadható olyan kiterjesztés is, amely nem rendelkezik ezzel a járulékos szimmetriával.

3.2. A $t=$ állandó hiperfelületek

A fejezet hátralévő részében olyan sztatikus, illetve stacionárius és tengelyszimmetrikus téridőket tekintünk, amelyekben egy \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizont található. Megmutatom, hogy a természetes módon értelmezett sztatikus, illetve stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek sima módon terjednek ki az \mathcal{S} kettéhasadási felülethez. Pontosabban fogalmazva, azt mutatom meg, hogy bármely $s \in \mathcal{S}$ ponthoz található olyan \mathcal{O}_s környezet, amelyben sztatikus, illetve stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek C^∞ módon terjednek ki az s pont $\mathcal{O}_s \cap \mathcal{S}$ környezetében a kettéhasadási felülethez. Ahogy ezt a bevezetőben már említettem, ezen általános eredményem speciálisan az Israel- és Carter-féle feketelyuk-egyértelműségi tételek bizonyításánál használt feltételek jogosságát is biztosítja.

A sztatikus, illetve stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületeknek az \mathcal{S} kettéhasadási felület környezetében való viselkedésének vizsgálatához az ott értelmezhető Kruskal-, valamint Eddington-Finkelstein-féle koordinátákat fogjuk használni. Először az Eddington-Finkelstein-féle koordináták segítségével írjuk le t -állandó hiperfelületeket. Ezt követően a kapott egyenleteket a Kruskal-féle koordinátákba átírva láthatóvá válik, hogy a sztatikus, illetve stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek valóban sima módon terjednek ki az \mathcal{S} kettéhasadási felülethez.

3.2.1. Geometriai segédletek

Először a Kruskal-féle koordinátákat vezetjük be. Legyenek (x^3, \dots, x^n) lokális koordináták az $s \in \mathcal{S}$ pont $\widetilde{\mathcal{S}}$ koordinátakörnyezetében. Legyen \mathcal{H}_A egyike a \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizontot alkotó hiperfelületeknek, és jelölje $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ ennek azt a részét, melyet az $\widetilde{\mathcal{S}}$ -on átmenő fényszerű geodetikusok feszítenek ki. Legyen \mathcal{K}^a az $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ -t érintő, az $\widetilde{\mathcal{S}}$ felületen sehol el nem tűnő fényszerű vektormező, U pedig jelölje az $\widetilde{\mathcal{S}}$ pontjaiból \mathcal{K}^a érintővektorral indított fényszerű geodetikusok azon szinkronizált affinparaméterét, melyre $U = 0$ $\widetilde{\mathcal{S}}$ -on! Terjesszük ki az x^3, \dots, x^n függvényeket $\widetilde{\mathcal{S}}$ -ról $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ -ra úgy, hogy közben értékeiket fixen tartjuk a $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ -t generáló fényszerű geodetikusok mentén. Ekkor (U, x^3, \dots, x^n) lokális koordináták $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ -on. Minden egyes $p \in \widetilde{\mathcal{H}}_A$ pontban tekintsük az ott egyértelműen meghatározott \mathcal{L}^a fényszerű vektormezőt, amelyre $\mathcal{L}^a \nabla_a U = 1$ és $\mathcal{L}^a X_a = 0$ minden a $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ felületet érintő olyan X^a vektorra, amelyre az $X^a \nabla_a U = 0$ feltétel is teljesül. Jelölje R a $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ felület pontjaiból \mathcal{L}^a érintővektorral indított fényszerű geodetikusok azon szinkronizált affinparaméterét, amelyre $R = 0$ a $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ felületen! Ekkor – a 2.1.3. alfejezetben a fényszerű koordinátarendszerek definiálása során alkalmazott érvelés megismétlésével – megmutatható, hogy $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ elegendően kicsiny $\widehat{\mathcal{O}}$ nyílt környezetében az U, R, x^3, \dots, x^n függvények lokális koordinátákat határoznak meg.

Jelölje $\widetilde{\mathcal{N}}$ a $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ azon részét, amelyre $U > 0$, azaz

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \{p \in \widetilde{\mathcal{H}}_A \mid U(p) > 0\}, \quad (3.2.1)$$

és jelölje $\widetilde{\Sigma}$ az $\widetilde{\mathcal{N}}$ horizont azon szelését, amelyre

$$\widetilde{\Sigma} = \{p \in \widetilde{\mathcal{H}}_A \mid U(p) = 1\}. \quad (3.2.2)$$

Tekintsük most az

$$\mathcal{O} = \{p \in \widehat{\mathcal{O}} \mid U(p) > 0\} \quad (3.2.3)$$

halmazon azt az Eddington-Finkelstein-típusú (u, r, x^3, \dots, x^n) fényszerű koordinátarendszert, mely az $\widetilde{\mathcal{N}}$ horizont $\widetilde{\Sigma}$ szeléséről indulva a 2.1.3. alfejezetben leírt módon definiálható

a

$$k^a = \kappa_o U \mathfrak{K}^a, \quad \text{és az} \quad \ell^a = \frac{1}{\kappa_o U} \mathfrak{L}^a \quad (3.2.4)$$

fényszerű vektormezők segítségével, ahol κ_o a \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizonthoz tartozó, és ott állandó [64] felületi gravitációt jelöli. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor \mathcal{O} felett

$$U = e^{\kappa_o u}, \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{\kappa_o} e^{-\kappa_o u} r = \frac{r}{\kappa_o U}. \quad (3.2.5)$$

Legyen most $g(r, x^3, \dots, x^n)$ a (3.1.5) egyenlet által meghatározott sima függvény, mely tetszőleges $|r| < \varepsilon_1(x^3, \dots, x^n)$ értékre jóldefiniált. Jelölje továbbá $\widehat{\mathcal{O}}'$ a $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ felület azon nyílt környezetét, amelyre

$$\widehat{\mathcal{O}}' = \{p \in \widehat{\mathcal{O}} \mid \kappa_o U(p) R(p) < \varepsilon_1(x^3, \dots, x^n)\}. \quad (3.2.6)$$

Vezessük be most $\widehat{\mathcal{O}}'$ felett a

$$V = -\kappa_o R \exp \left[\kappa_o \int_0^{\kappa_o UR} g(r, x^3, \dots, x^n) dr \right] \quad (3.2.7)$$

függvényt. Könnyen belátható, hogy V sima $\widehat{\mathcal{O}}'$ felett. Legyen $\widehat{\mathcal{U}}$ a $\widetilde{\mathcal{H}}_A$ felület egy olyan nyílt környezete, ahol (U, V, x^3, \dots, x^n) lokális koordinátákat határoz meg. A fenti konstrukció egyenes következménye az, hogy az $\widehat{\mathcal{O}}' \cap \widehat{\mathcal{U}}$ metszet felett az (u, r, x^3, \dots, x^n) és az (U, V, x^3, \dots, x^n) koordináták kapcsolatát éppen a (3.1.6) egyenletekkel adhatjuk meg.

Jelöljük az $\widehat{\mathcal{U}}$ halmaz nyílt, jobb oldali negyedét \mathscr{W} -vel, melyet a

$$\mathscr{W} = \{p \in \widehat{\mathcal{U}} \mid U(p) > 0, V(p) < 0\} \quad (3.2.8)$$

relációval adhatunk meg. A $\overline{\mathscr{W}}$ zárt, jobb oldali negyedét – mely egyben \mathscr{W} halmaz $\widehat{\mathcal{U}}$ -beli lezártja is – a

$$\overline{\mathscr{W}} = \{p \in \widehat{\mathcal{U}} \mid U(p) \geq 0, V(p) \leq 0\} \quad (3.2.9)$$

összefüggéssel adhatjuk meg. Jegyezzük meg, hogy ugyan a \mathscr{W} halmaz felett mind az Eddington-Finkelstein-féle (u, r, x^3, \dots, x^n) , mind pedig a Kruskal-féle (U, V, x^3, \dots, x^n) koordináták értelmezettek, csak az utóbbiak terjeszthetők ki sima módon $\overline{\mathscr{W}}$ -ra.

3.2.2. A sztatikus hiperfelületek

Tekintsünk most egy (M, g_{ab}) sztatikus téridőt, amelyben \mathcal{H} egy kettéhasadó Killing-horizont a téridőn értelmezett hiperfelület-merőleges ξ^a Killing-vektormezőre nézve. Mivel ξ^a mindenütt hiperfelület-merőleges – a 2.3. alfejezetben felidézett eredményeknek meg-

felelően, az általánosság elvesztése nélkül – feltehetjük, hogy \mathscr{W} foliázható olyan \mathcal{C}_t sima térszerű hiperfelületekkel, amelyek egy olyan $t : \mathscr{W} \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvény szintfelületei, amelyre

$$\mathcal{L}_\xi t = 1. \quad (3.2.10)$$

Mivel ξ^a merőleges a \mathcal{C}_t felületekre, \mathscr{W} felett biztosan létezik olyan f sima függvény, amelyre

$$g^{ab}\nabla_b t = f\xi^a. \quad (3.2.11)$$

Amint azt azonnal látni fogjuk, maga a t függvény nem, de a t -állandó egyenlettel adott \mathcal{C}_t hiperfelületek sima módon terjednek ki $\overline{\mathscr{W}}$ -ra.

Mivel \mathscr{W} -ben $\mathcal{L}_\xi(t - u) = 0$,

$$t = u + \tau(r, x^3, \dots, x^n), \quad (3.2.12)$$

ahol τ a jelzett változók egy sima függvénye. Könnyen ellenőrizhető, hogy (3.2.11) a (t, r, x^3, \dots, x^n) koordinátákban éppen a $g^{tr} = g^{tA} = 0$ egyenletekkel ekvivalens. Ezekből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{2r\alpha}, \quad (3.2.13)$$

amelyből (3.1.5) alapján az következik, hogy

$$t = u - \left[\frac{1}{2\kappa_\circ} \ln r + \frac{1}{2} \int_0^r g(r', x^3, \dots, x^n) dr' \right] + H(x^3, \dots, x^n), \quad (3.2.14)$$

ahol H a jelzett változók egy sima függvénye. Érdemes megjegyezni, hogy a (3.2.14) egyenlet által meghatározott t függvény végtelenné válik az $r = 0$ helyen, azaz a horizonton. Felhasználva a (3.1.6) és a (3.2.14) egyenleteket azt kapjuk, hogy a t függvényt \mathscr{W} felett az ott értelmezett Kruskal-féle koordináták segítségével a

$$t = \frac{1}{2\kappa_\circ} \ln \left[-\frac{U}{V} e^{2\kappa_\circ H(x^3, \dots, x^n)} \right] \quad (3.2.15)$$

alakban írhatjuk fel. Így bármely rögzített t értékre a \mathscr{W} felett értelmezett \mathcal{C}_t hiperfelületet egyszerűen a

$$V = -U \exp(2\kappa_\circ [t - H(x^3, \dots, x^n)]) \quad (3.2.16)$$

egyenlettel adhatjuk meg, melynek alakjából azonnal látszik, hogy a sztatikus – t -állandó – \mathcal{C}_t hiperfelületek mindegyike sima módon terjed ki a $\overline{\mathscr{W}}$ -ban található $U = V = 0$ egyenletekkel megadott kettéhasadási felülethez, amint azt meg szeretnénk volna mutatni.

3.2.3. A stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek

Tekintsünk most egy (M, g_{ab}) stacionárius és tengelyszimmetrikus téridőt, amelyben a \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizontot generáló ξ^a Killing-vektormező mellett létezik egy másik, térszerű ψ^a Killing-vektormező is, ami kommutál ξ^a -val, továbbá pályái zártak. Azt is feltesszük, hogy a téridő rendelkezik a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával (a definíciót lásd a 2.3. alfejezetben). Ekkor a \mathcal{W} halmaz valamely \mathcal{W}' nyílt részhalmaza – melynek \mathcal{H} -beli határa egybeesik \mathcal{W} ottani határával – fölíázható azokkal a stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületekkel, amelyek egy olyan $t : \mathcal{W}' \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvény szintfelületei, amelyre

$$\mathcal{L}_\xi t = 1 \quad \text{és} \quad \mathcal{L}_\psi t = 0, \quad (3.2.17)$$

továbbá amelyhez \mathcal{W}' felett található olyan f_1, f_2 sima függvények, hogy

$$g^{ab}\nabla_{bt} = f_1 \xi^a + f_2 \psi^a. \quad (3.2.18)$$

Az általánosság elvesztése nélkül azt is feltehetjük, hogy az Eddington-Finkelstein-féle (u, r, x^3, \dots, x^n) koordináták a ψ^a vektormezőhöz adoptáltak, azaz $\psi^a = (\partial/\partial x^n)^a$. Ekkor (3.2.17) alapján azt kapjuk, hogy

$$t = u + \tau'(r, x^3, \dots, x^{n-1}), \quad (3.2.19)$$

ahol τ' a jelzett változók egy sima függvénye. Mivel (3.2.18) a (t, r, x^3, \dots, x^n) koordinátákban éppen a $g^{tr} = g^{tA} = 0$ egyenletekkel ekvivalens, ahol most $A = 3, \dots, n-1$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \tau'}{\partial t} = \frac{1}{2r\alpha - r^2 \frac{\beta_n^2}{g_{nn}}}, \quad (3.2.20)$$

amiből az következik, hogy

$$\tau' = - \left[\frac{1}{2\kappa_\circ} \ln r + \frac{1}{2} \int_0^r g(r', x^3, \dots, x^{n-1}) dr' \right] + H'(x^3, \dots, x^{n-1}). \quad (3.2.21)$$

Itt most H' a

$$H' = \int_0^r \frac{A(r', x^3, \dots, x^{n-1})}{1 + A(r', x^3, \dots, x^{n-1})} dr' + B(x^3, \dots, x^{n-1}) \quad (3.2.22)$$

alakban írható fel, ahol B a jelzett változók egy sima függvénye, míg

$$A(r, x^3, \dots, x^{n-1}) = \frac{r \beta_n^2}{2 \alpha g_{nn}}. \quad (3.2.23)$$

Mivel $\alpha(0, x^3, \dots, x^{n-1}) = -\kappa_\circ$, léteznie kell olyan $\varepsilon(x^3, \dots, x^{n-1})$ pozitív folytonos függvénynek, amelyre A sima, továbbá minden $|r| < \varepsilon$ pontban eleget tesz az $1 + A > 0$ feltételnek.

Tekintsük most \mathscr{W}' azon \mathscr{W}'' részhalmazát, melyet a

$$\mathscr{W}'' = \{p \in \mathscr{W}' \mid 0 < r < \varepsilon(x^3, \dots, x^{n-1})\} \quad (3.2.24)$$

reláció határoz meg. Könnyen látható, hogy H' sima \mathscr{W}'' felett, továbbá sima módon terjed ki az $r = 0$ határfelülethez.

Ezek után, lényegében a sztatikus hiperfelületeknél alkalmazott érvelés megismétlésével, megmutatható, hogy a \mathscr{W}'' felett értelmezett Kruskal-féle koordinátákban a t függvényt a

$$t = \frac{1}{2\kappa_\circ} \ln \left[-\frac{U}{V} e^{2\kappa_\circ \tilde{H}(UV, x^3, \dots, x^{n-1})} \right] \quad (3.2.25)$$

összefüggés által adhatjuk meg, ahol

$$\tilde{H}(UV, x^3, \dots, x^{n-1}) = H'(r(UV, x^3, \dots, x^{n-1}), x^3, \dots, x^{n-1}). \quad (3.2.26)$$

A definícióból következően \tilde{H} sima módon kiterjeszthető az $UV = 0$ értékhez, azaz bármely rögzített t értékre a \mathscr{W}'' felett értelmezett \mathcal{C}_t hiperfelületet a

$$V = -U \exp \left(2\kappa_\circ \left[t - \tilde{H}(UV, x^3, \dots, x^{n-1}) \right] \right) \quad (3.2.27)$$

egyenlettel adhatjuk meg. Ebből azonnal következik, hogy a stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek minden, a $t - \varphi$ tükrözési szimmetriával rendelkező feketelyuk-téridőben sima módon terjednek ki az \mathcal{S} kettéhasadási felülethez.

4. fejezet

Feketelyuk-téridők globális kiterjesztése

Az előző fejezetben azt mutattam meg, hogy amikor adott egy stacionárius feketelyuk-téridő, amelyben az eseményhorizont egy olyan \mathcal{N} Killing-horizont, amely eleget tesz a 2.4.1. feltételnek, továbbá az \mathcal{N} -hez tartozó felületi gravitáció egy nem nulla állandó, akkor \mathcal{N} valamely \mathcal{U} nyílt környezete kiterjeszhető úgy, hogy a kiterjesztés által \mathcal{N} képe egy kettéhasadó Killing-horizont valódi részalmazára képeződik le. A jelen fejezet célja azoknak a feltételeknek a bemutatása, melyek azt biztosítják, hogy ne csak az \mathcal{N} horizont valamely \mathcal{U} nyílt környezete, de a feketelyuk-téridő egésze is beágyazható legyen egy kettéhasadó Killing-horizontot tartalmazó nagyobb téridőbe.

4.1. A globális kiterjesztés megkonstruálása

Első közelítésben azt gondolhatnánk, hogy amikor az eredeti téridő globálisan hiperbolikus, a kívánt globális kiterjesztés minden esetben létezik. Az alábbi példa azt mutatja, hogy ez nem minden esetben igaz, azaz van olyan globálisan hiperbolikus téridő, amelyben található egy olyan Killing-horizont, amelyen a felületi gravitáció egy nemnulla állandó érték, továbbá amelyhez nem található olyan globális kiterjesztés, amelyben a Killing-horizont egy kettéhasadó horizont részeként lenne ábrázolható.

4.1.1. Példa. *Induljunk ki a háromdimenziós Minkowski-téridőből, amelyen (t, x, y) lokális koordináták, valamint tekintsük az origó középpontú, $t - x$ síkban ható szimetria-transzformációt, melyet a sehol el nem tűnő $\xi^a = t(\partial/\partial x)^a + x(\partial/\partial t)^a$ „boost” Killing-vektormező generál, és amelynek pályái a $t^2 - x^2 = \text{állandó}$ hiperbolák! Legyen most \mathcal{F} az a térszerű felület, amelyet az $x = 0$, $t = -|y|/2$ görbe pontjain átfutó Killing-pályák feszítenek ki. Legyen Ω az \mathcal{F} felület $I^+[\mathcal{F}]$ kronológiai jövőjében definiált sima függvény, melynek „boost” invariáns értéke 1 a $t \geq -|x|$ relációval meghatározott tartományban, és amelyre*

az $(I^+[\mathcal{F}], \Omega^2\eta_{ab})$ téridő skalár görbülete felrobban az $\mathcal{F} \setminus \{(t, x, y) \mid t^2 - x^2 = 0 \text{ és } y = 0\}$ relációval meghatározott „határon”. Ilyen például az

$$\Omega(t, x, y) = \begin{cases} f(2(t^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}/|y|) & , \text{ ha } 0 \leq 2(t^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}/|y| < 1, t < 0, \text{ és } y \neq 0 \\ 1 & , \text{ mindenütt máshol} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

függvény, ahol $f(z) = 1 - e^{(1-z^{-2})}$, amely minden $0 \leq z < 1$ értékre jóldefiniált.

Az így nyert $(I^+[\mathcal{F}], \Omega^2\eta_{ab})$ a keresett globálisan hiperbolikus téridő. A $t = x > 0$ relációval meghatározott hiperfelület (hasonlóan a $t = -x > 0$ relációval meghatározott is) egy Killing-horizont, amelynek az $y = 0$ egyenlettel adott fényszerű generátora geodetikus értelemben nem teljes. Mivel a felületi gravitáció nemnulla állandó, ehhez a Killing-horizonthoz biztosan található olyan nyílt környezet, amely mint résztéridő, kiterjeszthető. Ez a lokális kiterjesztés rendelkezik az elvárt kettéhasadó horizonttal. Ugyanakkor az is nyilvánvaló, hogy nem létezik olyan globális kiterjesztés, amely vissza tudná helyezni az origót, és ezáltal a horizont $y = 0$ generátorait.

A példában leírt esetben a globális kiterjesztés megvalósíthatatlansága abból ered, hogy az alsó téridőnegyed egy része a baloldali negyeddel együtt a kiindulási téridő része. Ez – azaz a fehérlyuk-tartomány jelenléte – akadályozza meg minden olyan globális kiterjesztés megkonstruálását, amelyben a $t = x > 0$ relációkkal kiválasztott felület része lehetne a kívánt kettéhasadó horizontnak. Éppen ezért a 2.2. fejezetben bevezetett feltételünknek megfelelően feltesszük, hogy a vizsgált feketelyuk-téridőben nem létezik fehérlyuk-tartomány, miáltal a példában bemutatott technikai jellegű probléma is kiküszöbölhető.

4.1.1. Feltétel. *A következő alfejezetben olyan (M, g_{ab}) , a 2.3.1. definícióban meghatározott stacionárius feketelyuk-téridőket tekintünk, amelyek globálisan hiperbolikusak. Feltesszük továbbá, hogy az \mathcal{N} eseményhorizont sima, valamint a téridőn megadható egy – az aszimptotikus tartományban időszerű t^a stacionárius Killing-vektormezőtől esetleg különböző – olyan ξ^a Killing-vektormező, amelyhez tartozó χ_u izometriacsoportha nézve \mathcal{N} egy nem nulla állandó felületi gravitációval jellemzett Killing-horizont.*

4.1.1. A Killing-pályák tere

Ebben a részben a 4.1.1. feltételnek eleget tevő (M, g_{ab}) feketelyuk-téridőket tekintjük. A Killing-pályák néhány olyan tulajdonságát származtatom, melyek később fontos szerepet játszanak majd a globális kiterjesztés megkonstruálása során.

4.1.1. Lemma. *Legyen (M, g_{ab}) a 4.1.1. feltételnek eleget tevő feketelyuk-téridő! Ekkor a ξ^a Killing-vektormező M felett sehol sem válhat zérussá.*

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\xi^a|_p = 0$ valamely $p \in M$ pontban. Ekkor p invariáns a χ_u csoporthatásra nézve. Mivel $p \in M = I^+[M^{stac}]$, biztosan létezik olyan $q \in M^{stac}$, amelyre $q \in I^-(p)$. A χ_u izometria-transzformációt az utóbbi relációra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\chi\{q\} \subset \chi\{I^-(p)\} = I^-[\chi\{p\}] = I^-(p)$, azaz a q ponton átmenő Killing-pálya teljes egészében a p pont kronológiai, és így kauzális múltjában fekszik. Ez azonban – mivel ekkor a 2.3.1. lemma alapján $I^-(p) \supset M^{stac}$ – ellentmond annak, hogy bármely globálisan hiperbolikus téridőben $J^-(p)$ bármely Cauchy-felületet egy kompakt halmazban kell, hogy metszen. \square

Ekkor, mivel χ_u -nak az \mathcal{N} horizonton sem lehet fix pontja, minden \mathcal{C} sima Cauchy-felület \mathcal{N} egy Σ globális szelését határozza meg. Ehhez hozzávéve, hogy a fenti lemma értelmében, bármely globálisan hiperbolikus téridőben, a Killing-pályák \mathbb{R} -el diffeomorfak, azonnal adódik, hogy a 2.4.1. feltétel automatikusan teljesül.

Legyen most \mathcal{C} egy tetszőleges sima Cauchy-felület, és jelölje Σ az $\mathcal{N} \cap \mathcal{C}$ metszetet. A továbbiakban feltesszük, hogy Σ kompakt. Tekintsük most a Σ -ra merőleges két principális fényszerű vektormezőt. Az ezekkel, mint érintővektorral indított fényszerű geodetikusok lokálisan két fényszerű hiperfelületet feszítenek ki. Ezek egyike maga az \mathcal{N} felület, míg a másik egy \mathcal{N} -re transzverzális, Σ elegendően kicsiny nyílt környezetében sima, fényszerű P hiperfelület. A következő lemma értelmében, ha a kérdéses nyílt környezet elegendően kicsiny, akkor abban a P felület éppen a Σ szelet kauzális jövőjének, illetve múltjának a határát jelöli ki.

4.1.2. Lemma. *A Σ szeléshez található olyan elegendően kicsiny M -beli \mathcal{U} nyílt környezet, hogy $P \cap J^+[\Sigma] \cap \mathcal{U} \subset \partial J^+[\Sigma]$, és hasonlóan $P \cap J^-[\Sigma] \cap \mathcal{U} \subset \partial J^-[\Sigma]$.*

Bizonyítás: Elegendő az állítás első részének helyességét igazolni, hiszen ezt követően a másodiké a múlt és jövő szavak értelemszerű felcserélésével származtatható.

Tekintsük most azt a leképezést, mely a Σ -ra merőleges vektorok nyalábját képezi M -be úgy, hogy az (s, n^a) párhoz – ahol $s \in \Sigma$, és n^a az s pontbeli érintőtérben egy Σ -ra merőleges vektor – azt az M -beli pontot rendeli, amely az (s, n^a) kezdőadattal meghatározott geodetikus mentén egységnyi affinparaméter-értékre fekszik s -től. Ez a leképezés sima, és az implicit függvények tétele értelmében Σ -hoz biztosan található egy \mathcal{U}_1 környezet úgy, hogy abban ez a leképezés egy kölcsönösen egyértelmű ráképezéssé válik. Jelölje \mathcal{U}_2 a \mathcal{C} Cauchy-felület valamely kauzálisan normális környezetét, azaz egy olyan nyílt környezetet, melyet a \mathcal{C} -re merőlegesen indított, és e környezetben egymást nem metsző,

időszerű geodetikuskok jelölnek ki. Ilyen nyílt környezet, a [64] referencia 2.2 lemmájának értelmében, biztosan létezik. Legyen továbbá $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

Legyen most $p \in P \cap J^+[\Sigma] \cap \mathcal{U}$. Az $s \in J^-(p) \cap \Sigma$ pontra jelölje $\tau_p(s)$ annak az egyértelműen meghatározott kauzális geodetikusknak a hosszát, mely a p pontot s -el köti össze és amely a várakozásainknak megfelelően nem negatív. Azokra az $s \in \Sigma$ pontokra, amelyekre $s \notin J^-(p)$, a $\tau_p(s)$ értéket nullának választjuk. Ekkor $\tau_p(s)$ az s változó folytonos függvénye. Így $J^-(p) \cap \Sigma$ nem üres és kompakt, hiszen Σ kompakt, $J^-(p)$ pedig zárt minden globálisan hiperbolikus téridőben. Emiatt $\tau_p(s)$ biztosan felveszi minimumát valamely $s_0 \in \Sigma$ pontban. Ebből az következik, hogy léteznie kell egy olyan, a p pontot s_0 -al összekötő kauzális geodetikusknak, mely merőleges Σ -ra. Ekkor azonban, mivel $p \in \mathcal{U}_1$, létezik egy olyan Σ -ra merőleges maximális kauzális geodetikusk is, mely a p pontot Σ -val köti össze. Ekkor, mivel $p \in P$, ez a geodetikusk szükségképpen fényszerű. Emiatt $\tau_p(s) = 0$ bármely $s \in \Sigma$ pontra, azaz p nem köthető össze időszerű geodetikussal Σ egyetlen pontjával sem, és így a lemma állításának megfelelően azt kaptuk, hogy $p \in \partial J^+[\Sigma]$. \square

4.1.3. Lemma. *Legyen $\mathcal{P} = P \cap \mathcal{U}$. Ekkor*

- a) \mathcal{P} akronális.
- b) Egyetlen Killing-pálya sem metszheti \mathcal{P} -t kétszer.

Bizonyítás: a) Legyenek $p, q \in \mathcal{P}$. Megmutatjuk, hogy nem létezhet a p pontot q -val összekötő γ időszerű görbe. Amikor $p, q \in \partial J^+[\Sigma]$ vagy $p, q \in \partial J^-[\Sigma]$, az állítás azonnal következik az előző lemmából és a kauzális halmazok határának akronalitásából. Így csak azt az esetet kell tekintenünk, amikor $p \in \partial J^-[\Sigma] \cap \mathcal{P}$ és $q \in \partial J^+[\Sigma] \cap \mathcal{P}$. Ebben az esetben bármely, a p pontot q -val összekötő, γ időszerű görbe szükségképpen metszi a \mathcal{C} Cauchy-felületet valamely r pontban. Amennyiben azt tételezzük fel, hogy r a feketelyuk-tartományhoz tartozik, azaz $r \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ teljesül, akkor a $p \in \partial J^-[\Sigma] \cap \mathcal{P}$ feltétellel kerülünk ellentmondásba, hiszen $[\partial J^-[\Sigma] \cap \mathcal{P}] \subset \partial J^-[\mathcal{C} \cap \mathcal{B}]$, ugyanakkor $p \in I^-[\mathcal{C} \cap \mathcal{B}]$. Hasonlóan megmutatható, hogy az $r \notin \mathcal{B}$ feltételezés a $q \in \partial J^+[\Sigma] \cap \mathcal{P}$ feltevésünknek mond ellent.

b) Azt szeretnénk megmutatni, hogy semelyik $p \in \mathcal{P}$ ponthoz nem létezhet olyan $u > 0$, hogy $\chi_u(p) \in \mathcal{P}$ teljesedne. Amikor $p \in \Sigma$, akkor a p -re illeszkedő Killing-pálya az \mathcal{N} (jövő irányú) fényszerű geodetikusk generátora, és $\chi_u(p) \in I^+[\mathcal{C}]$, bármely $u > 0$ esetén. Mivel $\mathcal{N} \cap \mathcal{P} = \Sigma$, ebből az következik, hogy bármely $u > 0$ -ra $\chi_u(p) \notin \mathcal{P}$. Amikor $p \in J^+[\Sigma] \setminus \Sigma$, akkor léteznie kell egy olyan $s \in \Sigma$ pontnak és egy olyan λ jövőirányú, fényszerű geodetikusknak, mely a p és s pontokat összeköti. Ezek után, a χ_u izometria-transzformációt alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik egy jövőirányú, fényszerű geodetikusk

a $\chi_u(s)$ ponttól $\chi_u(p)$ -ig. Így s és $\chi_u(p)$ között létezik egy szakaszonként sima, jövőirányú fényszerű geodetikusokból álló görbe. Ekkor $\chi_u(p) \in I^+[\Sigma]$, ugyanakkor a jelen lemma a) része folytán tudjuk, hogy $\chi_u(p) \notin \mathcal{P}$, azaz a p -re illeszkedő orbit nem metszheti újra \mathcal{P} -t.

Amikor $p \in J^-[\Sigma] \setminus \Sigma$, a bizonyítás analóg módon kapható. \square

Az iménti lemma értelmében \mathcal{N} izometria-invariáns nyílt környezete, $\mathcal{O}_{\mathcal{N}} = \chi\{\mathcal{P}\}$, olyan triviális szálnyalábszerkezettel rendelkezik, melynek struktúracsoportja \mathbb{R} . Ennek ellenére még mindig előfordulhatna az, hogy az $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ -ben futó Killing-pályák tetszőlegesen közel kerüljenek olyan más, M -ben futó Killing-pályákhoz, amelyek nem metszik a \mathcal{P} halmaz $\overline{\mathcal{P}}$ lezártját. Ha ez megtörténhetne, akkor a Killing-pályák tere nem tenne eleget a Hausdorff-féle szétválasztási axiómának, és a kérdéses Killing-pályák jelenléte megakadályozhatná a kívánt globális kiterjesztés megkonstruálását. A következő példa pontosan egy ilyen elrendezést mutat be.

4.1.2. Példa. *Legyen (M, g_{ab}) az a téridő, melyet a négydimenziós Minkowski-téridőből a $t \leq -|x|$ alsó negyed eltávolításával kapunk. Az így nyert téridő globálisan hiperbolikus, továbbá invariáns a sehol el nem tűnő $\xi^a = t(\partial/\partial x)^a + x(\partial/\partial t)^a$ boost Killing-vektormező által generált izometriacsoport hatására nézve. Nyilvánvaló, hogy a $t = x$ egyenlet által meghatározott hiperfelület ξ^a -ra nézve Killing-horizont. Ennek ellenére tetszőleges \mathcal{P} választás mellett, az $\mathcal{O}_{\mathcal{N}} = \chi\{\mathcal{P}\}$ környezet M -beli lezártja tartalmazza a $t = -x$ egyenlettel meghatározott Killing-pályákat.*

Az alábbi lemma azt igazolja, hogy a példában bemutatott jelenség nem fordulhat elő az általunk kiválasztott téridőkben.

4.1.4. Lemma. *Legyenek \mathcal{N} , Σ és \mathcal{P} a fentieknek megfelelően kiválasztott halmazok. Legyen $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}$ egy olyan nyílt részhalmaz, amelynek $\overline{\mathcal{P}^*}$ lezártja is része \mathcal{P} -nek. Ekkor a $\chi\{\mathcal{P}^*\}$ pálya M -beli határát pontosan a χ_u izometriacsoportnak a \mathcal{P} halmazt a \mathcal{P}^* határpontjaiban metsző pályái feszítik ki, azaz $\partial[\chi\{\mathcal{P}^*\}] = \chi\{\partial\mathcal{P}^*\}$.*

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy M -ben létezik olyan q pont, amelyre $q \in \partial[\chi\{\mathcal{P}^*\}] \setminus \chi\{\partial\mathcal{P}^*\}$. Mivel $q \in \partial[\chi\{\mathcal{P}^*\}]$, biztosan létezik olyan $\{p_i\}$ pontsorozat \mathcal{P} -ben és $\{u_i\}$ valós számsorozatot, hogy a $\{q_i = \chi_{u_i}(p_i)\}$ pontsorozat q -hoz konvergál. Mivel a \mathcal{P}^* halmaz $\overline{\mathcal{P}}$ -beli lezártja kompakt, a $\{p_i\}$ sorozatnak biztosan van olyan részsorozata, mely egy $p \in \overline{\mathcal{P}^*} \subset \mathcal{P}$ ponthoz konvergál. Tekintsük most ezt a részsorozatot. Ekkor nem létezhet olyan $u \in \mathbb{R}$, mely az $\{u_i\}$ számsorozat torlódási pontja, hiszen ebből $q = \chi_u(p)$ következne, ami ellentmond az indirekt feltételezésünknek. Így vagy $u_i \rightarrow -\infty$, vagy pedig $u_i \rightarrow +\infty$ teljesül, miközben $i \rightarrow \infty$. Tekintsük most az $u_i \rightarrow -\infty$ esetet! Legyen

$p' \in I^+(p)$ és $q' \in I^-(q)$. Ekkor biztosan létezik olyan \bar{i} természetes szám, hogy bármely $i > \bar{i}$ -re $p_i \in I^-(p')$ és $q_i \in I^+(q')$. Ekkor azonban $q' \in M = I^+[M^{stac}]$ miatt léteznie kell olyan $r \in M^{stac}$ pontnak, amelyre $r \in I^-(q')$, és emiatt $r \in I^-(q_i)$, bármely $i > \bar{i}$ -re. A χ_{-u_i} izometria-transzformációt az utóbbi relációra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\chi_{-u_i}(r) \in I^-(p_i)$, és emiatt $\chi_{-u_i}(r) \in I^-(p')$ bármely $i > \bar{i}$ -re. Mivel a Killing-pályák jövő irányítottak az M^{stac} aszimptotikus tartományban, azt kapjuk, hogy $I^-(p')$ az r ponton átmenő teljes Killing-pályát tartalmazza. Ez azonban azt is jelenti, hogy $I^-(p') \supset M^{stac}$, ami a 4.1.1. lemma bizonyítása során alkalmazott érvelés szerint ellentmond annak, hogy egy globálisan hiperbolikus téridőben $J^-(p') \cap \Sigma$ kompakt kell, hogy legyen.

Abban az esetben, ha $u_i \rightarrow +\infty$, a bizonyítás a p és q pontok szerepének felcserélése, valamint a fent alkalmazott érvelés értelemszerű átalakítása révén származtatható. \square

4.2. A globális kiterjesztés

A 4.1.1. feltételben meghatározott téridőosztály elemeinek globális kiterjesztését a 3.1.2. alfejezetben megkonstruált lokális kiterjesztés felhasználásával készítjük el.

Jelölje Σ az \mathcal{N} Killing-horizont, valamint a \mathcal{C} Cauchy-felület metszetét. Könnyen belátható, hogy \mathcal{P} alkalmas megválasztásával – ez lényegében a 3.1.2. alfejezetben (lásd a [92] hivatkozást is) az ε -környezetek alkalmas megválasztásával egyenértékű – mindig biztosítható az, hogy az \mathcal{N} Killing-horizont $\mathcal{O}_{\mathcal{N}} = \chi\{\mathcal{P}\}$ környezete pontosan egy olyan \mathcal{U} halmazzal essen egybe, amely a 3.1.2. alfejezetben leírtaknak megfelelően kiterjeszthető. Azaz az \mathcal{U} halmazhoz található az $(\mathcal{U}, g_{ab}|_{\mathcal{U}})$ téridőnek egy olyan Φ izometrikus beágyazása az (M^*, g_{ab}^*) téridőbe, hogy az utóbbiban egy olyan \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizont adható meg, melynek az \mathcal{N} Killing-horizont $\Phi[\mathcal{N}]$ képe egy valódi részhalmazát alkotja.

Érdeemes megemlíteni, hogy a Φ izometrikus beágyazás segítségével az is megmutatható, hogy az \mathcal{N} Killing-horizontot generáló fényszerű geodetikusok múlt irányban nem lehetnek teljesek, ezért az \mathcal{N} -en értelmezett felületi gravitáció szükségképpen pozitív. Tegyük fel ugyanis, hogy az \mathcal{N} -en futó Killing-pályák jövő irányban nem teljes fényszerű geodetikusok. Ekkor, felidézve a 3.1.2. alfejezetben megkonstruált U, V koordinátákat – ezek \mathcal{U} teljes egészén mindig globálisan jól definiált függvények –, azt kapnánk, hogy $I^-[N]$ -ben az $UV = \text{állandó}$ szintfelületek térszerűek, és az UV szorzat értéke folyamatosan csökkenne a jövőirányú kauzális görbék mentén. Ebből az is következne, hogy bármely, az \mathcal{N} Killing-horizonthoz elegendően közeli $p \in I^-[N]$ pontból indított, jövőirányú, fényszerű geodetikus Φ általi képe végig az M^* sokaságon belül maradna, míg el nem éri a \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizontot. Ez azonban ellentmond annak, hogy a $p \in I^-[N]$ választás miatt $p \in I^-[M^{stac}]$ teljesül.

Az előző bekezdésben felidézett „lokális kiterjesztés” globalizációja a 4.1.4. lemma és az alábbi általános eredmény segítségével valósítható meg.

4.2.1. Lemma. *Legyenek (M, g_{ab}) , illetve (M', g'_{ab}) határnélküli, illetve a $\partial M'$ határral rendelkező n -dimenziós téridők. Legyen továbbá \mathcal{O}' az M' olyan n -dimenziós részsokasága, amelyre $\partial M' = \partial \mathcal{O}'$. Legyen \mathcal{Q} az M sokaság egy olyan zárt részhalmaza, amelyen M differenciális szerkezete egy határral rendelkező sokaságstrukturát indukál. Tegyük fel, hogy létezik egy $\Phi : (\mathcal{O}', g'_{ab}|_{\mathcal{O}'}) \rightarrow (\mathcal{Q}, g_{ab}|_{\mathcal{Q}})$ izometria-transzformáció. Jelölje \widehat{M} a Φ leképezés által generált ekvivalenciareláció hányadosterét, azaz $\widehat{M} = (M \cup M')/\Phi$, ahol az $x \in M$ és $x' \in M'$ pontok pontosan akkor ekvivalensek, ha $x \in \mathcal{Q}$, $x' \in \mathcal{O}'$ és $\Phi(x') = x$. Ekkor \widehat{M} egy természetes határ nélküli Hausdorff-féle sokaság szerkezettel rendelkezik, továbbá $(\widehat{M}, \widehat{g}_{ab})$ egy kiterjesztése az (M, g_{ab}) téridőnek, ahol \widehat{g}_{ab} az \widehat{M} sokaságon a g_{ab} és a g'_{ab} metrikák által indukált metrikát jelöli.*

Bizonyítás: Tekintsük az M sokaságon, és az M' halmaz $\text{int}(M')$ -el jelölt belsejében értelmezett térképek összességét és az ezek, valamint a Φ izometria-transzformáció által az \widehat{M} halmazon meghatározott nyílt halmazokat. Nyilvánvaló, hogy ezek a nyílt halmazok \widehat{M} teljes lefedését adják, továbbá az ezekből, mint térképekből felépülő atlasz \widehat{M} -en egy határ nélküli differenciálhatóság-strukturát indukál. A Hausdorff-tulajdonság teljesülése mindenhol nyilvánvaló, kivéve \widehat{M} azon pontjaiban, melyek olyan (x', x) párok azonosítása révén keletkeznek, amelyek közül x' az \mathcal{O}' halmaz M' -beli lezártjából, míg x a \mathcal{Q} halmaz M -beli lezártjából való. Azonban, mivel \mathcal{Q} zárt M -ben, továbbá x a Φ leképezés általi képe valamely M' -beli pontnak, azonnal látható, hogy x és x' pontok Hausdorff-szeparáltak $M \cup M'$ -ben. Ezek után ellenőrizhető, hogy az $(\widehat{M}, \widehat{g}_{ab})$ téridő az (M, g_{ab}) téridőnek éppen a 3.1.1. definícióban meghatározott értelemben vett kiterjesztése. \square

Ezek után a fejezet legfontosabb eredményét az alábbi tételben fogalmazzuk meg.

4.2.1. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) a 4.1.1. feltételben meghatározott téridőosztály egy tetszőleges eleme, továbbá legyen az \mathcal{N} Killing-horizont $\Sigma = \mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ szelése kompakt. Ekkor (M, g_{ab}) globálisan kiterjeszthető úgy, hogy a megnagyobbított téridőben \mathcal{N} képe egy kettéhasadó Killing-horizont valódi részhalmaza. Ezen felül mindig megadható olyan $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ kiterjesztés is, amelyre az eredeti χ_u izometria-csoport hatás kiterjed, továbbá $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ az \mathcal{S} kettéhasadási felületre vett tengelyes tükrözésre nézve is invariáns.*

Bizonyítás: Legyen az (M^*, g^*_{ab}) téridő az (M, g_{ab}) téridő – az előző fejezet 3.1.1. tételének bizonyítása szerint megkonstruált – lokális kiterjesztése. Legyen továbbá ε – az ott használt $\widetilde{\varepsilon}$ függvények által meghatározott – pozitív folytonos függvény a Σ szelésen. Legyen M' az M^* azon határral rendelkező részsokasága, amely pontosan azokból a pontokból áll, amelyekre az $|UV| \leq \varepsilon$, amikor $U > 0$, valamint $|UV| < \varepsilon$, amikor $U \leq 0$.

Legyen \mathcal{O}' az M' sokaság azon részhalmaza, melyen $U > 0$. Legyen továbbá \mathcal{Q} az \mathcal{O}' halmaz Φ beágyazó leképezés általi ősképe. Ekkor a 4.1.4. lemma alapján tudjuk, hogy \mathcal{Q} az M sokaság egy zárt részhalmaza. Így a 4.2.1. lemma feltételei teljesülnek, amiből következik, hogy az (M, g_{ab}) téridőnek megadható olyan $(\widehat{M}, \widehat{g}_{ab})$ kiterjesztése, amely (M, g_{ab}) -nek, valamint (M', g'_{ab}) -nek a 4.2.1. lemmában leírt módon történő összeillesztése által jön létre.

Tekintsük most az $(\widehat{M}, \widehat{g}_{ab})$ kiterjesztésből, annak időirányításának megfordításával előállított téridőt. Töröljük ebből (M^*, g_{ab}^*) azon pontjait, amelyekre az $U < 0$ és az $|UV| > \varepsilon/2$ feltételek teljesülnek. Jelöljük $(\widetilde{M}', \widetilde{g}'_{ab})$ -vel az így kapott téridőt. Vezessük be ezek után az (U', V') koordinátákat az $U' = -U$, $V' = -V$ relációkkal az $(\widehat{M}', \widehat{g}'_{ab})$ téridő kettéhasadó Killing-horizontja környezetében. Mivel (M^*, g_{ab}^*) rendelkezik az $U \rightarrow -U$ és $V \rightarrow -V$ leképezések által meghatározott, az \mathcal{S} kettéhasadási felületre vett tengelyes tükrözési szimmetriával, az előző bekezdésben leírt eljárás megismételhető úgy, hogy most az (M', g'_{ab}) téridőt az $(\widetilde{M}', \widetilde{g}'_{ab})$ téridővel helyettesítjük. Nyilvánvaló, hogy az ilymódon előállított $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ téridőn létezik egy izometriatranszformáció, melynek az (M, g_{ab}) -re vett megszorítottja éppen χ_u . A fenti konstrukcióból az is következik, hogy $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ rendelkezik a kettéhasadási felületre vett tengelyes tükrözési szimmetriával is. \square

4.3. Az anyagmezők kiterjesztése

A fejezet hátralévő részében azt vizsgáljuk meg, hogy amikor a kiindulási feketelyuk-téridőn adottak valamely anyagmezők, és a téridő maga kiterjeszthető, mikor terjeszthetők ki az anyagmezőket reprezentáló tenzormezők is.

Pontosabban fogalmazva, a 2.3.1 definícióban megfogalmazott feltételnek megfelelően, az (M, g_{ab}) feketelyuk-téridő felett olyan (k, ℓ) típusú $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell}$ tenzormezőket tekintünk, amelyek maguk is invariánsak a χ_u izometriatranszformáció-csoport hatására nézve, azaz feltesszük, hogy a

$$\mathcal{L}_\xi T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell} = 0 \quad (4.3.2)$$

relációk teljesednek. Azon geometriai feltételek meghatározására törekszünk, melyek ezen $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell}$ tenzormezőknek az előző alfejezetben megkonstruált $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ téridőre való kiterjesztését biztosítják.

Nyilvánvaló, hogy bármely M -en értelmezett izometria-invariáns $(0, 0)$ típusú tenzormező, azaz bármely skalármező azonnal kiterjeszthető \widetilde{M} -ra. Az is könnyen belátható, hogy nem minden M -en értelmezett izometria-invariáns tenzormező terjeszthető ki. Például az Eddington-Finkelstein-típusú koordinátákban adott $(du)_a$ egyforma mező izometria-invariáns M -en, ugyanakkor a Kruskal-típusú koordináta-rendszerre vonatkozó

(dU_a/U) alakjából azonnal látható, hogy a $(du)_a$ formamező nem terjeszthető ki sima módon \widetilde{M} -ra.

Mivel az $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ téridőn adott a \widetilde{g}_{ab} metrika, melynek segítségével az összes vektor-index lehúzható, az általánosság elvesztése nélkül korlátozhatjuk vizsgálatainkat a $(0, \ell)$ típusú tenzormezőkre. A továbbiakban ezt tesszük, és a $(0, \ell)$ típusú tenzormezőket a tenzor-indexek elhagyásával, egyszerűen \mathcal{T} -vel jelöljük.

Könnyen belátható, hogy valamely \mathcal{T} tenzormező kiterjesztését lehetetlenné tevő okok – amint az imént említett speciális példában is – kizárólag a kettéhasadó horizont környezetében jelenhetnek meg. Éppen ezért vizsgálatainkban nyugodtan szorítkozhatunk az $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ téridő (U, V) Kruskal-típusú koordinátákkal lefedett részére, a \mathcal{T} tenzormező lokális viselkedését pedig elegendő egyetlen (U, V, X^3, \dots, x^n) koordinátákkal lefedett környezetben vizsgálnunk. Jelölje \mathcal{O} az egyik ilyen téridőtartományt, \mathcal{R} pedig jelölje az \mathcal{O} halmaz „jobb oldali negyedébe” eső részét, azaz \mathcal{O} azon részhalmazát, amelynek pontjaira az $U > 0, V < 0$ feltételek is teljesednek. Ekkor biztosan teljesül a $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ feltétel is, ahol \mathcal{D} a külső kommunikáció tartományát jelöli.

Először is az alábbi lemmát bizonyítjuk:

4.3.1. Lemma. *A $dU/U, dV/V$, valamint a dx^3, \dots, dx^n formamezők lineárisan függetlenek és χ_u -invariánsak az \mathcal{R} halmaz pontjaiban.*

Bizonyítás: A $dU/U, dV/V, dx^3, \dots, dx^n$ formamezők lineáris függetlensége azonnal következik a Kruskal-típusú koordinátákból képzett koordináta-differenciálok $dU, dV, dx^3, \dots, dx^n$ lineáris függetlenségéből. A dx^3, \dots, dx^n differenciálok χ_u -invariánsága az (x^3, \dots, x^n) koordináták invarianciájának következménye. A dU/U kifejezés χ_u -invariáns, hiszen $du = dU/U$ is az. Végül, az U és V koordináták definíciója alapján, \mathcal{R} pontjaiban az UV szorzat mindig megadható úgy, mint az (r, x^3, \dots, x^n) koordináták függvénye, ezáltal automatikusan χ_u -invariáns. Emiatt a $d(UV)/(UV) = dU/U + dV/V$ kifejezés is az, melyből a fenti észrevételek alapján azt kapjuk, hogy dV/V is χ_u -invariáns kell legyen. \square

Ezek után, ha \mathcal{R} -en adott egy $(0, \ell)$ típusú \mathcal{T} tenzormező, akkor a $dU/U, dV/V, dx^3, \dots, dx^n$ formamezők, mint bázismezők segítségével kifejezhetjük \mathcal{T} -t. Mivel a $dU/U, dV/V, dx^3, \dots, dx^n$ formamezők χ_u -invariánsak, \mathcal{T} pontosan akkor lesz χ_u -invariáns, ha a $dU/U, dV/V, dx^1$ és dx^2 formamezők tenzori szorzatából képzett bázisra vonatkozó komponensei mind külön-külön is azok. Ez pontosan akkor következik be, ha ezek a komponensek olyan függvények, amelyek csak a (UV, x^3, \dots, x^n) koordinátákifejezésektől függenek. Ekkor \mathcal{R} -en a $(0, \ell)$ típusú \mathcal{T} tenzormezőt

$$\mathcal{T} = \sum f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n)(dU/U)^{(p)}(dV/V)^{(q)}(dx^3)^{(r_3)} \dots (dx^n)^{(r_n)} \quad (4.3.3)$$

formában adhatjuk meg, ahol a p, q, r_3, \dots, r_n – melyekre $p + q + r_3 + \dots + r_n = \ell$ teljesül – azt jelölik, hogy a kérdéses báziselemek hányszor szerepelnek a fenti kifejtésben. Mivel $dU, dV, dx^3, \dots, dx^n$ sima formamezők, melyek mindenütt lineárisan függetlenek a kiterjesztett téridőben, \mathcal{T} pontosan akkor terjeszthető ki sima módon oda, ha a fenti kifejtés minden tagja kiterjeszthető.

A fenti érvelés egyenes következményeként kaphatjuk az alábbi lemma bizonyítását.

4.3.2. Lemma. *Legyen \mathcal{T} egy $(0, \ell)$ típusú, sima, χ_u -invariáns tenzormező \mathcal{R} -en. Ekkor*

- (i) \mathcal{T} pontosan akkor terjeszthető ki M -ben a $V = 0, U > 0$ hiperfelülethez – azaz az \mathcal{N} Killing-horizonthoz –, ha a fenti báziskifejtésben minden egyes $f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}$ együttható függvény az

$$f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) = (UV)^q \alpha^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) \quad (4.3.4)$$

alakban írható fel, ahol az $\alpha^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}$ kifejezések a jelzett változók tetszőleges, sima függvényei.

- (ii) \mathcal{T} pontosan akkor terjeszthető ki az M^* sokaság $U = 0, V < 0$ egyenletek által adott hiperfelületéhez, ha a fenti báziskifejtésben minden egyes $f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}$ együttható függvény az

$$f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) = (UV)^p \beta^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) \quad (4.3.5)$$

alakban írható fel, ahol a $\beta^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}$ kifejezések a jelzett változók tetszőleges, sima függvényei.

- (iii) \mathcal{T} pontosan akkor terjeszthető ki sima módon az $UV = 0$ egyenlet által meghatározott kettéhasadó Killing horizontra – és ezáltal a teljes M^* sokaságra –, ha

$$f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) = (UV)^{\max(p,q)} \gamma^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n), \quad (4.3.6)$$

ahol a $\gamma^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}$ kifejezések a jelzett változók tetszőleges, sima függvényei.

Tekintsünk most egy \mathcal{T} sima, $(0, \ell)$ típusú, χ_u -invariáns tenzormezőt az (M, g_{ab}) tér-időn! Ekkor, mivel \mathcal{T} sima \mathcal{N} -en, minden egyes $f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}$ együtthatóra az

$$f^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) = (UV)^q \alpha^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) \quad (4.3.7)$$

relációnak kell teljesülnie. Így a fenti 4.3.2 lemmából az következik, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy \mathcal{T} sima módon kiterjeszthető legyen az (M^*, g_{ab}^*) téridőre az,

hogy \mathcal{T} báziskifejtésében minden esetben, amikor $p > q$ a

$$\alpha^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) = (UV)^{p-q} \tilde{\alpha}^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}(UV, x^3, \dots, x^n) \quad (4.3.8)$$

reláció is teljesüljön, valamely $\tilde{\alpha}^{(p),(q),(r_3),\dots,(r_n)}$ sima függvényre.

Mindezen észrevételek a fentebb megfogalmazott eredményeinkkel együtt adják az alábbi tétel bizonyítását.

4.3.1. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) a 2.3.1 definícióban meghatározott stacionárius feketelyuk-téridő, és jelölje $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ az (M, g_{ab}) téridőnek a 4.2.1. tétel állításának megfelelő globális kiterjesztését. Tegyük fel továbbá, hogy (M, g_{ab}) vagy sztatikus, vagy pedig stacionárius és tengelyszimmetrikus úgy, hogy ugyanakkor a $t - \varphi$ tükrözési invarianciával is rendelkezik a \mathcal{D} külső kommunikációs tartomány felett. Jelölje \mathfrak{i} a \mathcal{D} tartomány t idő- vagy $t - \varphi$ tükrözési invarianciáját megjelölt $\mathfrak{i} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezést. Ekkor minden M -en értelmezett C^∞ , χ_u - és \mathfrak{i} -invariáns \mathcal{T} tenzormező C^∞ módon terjeszthető ki $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ -re.*

Bizonyítás: Tekintsük \mathcal{T} -nek a fentiekben definiált $\mathcal{R} \subset M$ tartományra vett megszorítottját. Ekkor, mivel \mathcal{T} sima tenzormező az (M, g_{ab}) téridő felett, sima módon kiterjeszthető a $V = 0, U > 0$ relációkkal adott \mathcal{N} horizontra is. Érdeemes megjegyezni, hogy az $\mathfrak{i} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezés triviális módon kiterjeszthető az \mathcal{R} tartomány \tilde{M} -beli határára úgy, hogy az a $V = 0, U > 0$, valamint az $U = 0, V < 0$ relációk által meghatározott hiperfelületeket kölcsönösen egymásra képezi. Így, mivel \mathcal{T} invariáns az $\mathfrak{i} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ transzformációra nézve, biztosan kiterjeszthető az $U = 0, V < 0$ hiperfelületre. Ez azonban a 4.3.2 lemma állításának értelmében azt jelenti, hogy \mathcal{T} kiterjeszthető a teljes $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ téridőre is. \square

5. fejezet

A feketelyukak, mint hologramok

Amint azt a bevezetőben említettem, a stacionárius feketelyukakra vonatkozó tudásunk nagy része az aszimptotikusan sík Schwarzschild- és Kerr-téridők tanulmányozása során alakult ki. A feketelyuk egyértelműségi tételek alapján biztosan tudjuk, hogy az aszimptotikusan sík, stacionárius, elektrovákuum feketelyukak a Kerr-Newmann-téridőosztályhoz tartoznak. Azt várjuk, hogy amikor a feketelyukon kívül anyag helyezkedik el, vagy a téridő nem aszimptotikusan sík, akkor ezektől eltérő, más jellegű konfigurációk – úgynevezett deformált feketelyukak – sokasága valósulhat meg. Éppen ezért fontos annak megértése, hogy mennyivel nagyobb a deformált feketelyukak konfigurációs tere, mint az a Schwarzschild- és Kerr-téridőkhöz hasonló, aszimptotikusan sík feketelyukak esetében volt.

A deformált feketelyukak tulajdonságainak tanulmányozását célként kitűzve ebben a fejezetben olyan négydimenziós, elektrovákuum téridőket tekintek, melyek egy egyparaméteres izometriacsoporthoz, valamint egy azzal kompatibilis kettéhasadó Killing-horizontot hordoznak. A téridő aszimptotikus tulajdonságaival kapcsolatban semmiféle megszorítással nem alkalmazok. Célom – a [99] munkámban ismertetett legfontosabb eredmények felidézésével – annak bemutatása, hogy minden deformált elektrovákuum feketelyuk esetében a téridő geometriája és rajta az elektromágneses mező is teljes egészében ismert feltéve, hogy a kettéhasadás felületén ismerjük az ott indukált metrikát, egy komplex függvényt – melynek eltűnése a forgás hiányára utal –, valamint az egyik komplex elektromágneses potenciál ottani értékét.

5.1. Deformált feketelyukak

Vizsgálataink megkezdése előtt érdemes felidézni, hogy az összes sztatikus és tengelyszimmetrikus deformált feketelyuk-téridő ismert, ezek tulajdonságait számos munkában

vizsgálták [60, 79, 90, 49, 23, 78, 38, 52, 39, 29, 113, 40]. Ugyanakkor az általános, stacionárius konfigurációk vizsgálata – a [29] munkában található, a célkitűzéseiben is meglehetősen behatárolt próbálkozástól eltekintve – nem történt meg.

A sztatikus deformált feketelyukak eredetileg csak lokális érvelésekben kerültek elő, és úgy gondoltak rájuk, mint a Schwarzschild-téridő olyan deformációira, amelyet a feketelyuk köré tengelyszimmetrikusan odahelyezett anyag okozhat. Később nyilvánvalóvá vált, hogy az általános deformált feketelyukak fontos szerepet játszhatnak négy-, illetve magasabb dimenziós téridőkben is, ahol egy, esetleg több térszerű dimenzió kompaktifikálása valósult meg (lásd, például a [78, 52, 39] munkákat).

Ebben a fejezetben egy olyan formalizmust ismertetünk, melynek segítségével lehetőségünk nyílik az összes lehetséges négydimenziós, stacionárius, elektrovákuum, deformált feketelyuk-konfiguráció együttes kezelésére. A matematikai keret egyrészt az általános relativitáselméletben széleskörben alkalmazott Newman-Penrose formalizmus [83], másrészt a karakterisztikus kezdőértékprobléma Friedrich [33] által megfogalmazott alakjának felhasználására épít. Ennek segítségével a vizsgált deformált elektrovákuum feketelyuk-téridősztály elemeihez tartozó valódi szabadsági fokok egyértelműen meghatározhatók.

5.2. A matematikai modell

Az Einstein-elmélet keretein belül olyan (M, g_{ab}) négydimenziós, erősen kauzális, elektrovákuum feketelyuk-téridőket tekintünk¹, melyek eleget tesznek az

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \tilde{\Lambda}g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (5.2.1)$$

Einstein-egyenletnek, ahol $\tilde{\Lambda}$ a kozmológiai állandót jelöli. Az F_{ab} kétformamező segítségével adott elektromágneses mező a

$$\nabla^a F_{ab} = 0 \quad \text{és} \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (5.2.2)$$

Maxwell-egyenleteknek tesz eleget, míg az Einstein-egyenlet (5.2.1) jobb oldalán álló T_{ab} energiaimpulzus-tenzor a

$$T_{ab} = -\frac{1}{4\pi} \left[F_{ca} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} (F_{ef} F^{ef}) \right] \quad (5.2.3)$$

alakban írható fel. Utóbbi automatikusan eleget tesz a domináns energiefeltételnek.

Feltesszük, hogy az (M, g_{ab}) téridőn adott egy $\chi_{\hat{u}}$ egyparaméteres izometriacsoport,

¹Ebben a fejezetben a téridőmetrika szignatúráját $(+, -, -, -)$ -nak választjuk.

melyet a \mathfrak{K}^a Killing-vektormező generál. Azt is feltesszük, hogy a téridőben található \mathcal{N} jövő eseményhorizont egy olyan Killing-horizont, mely invariáns $\chi_{\hat{u}}$ hatásával szemben, ugyanakkor \mathfrak{K}^a fényszerű az \mathcal{N} felületen. Feltesszük, hogy \mathfrak{K}^a jövőirányú \mathcal{N} -en, és $\chi_{\hat{u}}$ -nek nincs fix pontja \mathcal{N} -en, valamint azt, hogy Σ az \mathcal{N} felület egy globális, összefüggő, kétdimenziós, határ nélküli szelését határozza meg. Ekkor speciálisan teljesül a 2.4.1. feltétel, hiszen $\chi_{\hat{u}}$ pályái \mathbb{R} -el diffeomorfak, továbbá $\chi_{\hat{u}}$ bármely pályája pontosan egyszer metszi Σ -át. Feltesszük továbbá, hogy \mathcal{N} nemdegenerált Killing-horizont – azaz a 2.5.1. tétel értelmében – az \mathcal{N} -hez tartozó állandó értékű κ felületi gravitáció nemnulla, azaz $\kappa = \kappa_o > 0$.

Ekkor \mathcal{N} fényszerű geodetikus generátorai múltirányban geodetikus értelemben nem teljesek. Felidézve ekkor az előző két fejezetben ismertett legfontosabb eredményeket (lásd az [91, 92, 37, 95] munkákat is) megmutatható, hogy az (M, g_{ab}) téridő \mathcal{N} jövő eseményhorizontjának mindig létezik olyan \mathcal{O} elegendően kicsiny, nyílt környezete, hogy a $(\mathcal{O}, g_{ab}|_{\mathcal{O}})$ téridő kiterjeszthető oly módon, hogy a megnagyobbított $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^*)$ téridőben egy olyan \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizont található, mely a \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 , egymást egy \mathcal{S} kétdimenziós térszerű felületben metsző, Killing-horizontok uniójaként áll elő, továbbá \mathcal{N} képe (mondjuk) a \mathcal{H}_1 horizont \mathcal{S} kauzális jövőjébe eső részének felel meg.

Ahogy az az előző fejezetben megmutattuk, az $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^*)$ téridő megválasztható úgy, hogy rendelkezzen az \mathcal{S} felületre vett tengelyes tükrözésre vonatkozó invarianciával, továbbá – ahogy az a [92, 95] munkáinkból következik – a \mathfrak{K}^a Killing-vektormező és az F_{ab} elektromágneses mező is kiterjeszthető a megnagyobbított téridőn úgy, hogy a kiterjesztett \mathfrak{K}^{*a} és F_{ab}^* mezőkre a $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}^*} g_{ab}^* = 0$ és $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}^*} F_{ab}^* = 0$ relációk \mathcal{O}^* felett mindenütt teljesüljenek.

Az imént felidézett kiterjesztés értelmében a \mathcal{H} kettéhasadó Killing-horizontot kiegészítő \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 Killing-horizontok geodetikus értelemben teljesek. Mivel a fejezet fő eredményének származtatása során a [83] és [33] munkákban alkalmazott megfontolásokat használjuk, továbbá mindkét munkában alapvető szerepet játszik egy (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordinátarendszer, ezért most kivonatossan rögzítjük a kérdéses koordinátarendszer alapelemeit.

A Gauss-féle fényszerű koordinátarendszer bevezetése során – ahogyan azt a 2.1.3. alfejezetben láttuk – elsődleges egy fényszerű hiperfelület kiválasztása. Erre a szerepre válasszuk most a \mathcal{H}_1 Killing-horizontot. Jelölje u a \mathcal{H}_1 Killing-horizont fényszerű generátorainak olyan szinkronizált affinparaméterezését, melyre $u = 0$ az \mathcal{S} felületen. Jelölje továbbá $k^a = (\partial/\partial u)^a$ a \mathcal{H}_1 Killing-horizont generátorainak jövőirányú, fényszerű érintővektorát. A választásunknak megfelelően $u > 0$ az \mathcal{N} Killing-horizontnak megfelelő részen, valamint ott a \mathfrak{K}^a Killing-vektormező és a k^a párhuzamosan elterjesztett vektormező között a

$$\mathfrak{K}^a = \kappa_o u k^a \quad (5.2.4)$$

kapcsolat áll fenn.

A 2.1.3. alfejezetben bemutatott eljárás alapelemeit követve tekinthetjük a \mathcal{H}_1 Killing-horizont egyparaméteres $\mathcal{S}_u = \{p \in \mathcal{H}_1 | u(p) = u \in \mathbb{R}\}$ szeléseit, melyek segítségével definiálható \mathcal{H}_1 -en a jövőirányú ℓ^a fényszerű vektormező és a hozzátartozó r szinkronizált affinparaméterezés, melyre $r = 0$ a \mathcal{H}_1 felületen, és amelyre $\ell^a = (\partial/\partial r)^a$ az \mathcal{O}^* környezetben. Tegyük fel, hogy (x^3, x^4) lokális koordináták az \mathcal{S} felület valamely $\tilde{\mathcal{S}}$ részhalmazán. Ekkor \mathcal{O}^* -nak létezik olyan $\tilde{\mathcal{O}}$ részhalmaza, ahol a kívánt tulajdonságú (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordináták jól definiáltak. A \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 Killing-horizontok $\tilde{\mathcal{O}}$ -ba eső részét ezentúl $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -mal és $\tilde{\mathcal{H}}_2$ -mal jelöljük.

5.2.1. A Newman-Penrose formalizmus

Ahogy azt korábban már jeleztük, a fejezet legfontosabb eredményének származtatása során a Newman-Penrose formalizmus [83] és Friedrich [33] (lásd a [34, 35] referenciákat is) karakterisztikus kezdőérték problémára vonatkozó eredményeit alkalmazzuk. Ezen eredmények felidézését lényegesen leegyszerűsíti az imént bevezetett Gauss-féle fényszerű koordinátarendszer alkalmazása.

Az \mathcal{O}^* elemi téridőkörnyezet $\tilde{\mathcal{O}}$ részhalmazán – ahol az (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordináták adottak – a (2.1.2) vonalelem segítségével felírt metrika kontravariáns alakját a

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & g^{rr} & g^{rB} \\ 0 & g^{Ar} & g^{AB} \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

formában adhatjuk meg.² Ezek után a [83] munkában használt eljárást követve, az $\tilde{\mathcal{O}}$ halmazon bevezetjük az U, X^A valós-, és az ω, ξ^A komplex-értékű függvényeket úgy, hogy a

$$g^{rr} = 2(U - \omega\bar{\omega}), \quad g^{rA} = X^A - (\bar{\omega}\xi^A + \omega\bar{\xi}^A), \quad g^{AB} = -(\xi^A\bar{\xi}^B + \bar{\xi}^A\xi^B) \quad (5.2.6)$$

relációk teljesüljenek. Ekkor a

$$l^\mu = \delta^\mu_r, \quad n^\mu = \delta^\mu_u + U\delta^\mu_r + X^A\delta^\mu_A, \quad m^\mu = \omega\delta^\mu_r + \xi^A\delta^\mu_A \quad (5.2.7)$$

definíciókat használva $\tilde{\mathcal{O}}$ felett az $\{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ komplex fényszerű tetrádot kapjuk.³ Azzal összhangban, hogy $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on $n^a = k^a$, és az utóbbi érinti a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felületet, valamint

²Érdemes észben tartani, hogy most mind k^a , mind pedig ℓ^a jövőirányú, valamint azt, hogy a metrika szignatúrája $(+, -, -, -)$.

³Az $\{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ komplex fényszerű tetrád elemei fényszerű vektorok, melyek nem azonosan zérus belsőszorzatai a $\ell^a n_a = 1$ és $m^a \bar{m}_a = -1$ relációkkal adhatók meg.

megköveteljük, hogy m^a és \bar{m}^a mindenütt érintse az $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felület $\tilde{\mathcal{S}}_u$ szeléseit, feltesszük, hogy az U , X^A és az ω függvények eltűnnek a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on. A továbbiakban gyakran fogjuk használni a tetradvektorokat mint irányok menti deriváltakat, melyeket $\tilde{\mathcal{O}}$ felett a

$$D = \partial/\partial r, \quad \Delta = \partial/\partial u + U \cdot \partial/\partial r + X^A \cdot \partial/\partial x^A, \quad \delta = \omega \cdot \partial/\partial r + \xi^A \cdot \partial/\partial x^A \quad (5.2.8)$$

összefüggésekkel definiálhatunk.

A Newman-Penrose-egyenletek egyszerűsítése érdekében a megmaradt mértékszabadság egy részét az alábbiak szerint célszerű rögzíteni [83]. Először is tegyük fel, hogy az $\tilde{\mathcal{O}}$ környezetben a $\{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ tetrad elemei párhuzamosan elterjesztettek az $\ell^a = (\partial/\partial r)^a$ érintővektorú fényszerű geodetikusok mentén. Ebből azonnal adódik, hogy $\tilde{\mathcal{O}}$ -ban a $\kappa, \varepsilon, \pi, \rho, \tau$ spin-együtthatókra mindenütt a $\kappa = \pi = \varepsilon = 0$, $\rho = \bar{\rho}$, valamint a $\tau = \bar{\alpha} + \beta$ relációk teljesednek. Ezen felül, mivel a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ fényszerű generátorai mentén n^a eleget tesz a $n^e \nabla_e n^a = 0$ egyenletnek, a ν spin-koefficiens zérus értéket vesz fel $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on. Amiatt, hogy u affinparaméter $\tilde{\mathcal{H}}_1$ fényszerű generátorai mentén, az is igaz (lásd például [95] (4.14)-es egyenletét), hogy $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on $\gamma + \bar{\gamma} = 0$. Végül egy $m^a \rightarrow e^{i\phi} m^a$ alakú forgatás segítségével, ahol $\phi : \tilde{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ egy alkalmasan választott valós függvény, az is elérhető, hogy maga a γ spin-koefficiens is zérus értéket vegyen fel a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felületen.

5.3. Deformált vákuum feketelyukak

Érdemes megemlíteni, hogy a fenti mértékválasztás teljes egészében megfelel annak, amit Friedrich is használt [33]-ban, így az általa bizonyított tételek azonnal alkalmazhatók az imént rögzített esetben is. Először a tiszta vákuum esetet zérus kozmológiai állandó mellett tekintjük. Később – az 5.4. alfejezetben – megmutatjuk, hogy a kapott eredmények általánosíthatók a forrásmentes elektromágneses esetre akkor is, ha a kozmológiai állandó értéke nem feltétlenül nulla.

5.3.1. A karakterisztikus kezdőértékprobléma megfogalmazása

Először is idézzük fel, hogy a vákuum Newman-Penrose-egyenletek⁴, azaz az (NP.6.10a)-(NP.6.10h), (NP.6.11a)-(NP.6.11r) és (NP.6.12a)-(NP.6.12h) egyenletek, amikor $\tilde{\mathcal{O}}$ felett

⁴Azért, hogy elkerüljük Newman és Penrose alapvető [83] munkájára történő folyamatosan hivatkozást, a továbbiakban a Newman-Penrose-egyenletekre az (NP.6.szám és kis latin betű) kombinációban fogunk hivatkozni, ahol a (6.szám és kis latin betű) jelölés az eredeti [83] munkában alkalmazott számozásra utal. Ezen egyenletek általános alakját az olvasó megtalálhatja a jelen dolgozat appendixében is.

az (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordinátákra építve úgy tekintünk rájuk, mint a

$$\mathbb{V}^T = (\xi^A, \omega, X^A, U; \rho, \sigma, \tau, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) \quad (5.3.1)$$

vektorváltozóra felírt elsőrendű, parciális differenciálegyenletekre, akkor azok túlhatározottak egyszerűen azért, mert több egyenletünk van, mint változónk. Azonban, ahogyan azt Friedrich megmutatta [33], amikor néhány Newman-Penrose-egyenletet elhagyunk, és ugyanakkor néhány másik egyenlet alkalmas lineárkombinációját vesszük, akkor a következő „redukált” vákuum egyenletrendszerhez jutunk:⁵

$$D \xi^A = \rho \xi^A + \sigma \bar{\xi}^A \quad (5.3.2)$$

$$D \omega = \rho \omega + \sigma \bar{\omega} - \tau \quad (5.3.3)$$

$$D X^A = \tau \bar{\xi}^A + \bar{\tau} \xi^A \quad (5.3.4)$$

$$D U = \tau \bar{\omega} + \bar{\tau} \omega - (\gamma + \bar{\gamma}) \quad (5.3.5)$$

$$D \rho = \rho^2 + \sigma \bar{\sigma} \quad (5.3.6)$$

$$D \sigma = 2\rho\sigma + \Psi_0 \quad (5.3.7)$$

$$D \tau = \tau\rho + \bar{\tau}\sigma + \Psi_1 \quad (5.3.8)$$

$$D \alpha = \rho\alpha + \beta\bar{\sigma} \quad (5.3.9)$$

$$D \beta = \alpha\sigma + \rho\beta + \Psi_1 \quad (5.3.10)$$

$$D \gamma = \tau\alpha + \bar{\tau}\beta + \Psi_2 \quad (5.3.11)$$

$$D \lambda = \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu \quad (5.3.12)$$

$$D \mu = \rho\mu + \sigma\lambda + \Psi_2 \quad (5.3.13)$$

$$D \nu = \bar{\tau}\mu + \tau\lambda + \Psi_3 \quad (5.3.14)$$

$$\Delta \Psi_0 - \delta \Psi_1 = (4\gamma - \mu) \Psi_0 - 2(2\tau + \beta) \Psi_1 + 3\sigma \Psi_2 \quad (5.3.15)$$

$$\Delta \Psi_1 + D \Psi_1 - \delta \Psi_2 - \bar{\delta} \Psi_0 = (\nu - 4\alpha) \Psi_0 - 2(\mu - \gamma - 2\rho) \Psi_1 - 3\tau \Psi_2 + 2\sigma \Psi_3 \quad (5.3.16)$$

$$\Delta \Psi_2 + D \Psi_2 - \delta \Psi_3 - \bar{\delta} \Psi_1 = -\lambda \Psi_0 - 2(\alpha - \nu) \Psi_1 + 3(\rho - \mu) \Psi_2 - 2(\tau - \beta) \Psi_3 + \sigma \Psi_4 \quad (5.3.17)$$

$$\Delta \Psi_3 + D \Psi_3 - \delta \Psi_4 - \bar{\delta} \Psi_2 = -2\lambda \Psi_1 + 3\nu \Psi_2 + 2(\rho - \gamma - 2\mu) \Psi_3 + (4\beta - \tau) \Psi_4 \quad (5.3.18)$$

$$D \Psi_4 - \bar{\delta} \Psi_3 = -3\lambda \Psi_2 + 2\alpha \Psi_3 + \rho \Psi_4 \quad (5.3.19)$$

Ezek az egyenletek – amellet, hogy a \mathbb{V} vektor változóra egy jól meghatározott rendszert alkotnak – ugyanazzal a tartalommal bírnak, mint az eredeti Newman-Penrose-egyenletek. Ennek megfelelően Friedrich idevágó eredményét (lásd [33] 1. Tételét) az alábbiak szerint

⁵A Friedrich által használt formalizmus sokkal bonyolultabb, de ahogy azt a [99] munkában megmutattam, átültethető a Newman-Penrose-formalizmus jelölésrendszerére, és a redukált egyenletek valóban az (5.3.2)-(5.3.19) egyenletek segítségével adhatók meg.

fogalmazhatjuk meg.

5.3.1. Tétel. *Jelölje \mathbb{V}_0 a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ és $\tilde{\mathcal{H}}_2$, egymást metsző, fényszerű hiperfelületeken az ott „belsőnek számító” Newman-Penrose-egyenleteknek eleget tevő kezdőadatok egy rendszerét. Amikor \mathbb{V} a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ és $\tilde{\mathcal{H}}_2$ hiperfelületek $D[\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2]$ Cauchy-függőségi tartományában megoldása a redukált egyenleteknek, akkor \mathbb{V} a teljes Newman-Penrose-egyenleteknek is megoldása. Ezen felül a \mathbb{V} által meghatározott metrika, a torziómentes affinösszefüggés és a görbületi tenzor pontosan azok, mint amelyek felépíthetők a redukált egyenletek megoldásaként kapott spin-együtthetők és Weyl-spinor komponensek segítségével.*

Érdemes megjegyezni, hogy a feltétel azon része, miszerint \mathbb{V}_0 tegyen eleget az $\tilde{\mathcal{H}}_1$ és $\tilde{\mathcal{H}}_2$, egymást metsző, fényszerű hiperfelületeken az ott „belsőnek számító” Newman-Penrose-egyenleteknek, nem annyira erős, mint ahogy azt az első pillanatban gondolnánk. Tekintsük ugyanis a sima $\tilde{\mathcal{H}}_1$ és $\tilde{\mathcal{H}}_2$ fényszerű hiperfelületeket, melyek egymást egy két-dimenziós $\tilde{\mathcal{S}}$ felületben metszik. Ekkor a „belsőnek számító” Newman-Penrose-egyenletek olyanok, amelyek vagy $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on, vagy $\tilde{\mathcal{H}}_2$ -on, vagy pedig $\tilde{\mathcal{S}}$ -on értelmezettek. Ahogy azt Friedrich [33] 1. lemmájában megmutatta, a vákuum Einstein-egyenletek megoldása során mindig kiindulhatunk egy \mathbb{V}_0^{red} „redukált kezdőadatrendszerből” is, amely a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felületen a Ψ_4 Weyl-spinor komponensből, $\tilde{\mathcal{H}}_2$ -on a Ψ_0 Weyl-spinor komponensből, míg $\tilde{\mathcal{S}}$ -en a $\rho, \sigma, \tau, \mu, \lambda$ spin-együtthetők, továbbá azon ξ^A vektormezőből áll, melyből az $\tilde{\mathcal{S}}$ -on indukált negatív definit metrika a $g^{AB} = -(\xi^A \bar{\xi}^B + \bar{\xi}^A \xi^B)$ alakban építhető fel. Friedrich azt is megmutatta, hogy amikor adott egy \mathbb{V}_0^{red} redukált kezdőadatrendszer, az $\tilde{\mathcal{S}}$ -en értelmezett „belsőnek számító” Newman-Penrose-egyenletek algebrai módszerrel mindig megoldhatók \mathbb{V} komponenseire [33]. Mihelyt ismerjük \mathbb{V} komponenseinek $\tilde{\mathcal{S}}$ -en felvett értékét, a kívánt \mathbb{V}_0 kezdőadatrendszer mindig előállítható a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ és a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ hiperfelületek fényszerű geodetikus generátorai mentén felírt közös differenciálegyenlet-rendszerek – ezek a kérdéses „belsőnek számító” Newman-Penrose-egyenletek – megoldása révén.

Az így nyert \mathbb{V}_0 automatikusan eleget tesz a fent megfogalmazott 5.3.1. tétel feltételének. Azt az eljárást, ahogyan \mathbb{V}_0 -at a gyakorlatban meghatározhatjuk a kettéhasadó Killing-horizontot hordozó téridők esetében, az 5.3.2. alfejezetben hamarosan explicit módon bemutatjuk. A Friedrich által kidolgozott formalizmus deformált feketelyukak esetében vett alkalmazhatósága szempontjából fontos eredményt fogalmaz meg Friedrich következő lemmája is [33].

5.3.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy \mathbb{V} a Newman-Penrose-egyenletek megoldása. Jelölje \mathbb{V}_0 a \mathbb{V} megoldás $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kezdőfelületre való megszorítottját. Tegyük fel, hogy \mathbb{V}_0^{red} a \mathbb{V}_0 -ból a fentebb leírt eljárással kiválasztott redukált kezdőadatrendszer. Ekkor a \mathbb{V}_0^{red} redukált kezdőadatrendszerből a belső Newman-Penrose-egyenletek megoldása révén nyert kezdőadatok a $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ felületen éppen a \mathbb{V}_0 kezdőadatrendszert adják vissza.*

Amellett, hogy az (5.3.2)-(5.3.19) redukált vákuumegyenletek egy határozott rendszert alkotnak, az is megmutatható, hogy amikor az $\tilde{\mathcal{O}}$ felett értelmezett (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordinátákban írjuk fel őket, akkor az

$$\mathbb{A}^\mu \cdot \partial_\mu \mathbb{V} + \mathbb{B} = 0 \quad (5.3.20)$$

alakot öltik, ahol az \mathbb{A}^μ mátrixok, valamint a \mathbb{B} vektor a \mathbb{V} vektorváltozónak, továbbá annak $\bar{\mathbb{V}}$ komplex konjugáltjának sima függvényei. Ráadásul az is belátható, hogy az \mathbb{A}^μ mátrixok Hermite-félék, azaz $\bar{\mathbb{A}}^{\mu T} = \mathbb{A}^\mu$, továbbá az $\mathbb{A}^\mu (n_\mu + l_\mu)$ kombináció pozitív definit $\tilde{\mathcal{H}}_1$ egy elegendően kicsiny környezetében.

Az utóbbi állításokat legkönnyebben az (5.3.2)-(5.3.19) egyenletek szemrevételezése által ellenőrizhetjük [99]. Először is vegyük észre, hogy a $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$ deriváló operátorok együtthető mátrixai az alábbi 18×18 mátrixok alakjában írható fel

$$\mathbb{A}^D = \left(\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{1} & & & & & \mathbf{0} \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \mathbb{A}^\Delta = \left(\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (5.3.21)$$

$$\mathbb{A}^\delta = \left(\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{1} & & & & & \mathbf{0} \\ \hline & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \mathbb{A}^{\bar{\delta}} = \left(\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right), \quad (5.3.22)$$

ahol $\mathbf{1}$ a 13×13 -as egységmátrix, míg $\mathbf{0}$ mindig azonosan zérus elemekből álló alkalmas típusú mátrixokat jelöl. Figyelembe véve a

$$\mathbb{A}^\mu \cdot \partial_\mu = \mathbb{A}^D \cdot D + \mathbb{A}^\Delta \cdot \Delta + \mathbb{A}^\delta \cdot \delta + \mathbb{A}^{\bar{\delta}} \cdot \bar{\delta} \quad (5.3.23)$$

felbontást, valamint a (5.2.8) összefüggést – mely a $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$ differenciáloperátorokat az (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle koordinátákhoz tartozó parciális differenciáloperátorokkal kap-

csolja össze – azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{A}^u = \mathbb{A}^\Delta \quad (5.3.24)$$

$$\mathbb{A}^r = \mathbb{A}^D + U \cdot \mathbb{A}^\Delta + \omega \cdot \mathbb{A}^\delta + \bar{\omega} \cdot \mathbb{A}^{\bar{\delta}} \quad (5.3.25)$$

$$\mathbb{A}^A = X^A \cdot \mathbb{A}^\Delta + \xi^A \cdot \mathbb{A}^\delta + \bar{\xi}^A \cdot \mathbb{A}^{\bar{\delta}}. \quad (5.3.26)$$

Ezek után – az \mathbb{A}^D , \mathbb{A}^Δ , \mathbb{A}^δ és az $\mathbb{A}^{\bar{\delta}}$ mátrixok (5.3.21) és (5.3.22) által adott explicit alakjának figyelembe vételével – egyszerű annak belátása, hogy a \mathbb{A}^u , \mathbb{A}^r és \mathbb{A}^A mátrixok Hermite-félék, azaz

$$\overline{\mathbb{A}^{\mu T}} = \mathbb{A}^\mu. \quad (5.3.27)$$

Hasonlóan az is megmutatható, hogy az $\mathbb{A}^\mu(n_\mu + l_\mu)$ kombináció pozitív definit, legalábbis $\tilde{\mathcal{H}}_1$ elegendően szűk környezetében, hiszen

$$\mathbb{A}^\mu(n_\mu + l_\mu)|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} = (\mathbb{A}^u + \mathbb{A}^r)|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} = \mathbb{A}^D + \mathbb{A}^\Delta, \quad (5.3.28)$$

és így a $\det(\mathbb{A}^\mu(n_\mu + l_\mu))$ determináns értéke éppen 8 a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felületen.

A jelen alfejezetben bemutatott eredmények összegzéseként megállapíthatjuk, hogy az (5.3.2)-(5.3.19) redukált vákuumegyenletek egy kvázilineáris, szimmetrikus, hiperbolikus rendszert alkotnak, melyhez alkalmasan választott kezdőértékek esetén egyértelmű megoldások létezése garantált, következésképpen igazolja az alábbi állítás (lásd [33] 2. tételét) helytállóságát is.

5.3.2. Tétel. *A karakterisztikus kezdőértékprobléma keretein belül a redukált vákuumegyenletekhez egyértelműen létező megoldás egyben mindig a vákuum Einstein-egyenletek megoldását is adja.*

5.3.2. A teljes kezdőadatrendszer meghatározása

Az 5.3.1. lemma, valamint az 5.3.2. tétel értelmében bármely \mathbb{V}_0^{red} redukált kezdőadatrendszer – a kezdőfelület Cauchy-függőségi tartományában – teljes mértékben meghatározza a vákuum Einstein-egyenletek hozzá tartozó megoldásának összes tulajdonságát. Azt is felidéztük, hogy a \mathbb{V}_0^{red} redukált kezdőadat-rendszert a

$$\mathbb{V}_0^{red} = \{\rho, \sigma, \mu, \lambda, \tau; \xi^A\}|_{\tilde{\mathcal{Z}}} \cup \{\Psi_4\}|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \cup \{\Psi_0\}|_{\tilde{\mathcal{H}}_2} \quad (5.3.29)$$

alakban írhatjuk fel. Ennek megfelelően egy vákuum téridő előállításához elegendő $\tilde{\mathcal{S}}$ -on a $\rho, \sigma, \tau, \mu, \lambda$ spin-együtthatókat, továbbá a ξ^A vektormezőt – melynek segítségével az $\tilde{\mathcal{S}}$ -on indukált negatív definit metrika a $g^{AB} = -(\xi^A \bar{\xi}^B + \bar{\xi}^A \xi^B)$ alakban írható fel –,

valamint a Ψ_4 , illetve a Ψ_0 Weyl-spinor komponenseket a $\tilde{\mathcal{H}}_1$, illetve $\tilde{\mathcal{H}}_2$ Killing-horizonton megadnunk.

Visszatérve a fejezetben vizsgált alapproblémához, azaz a deformált feketelyukak vizsgálatához, érdemes megjegyezni, hogy ezek az objektumok semmiképpen sem a legáltalánosabb olyan konfigurációk, amelyekre az előző alfejezetekben felidézett eredmények alkalmazhatóak. Így a rájuk vonatkozó redukált kezdőadatrendszer is lényegesen egyszerűbb kell legyen, mint az általános esetben. Ennek belátásához először is vegyük figyelembe, hogy mivel $\tilde{\mathcal{H}}$ egy kettéhasadó Killing-horizont, az őt kifeszítő $\tilde{\mathcal{H}}_1$ és $\tilde{\mathcal{H}}_2$ Killing-horizontok szükségképpen expanzió- és nyírásmentesek. Ez azt jelenti (lásd például [95] 3.1 és a 6.1 megjegyzéseit), hogy minden olyan deformált feketelyuk esetében, amikor az anyag eleget tesz a domináns energiafeltételnek, a λ és a μ spin-együtthatók azonosan eltűnnek $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on, és hasonlóan σ és ρ azonosan zérus értéket vesznek fel a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ felületen. A [95] munkában azt is megmutattuk, hogy a horizonttal kompatibilis \mathfrak{K}^{*a} Killing-vektormező a Weyl- és Ricci-tenzor elfajult fényszerű sajátvektora a $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kettéhasadó horizonton, ami azt jelenti, hogy a Φ_{22} és Φ_{21} Ricci-spinor komponensek, valamint a Ψ_3 és Ψ_4 Weyl-spinor komponensek eltűnnek a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felületen, ehhez hasonlóan a Φ_{00} és Φ_{01} Ricci-spinor komponensek, valamint a Ψ_0 és Ψ_1 Weyl-spinor komponensek eltűnnek a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ felületen. Így azt kapjuk, hogy bármely deformált vákuum feketelyuk esetében a $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kezdőfelületen egyedül a ξ^A vektormező és a τ spin-együttható értéke választható szabadon, és azok is csak a $\tilde{\mathcal{S}}$ felületen, míg a redukált kezdőadatrendszer összes többi eleme azonosan zérus értéket vesz fel $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ megfelelő részalmazain.

A teljes kezdőadatrendszer neki megfelelő redukált kezdőadatrendszerből történő meghatározásának illusztrálása érdekében – leginkább azért, hogy érzékeltetni tudjam a [83, 33] munkákban kidolgozott matematikai formalizmus hatékonyságát – most részleteiben bemutatom azt, hogyan lehet a fenti megállapításaink és mértékrögzítéseink felhasználásával a $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kezdőfelületen kapott

$$\mathbb{V}_0^{red} = \{\rho = \sigma = \mu = \lambda = 0; \tau, \xi^A\}|_{\tilde{\mathcal{Z}}} \cup \{\Psi_4 = \nu = \gamma = 0\}|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \cup \{\Psi_0 = 0\}|_{\tilde{\mathcal{H}}_2} \quad (5.3.30)$$

redukált kezdőadatrendszerből a neki megfelelő \mathbb{V}_0 teljes kezdőadatrendszert előállítani.

Tekintsük először is az $\tilde{\mathcal{S}}$ felületen a belső egyenleteket. Vegyük észre, hogy az (NP.6.11k) és (NP.6.11m) egyenletek alapján Ψ_1 és Ψ_3 azonosan eltűnnek $\tilde{\mathcal{S}}$ -on. Ezek után (NP.6.10f), valamint az $\tilde{\mathcal{O}}$ halmazban érvényes $\tau = \bar{\alpha} + \beta$ mértékrögzítés folytán kapjuk, hogy

$$\delta\bar{\xi}^A - \bar{\delta}\xi^A = (2\bar{\beta} - \bar{\tau})\xi^A + (\tau - 2\beta)\bar{\xi}^A. \quad (5.3.31)$$

Az $\tilde{\mathcal{S}}$ felületen az (5.3.31) egyenletrendszer a ξ^A vektormező és a τ spin-együttható ismeretében algebrailag megoldható β -ra és $\bar{\beta}$ -ra, és így az $\alpha = \bar{\tau} - \bar{\beta}$ összefüggés alapján

α -ra is. Ezek után (NP.6.111)-et alkalmazva kapjuk a

$$\Psi_2 = -\delta\alpha + \bar{\delta}\beta + \alpha\bar{\alpha} - 2\alpha\beta + \beta\bar{\beta} \quad (5.3.32)$$

egyenlőséget, ami rögzíti Ψ_2 értékét az $\widetilde{\mathcal{S}}$ felületen.

Tekintsük most a $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ felületen a belső egyenleteket. Először is mivel $\Psi_0 \equiv 0$ $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ -on, a (NP.6.12a) és $\Psi_1|_{\widetilde{\mathcal{S}}} \equiv 0$ miatt azt kapjuk, hogy $\Psi_1 \equiv 0$ a $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ felületen. Hasonlóan, mivel $\rho|_{\widetilde{\mathcal{S}}} \equiv 0$ és $\sigma|_{\widetilde{\mathcal{S}}} \equiv 0$, az (NP.6.11a) és az (NP.6.11b) egyenletek miatt $\rho \equiv 0$ és $\sigma \equiv 0$ on $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ felületen. A ρ és σ spin-együtthatók, valamint a Ψ_1 Weyl-spinor komponens $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ -on történő eltűnése miatt az (NP.6.11c-d-e) egyenletek figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$D\alpha = D\beta = D\tau = 0 \quad (5.3.33)$$

$\widetilde{\mathcal{H}}_2$ -on. Hasonlóan, (NP.6.12b) miatt

$$D\Psi_2 = 0 \quad (5.3.34)$$

a $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ felületen. Az (NP.6.11g) egyenletek következtében az is belátható, hogy $\lambda \equiv 0$ $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ -on, hiszen λ azonosan zérus az $\widetilde{\mathcal{S}}$ felületen. Ezek után (NP.6.11h) és az (NP.6.11f) egyenletek figyelembevételével, valamint (5.3.34) és a μ és γ spin-együtthatók $\widetilde{\mathcal{S}}$ felületen való eltűnéséből következik, hogy a $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ felületen

$$\mu = r \cdot \Psi_2, \quad (5.3.35)$$

továbbá

$$\gamma = r \cdot (\tau\alpha + \bar{\tau}\beta + \Psi_2). \quad (5.3.36)$$

Egy, a fentivel teljesen analóg érveléssel – valamint a ν és γ spin-együtthatók $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ -on való eltűnésének figyelembevételével – a $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ felületre vonatkozó belső egyenletek is megoldhatóak. Például mivel $\Psi_4 \equiv 0$ $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ -on, (NP.6.12h) és $\Psi_3|_{\widetilde{\mathcal{S}}} \equiv 0$ folytán kapjuk, hogy $\Psi_3 \equiv 0$ on $\widetilde{\mathcal{H}}_1$. Hasonlóan, mivel $\mu|_{\widetilde{\mathcal{S}}} \equiv 0$ és $\lambda|_{\widetilde{\mathcal{S}}} \equiv 0$, (NP.6.11n) és (NP.6.11j) alapján azt kapjuk, hogy $\mu \equiv 0$ és $\lambda \equiv 0$ $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ -on. A μ , λ spin-együtthatók és a Ψ_3 Weyl-spinor komponens eltűnése $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ -on az (NP.6.11r) és az (NP.6.11o) egyenletekkel együtt azt adja, hogy

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\tau = 0 \quad (5.3.37)$$

$\widetilde{\mathcal{H}}_1$ -on. Az utóbbi relációk, az (NP.6.11p) egyenlet, valamint σ -nak az $\widetilde{\mathcal{S}}$ halmazon való eltűnéséből következik, hogy $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ -on

$$\sigma = u \cdot (\delta\tau - 2\beta\tau). \quad (5.3.38)$$

Hasonlóan, (NP.6.12g) alapján $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on

$$\Delta\Psi_2 = 0. \quad (5.3.39)$$

Az egyedüli, eddig meghatározatlan ρ spin-együtthatót az (NP.6.11q) egyenlet, valamint (5.3.39) és ρ -nak az $\tilde{\mathcal{S}}$ felületen való eltűnése miatt a

$$\rho = u \cdot (\bar{\delta}\tau - 2\alpha\tau - \Psi_2) \quad (5.3.40)$$

alakban adhatjuk meg $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on.

Annak érdekében, hogy egy teljes \mathbb{V}_0 kezdőadatrendszerhez jussunk a $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ felületen, a fentiek mellett meg kell még adnunk a Weyl-spinor komponenseket az $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kezdőfelületen, valamint a ν spin-együttható értékét $\tilde{\mathcal{H}}_2$ -on. Például (NP.6.12f) alapján azt kapjuk, hogy $\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 = -3\tau\Psi_2$ $\tilde{\mathcal{H}}_1$ -on, amiből $\Psi_1|_{\tilde{\mathcal{S}}} = 0$ és τ, Ψ_2 u -függetlenségének figyelembevételével

$$\Psi_1 = u \cdot (\delta\Psi_2 - 3\tau\Psi_2) \quad (5.3.41)$$

adódik a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felületen. Egy teljesen analóg érvelés folytán, (NP.6.12e) és a fentebb származtatott relációk alapján, azt kapjuk, hogy

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}u^2 (\delta^2\Psi_2 - (7\tau + 2\beta) \cdot \delta\Psi_2 + 12\tau^2\Psi_2) \quad (5.3.42)$$

teljesül a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ felületen.

Egy, az imént használt érveléssel teljesen párhuzamos gondolatmenettel, az (NP.6.12c) és az (NP.6.12d) egyenleteket felhasználva, az is megmutatható, hogy

$$\Psi_3 = r \cdot \bar{\delta}\Psi_2 \quad (5.3.43)$$

és

$$\Psi_4 = \frac{1}{2}r^2 (\bar{\delta}^2\Psi_2 + 2\alpha \cdot \bar{\delta}\Psi_2) \quad (5.3.44)$$

teljesül a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ felületen. Végül az (NP.6.11i), (5.3.35) és a (5.3.43) egyenletek alapján, valamint ν $\tilde{\mathcal{S}}$ -on való eltűnése miatt $\tilde{\mathcal{H}}_2$ -on azt kapjuk, hogy

$$\nu = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\bar{\delta}\Psi_2 + \bar{\tau}\Psi_2). \quad (5.3.45)$$

A jobb áttekinthetőség kedvéért érdemes a $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kezdőfelületen a kapott relációkat összegyűjteni, amit az 5.1. Táblázatban meg is tettünk. Az ebben megjelenített összefüggések egyszerűsítése végett célszerű a Newman és Penrose által bevezetett $\bar{\delta}$ – „*edth*” –

operátort használni [84]. Mivel Ψ_2 egy $\{0, 0\}$ -típusú skalár, $\delta\Psi_2$ -t a

$$\delta\Psi_2 = \bar{\delta}\Psi_2 \quad (5.3.46)$$

alakban is felírhatjuk. Észrevéve azt, hogy $\delta\Psi_2$ $\{p, q\}$ -típusa $\{1, -1\}$ – egyezésben azzal, hogy $\delta\Psi_2$ „*spin-súly*” $s = \frac{1}{2}(p-q) = 1$ és „*boost-súly*” $b = \frac{1}{2}(p+q) = 0$ – a [48] referencia (2.14)-es egyenlete, valamint a $\tau = \bar{\alpha} + \beta$ összefüggés alapján azt kapjuk, hogy

$$\bar{\delta}^2\Psi_2 = \delta^2\Psi_2 + (\tau - 2\beta) \cdot \delta\Psi_2. \quad (5.3.47)$$

A (5.3.46) és (5.3.47) relációk, valamint az analóg módon kapható

$$\bar{\delta}\Psi_2 = \bar{\delta}\Psi_2 \quad (5.3.48)$$

és

$$\bar{\delta}^2\Psi_2 = \bar{\delta}^2\Psi_2 - (\bar{\tau} - 2\alpha) \cdot \bar{\delta}\Psi_2 \quad (5.3.49)$$

összefüggések felhasználásával a $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kezdőfelületen a deformált vákuum feketelyukakra vonatkozó teljes kezdőadatrendszert az alábbi, 5.1. táblázatban adhatjuk meg.

$\tilde{\mathcal{H}}_1$	$\tilde{\mathcal{F}}$	$\tilde{\mathcal{H}}_2$
$\rho = u \cdot (\bar{\delta}\tau - 2\alpha\tau - \Psi_2)$	$\rho = 0$	$\rho = 0$
$\sigma = u \cdot (\delta\tau - 2\beta\tau)$	$\sigma = 0$	$\sigma = 0$
$\mu = 0$	$\mu = 0$	$\mu = r \cdot \Psi_2$
$\lambda = 0$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0$
$\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\tau = 0$	$\alpha, \beta : \tau = \bar{\alpha} + \beta$	$D\alpha = D\beta = D\tau = 0$
$\Delta\Psi_2 = 0$	$\xi^A, \tau \rightarrow \alpha, \beta, \Psi_2$	$D\Psi_2 = 0$
$\Psi_0 = \frac{1}{2}u^2 \cdot (\bar{\delta}^2\Psi_2 - 8\tau\bar{\delta}\Psi_2 + 12\tau^2\Psi_2)$	$\Psi_0 = 0$	$\Psi_0 = 0$
$\Psi_1 = u \cdot (\bar{\delta}\Psi_2 - 3\tau\Psi_2)$	$\Psi_1 = 0$	$\Psi_1 = 0$
$\Psi_3 = 0$	$\Psi_3 = 0$	$\Psi_3 = r \cdot \bar{\delta}\Psi_2$
$\Psi_4 = 0$	$\Psi_4 = 0$	$\Psi_4 = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\bar{\delta}^2\Psi_2 + \bar{\tau}\bar{\delta}\Psi_2)$
(gauge) $\nu = 0 \rightarrow$	$\nu = 0 \rightarrow$	$\nu = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\bar{\delta}\Psi_2 + \bar{\tau}\Psi_2)$
(gauge) $\gamma = 0 \rightarrow$	$\gamma = 0 \rightarrow$	$\gamma = r \cdot (\tau\alpha + \bar{\tau}\beta + \Psi_2)$

5.1. táblázat. A deformált vákuumfeketelyukakra vonatkozó \mathbb{V}_0 teljes kezdőadatrendszer.

Mielőtt a vákuumesetre vonatkozó eredményünket megfogalmaznánk, idézzük fel azt a különbséget, ami a $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ kezdőfelület $\mathcal{D}[\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2]$ Cauchy-függőségi tartományát érinti a sima, azaz C^∞ , illetve az analitikus, azaz C^ω választás mellett. Míg a sima

esetben $\mathcal{D}[\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2]$ a feketelyuk-téridő kiterjesztése során nyert \mathcal{O}^* alapsokaságnak a \mathcal{S} kettéhasadási felület $J^+[\mathcal{S}] \cap \mathcal{O}^*$ kauzális jövője és $J^-[\mathcal{S}] \cap \mathcal{O}^*$ kauzális múltja által megjelenített fekete- és fehérlyuk-tartományába esik, addig az analitikus esetben $\mathcal{D}[\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2]$ a $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ kezdőfelület egy teljes kétoldali nyílt környezetét adja [77, 103].

Összegezve az előző 5.3.1 - 5.3.2. alfejezetekben összegyűjtött ismereteket, valamint az analitikus és sima esetben a karakterisztikus kezdőértékprobléma megoldásainak létezésére és egyértelműségére vonatkozó eredményeket az alábbi tétel bizonyítását kapjuk.

5.3.3. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) egy deformált vákuum feketelyuk-téridő, melynek \mathcal{N} jövő eseményhorizontja nem-degenerált úgy, hogy mind (M, g_{ab}) , mind pedig \mathcal{N} sima, illetve analitikus. Ekkor a téridő g_{ab} metrikája a feketelyuk-tartományban, illetve \mathcal{N} valamely kétoldali környezetében mindenütt egyértelműen meghatározott, míhelyt az \mathcal{N} -et kifizítő Killing-pályák kétdimenziós terén az ott indukált metrikát meghatározó ξ^A vektormező, valamint az \mathcal{N} generátorai mentén állandó τ spin-együttható ismert.*

5.3.3. A görbület viselkedése \mathcal{N} generátorai mentén

Mielőtt az elektrovákuum deformálható feketelyukak tulajdonságainak leírásával foglalkoznánk, érdemes egy kicsit ismét szemügyre venni az 5.1. táblázat néhány sorát. Első pillantásra talán nem is olyan meglepő, mégis érdekes az, hogy míg a Ψ_0 és Ψ_1 Weyl-spinor komponensek a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ horizont generátorai mentén, addig a Ψ_3 és Ψ_4 Weyl-spinor komponensek a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ horizont generátorai mentén válnak aszimptotikusan végtelenné annak ellenére, hogy mind a négy komponens azonosan zérus az \mathcal{S} kettéhasadási felületen. E rövid alfejezet célja annak megmutatása, hogy a kettéhasadási horizont generátorai – a párhuzamosan elterjesztett bázisokra nézve – általában görbületi szingularitáson végződnek.

Könnyen ellenőrizhető, hogy abban az esetben, ha mind $\delta\Psi_2 = \tilde{\delta}\Psi_2$, mind pedig τ zérus az \mathcal{S} kettéhasadási felületen, a fent említett Weyl-spinor komponensek mindegyike azonosan zérus értéket vesz fel a $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ Killing-horizonton. Nem túl nehéz annak ellenőrzése sem, hogy ezek az erősen speciális feltételek azt jelentik, hogy az \mathcal{S} kettéhasadási felületen indukált metrika éppen a metrikus gömb metrikája, mely a $\tau = 0$ esetben egyedül a Schwarzschild-téridőre teljesül. Ebből adódik egy fontos és természetes kérdés, hogy vajon az összes többi deformált feketelyuk – ez a halmaz magát a Kerr-megoldást is tartalmazza – rendelkezik-e az imént jelzett görbületi szingularitással, és ha igen, akkor van-e olyan fizikailag releváns, mérhető mennyiség, amely szintén végtelenné válik, vagy a Weyl-spinor komponensek „felrobbanása” csak a bázisok nem megfelelő választását jelzi?

5.3.1. Állítás. *A Ψ_3 Weyl-spinor komponens pontosan akkor válik végtelenné a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ horizont fényszerű generátorai mentén, ha a görbületi tenzor párhuzamosan elterjesztett bázisokra vonatkozó valamely komponense nem marad korlátos a kérdéses generátorok mentén.*

Bizonyítás: A fenti állítást legkönnyebben a görbületi tenzor valamely komponensének a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ horizont generátorai mentén párhuzamosan elterjesztett bázisokban felvett értékét a Ψ_3 Weyl-spinor komponens értékével kifejezve ellenőrizhetjük. Először is jegyezzük meg, hogy az 5.2.1. alfejezetben alkalmazott mértékrögzítés folytán az $\{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ komplex, fényszerű tetrad elemei párhuzamosan elterjesztettek a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ horizont generátorai mentén. Így az m^a és \bar{m}^a tetradvektorok konstans együtthatós $X_{(3)}^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^a + \bar{m}^a)$ és $X_{(4)}^a = -\frac{i}{\sqrt{2}}(m^a - \bar{m}^a)$ lineárkombinációi segítségével definiált $X_{(A)}^a$, $A = 3, 4$ egységnormájú, valós, térszerű vektormezők szintén párhuzamosan elterjesztettek a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ horizont generátorai mentén, azaz az $\{\ell^a, n^a, X_{(A)}^a\}$ $A = 3, 4$, vektorrendszer egy párhuzamosan elterjesztett pszeudo-ortonormált bázist határoz meg a tekintett generátorok mentén.

Ezek után, a Ψ_3 Weyl-spinor komponensnek a C_{abcd} Weyl-tenzor segítségével kifejezett

$$\Psi_3 = -C_{abcd}n^a\ell^b n^c\bar{m}^d \quad (5.3.50)$$

definíciója alapján, azt kapjuk, hogy

$$C_{abcd}\ell^a n^b \ell^c X_{(3)}^d = -\sqrt{2} \cdot \Re(\Psi_3) \quad (5.3.51)$$

és

$$C_{abcd}\ell^a n^b \ell^c X_{(4)}^d = \sqrt{2} \cdot \Im(\Psi_3), \quad (5.3.52)$$

mely relációkból azonnal adódik, hogy a $C_{abcd}\ell^a n^b \ell^c X_{(3)}^d$ vagy a $C_{abcd}\ell^a n^b \ell^c X_{(4)}^d$ kontrakciók egyike biztosan végtelenné válik, hiszen a komplex Ψ_3 csak abban az esetben válhat végtelenné, ha a valós vagy képzetes része azzá válik. \square

Az imént tárgyalt és részleteiben a [99] dolgozatban tanulmányozott szingularitások létezésének lehetőségére sokkal korábban, már az [95] munkánkban felhívtuk a figyelmet (lásd [95] 6.2. megjegyzését). Érdeemes azt is kihangsúlyozni, hogy a párhuzamosan elterjesztett bázisokra nézve kialakuló görbületi szingularitás semmiféle geodetikus inkomplettséggel nem jár együtt. Az is meglepő, hogy míg a Ψ_1 és Ψ_3 Weyl-spinor komponensek – a megfelelő szinkronizált paraméterekben mérve – lineáris rendben, addig a Ψ_0 és Ψ_4 Weyl-spinor komponensek kvadratikus rendben válnak végtelenné a horizontok generátorai mentén, mely – a [67] munkában publikált eredményeink fényében – éppen a lehető leggyorsabb divergálási rend a tekintett maximális fényszerű geodetikusok mentén. Végül szeretnénk megjegyezni, hogy a generátorok mentén kialakuló görbületi szingularitás nem erős abban az értelemben, hogy nem „skalár görbületi szingularitás”, azaz a

Weyl-tenzorból képzett egyetlen görbületi skalár sem válik végtelenné. Csak bizonyos árapályerő-komponensek válnak egyre nagyobbá a horizont generátorai mentén előre, illetve visszafelé haladva.

5.4. Deformált elektrovákuum feketelyuk-téridők

Ebben a részben azokat a különbségeket vesszük sorra, amelyek akkor lépnek fel, amikor az anyagmentes esetről az elektrovákuum forrással rendelkező és nemnulla kozmológiai állandót is megengedő, deformált feketelyukak vizsgálatára térünk át. Először a redukált téregyenletek explicit alakját adjuk meg, melyek – a vákuumesetchez hasonlóan – a Newman-Penrose egyenletek [83] egy részhalmazából, illetve azok alkalmas lineár kombinációiból, valamint a Maxwell-egyenletek egy alkalmas részhalmazából állnak.

Érdemes felidézni, hogy a tekintett elektrovákuum esetben, a Newman-Penrose-formalizmus keretein belül, az F_{ab} elektromágneses térerősségtenzort a

$$\phi_0 = F_{ab}\ell^a m^b \quad (5.4.1)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} F_{ab} (\ell^a n^b + \bar{m}^a m^b) \quad (5.4.2)$$

$$\phi_2 = F_{ab}\bar{m}^a n^b \quad (5.4.3)$$

kontrakciók segítségével ábrázolhatjuk, míg az (5.2.3) kifejezéssel adott energiainpulzus-tenzort az (NP.4.3b) egyenletek által definiált Φ_{ij} Ricci-spinor komponensek – ahol az i, j indexek a 0, 1, 2 értékeket vehetik fel – segítségével fejezhetjük ki, mely a jelen esetben az egyszerű

$$\Phi_{ij} = 2\phi_i\bar{\phi}_j \quad (5.4.4)$$

alakot ölti [83].

Ezen változókat használva az elektrovákuumra és nemnulla, $\tilde{\Lambda} = -6\Lambda$ kozmológiai állandóra vonatkozó redukált Einstein-egyenleteket a

$$D\xi^A = \rho\xi^A + \sigma\bar{\xi}^A \quad (5.4.5)$$

$$D\omega = \rho\omega + \sigma\bar{\omega} - \tau \quad (5.4.6)$$

$$DX^A = \tau\bar{\xi}^A + \bar{\tau}\xi^A \quad (5.4.7)$$

$$DU = \tau\bar{\omega} + \bar{\tau}\omega - (\gamma + \bar{\gamma}) \quad (5.4.8)$$

$$D\rho = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi_{00} \quad (5.4.9)$$

$$D\sigma = 2\rho\sigma + \Psi_0 \quad (5.4.10)$$

$$D\tau = \tau\rho + \bar{\tau}\sigma + \Psi_1 + \Phi_{01} \quad (5.4.11)$$

$$D\alpha = \rho\alpha + \beta\bar{\sigma} + \Phi_{10} \quad (5.4.12)$$

$$D\beta = \alpha\sigma + \rho\beta + \Psi_1 \quad (5.4.13)$$

$$D\gamma = \tau\alpha + \bar{\tau}\beta + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11} \quad (5.4.14)$$

$$D\lambda = \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \Phi_{20} \quad (5.4.15)$$

$$D\mu = \rho\mu + \sigma\lambda + \Psi_2 + 2\Lambda \quad (5.4.16)$$

$$D\nu = \bar{\tau}\mu + \tau\lambda + \Psi_3 + \Phi_{21} \quad (5.4.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_0 - \delta(\Psi_1 + \Phi_{01}) + D\Phi_{02} &= (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 \\ &\quad - \bar{\lambda}\Phi_{00} - 2\beta\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{11} + \rho\Phi_{02} \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_1 - \Phi_{01}) + D(\Psi_1 - \Phi_{01}) - \delta(\Psi_2 + 2\Lambda) + \delta\Phi_{00} - \bar{\delta}\Psi_0 + \bar{\delta}\Phi_{02} &= \\ + (\nu - 4\alpha)\Psi_0 + 2(\gamma + 2\rho - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 \\ + (2\tau - \bar{\nu})\Phi_{00} + 2(\bar{\mu} - \gamma - \rho)\Phi_{01} - 2\sigma\Phi_{10} + 2\tau\Phi_{11} \\ + (3\alpha - \bar{\beta})\Phi_{02} - 2\rho\Phi_{12} \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_2 + 2\Lambda) + D(\Psi_2 + 2\Lambda) - \delta(\Psi_3 + \Phi_{21}) - \bar{\delta}(\Psi_1 + \Phi_{01}) + \Delta\Phi_{00} + D\Phi_{22} &= \\ - \lambda\Psi_0 + 2(\nu - \alpha)\Psi_1 + 3(\rho - \mu)\Psi_2 - 2\bar{\alpha}\Psi_3 + \sigma\Psi_4 \\ + (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\Phi_{00} - 2(\alpha + \bar{\tau})\Phi_{01} - 2\tau\Phi_{10} + 2(\rho - \mu)\Phi_{11} \\ - \bar{\lambda}\Phi_{20} + \bar{\sigma}\Phi_{02} + 2\beta\Phi_{21} + \rho\Phi_{22} \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_3 - \Phi_{21}) + D(\Psi_3 - \Phi_{21}) - \delta\Psi_4 - \bar{\delta}(\Psi_2 + 2\Lambda) + \delta\Phi_{20} + \bar{\delta}\Phi_{22} &= \\ - 2\lambda\Psi_1 + 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu - \rho)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4 \\ + 2\mu\Phi_{10} - (2\beta - 2\bar{\alpha} + \nu)\Phi_{20} - 2\nu\Phi_{11} + 2\lambda\Phi_{12} \\ + 2(\gamma + \bar{\mu} - \rho)\Phi_{21} - \bar{\tau}\Phi_{22} \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

$$\begin{aligned} D\Psi_4 - \bar{\delta}(\Psi_3 + \Phi_{21}) + \Delta\Phi_{20} &= -3\lambda\Psi_2 + 2\alpha\Psi_3 + \rho\Psi_4 \\ + 2\nu\Phi_{10} - 2\lambda\Phi_{11} - (2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\Phi_{20} - 2(\bar{\tau} - \alpha)\Phi_{21} + \bar{\sigma}\Phi_{22} \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

alakban írhatjuk fel. Ezeket az egyenleteket ki kell egészítenünk a redukált Maxwell-egyenletekkel, melyek a

$$\Delta\phi_0 - \delta\phi_1 = (2\gamma - \mu)\phi_0 - 2\tau\phi_1 + \sigma\phi_2 \quad (5.4.23)$$

$$\Delta\phi_1 + D\phi_1 - \delta\phi_2 - \bar{\delta}\phi_0 = (\nu - 2\alpha)\phi_0 + 2(\rho - \mu)\phi_1 - (\tau - 2\beta)\phi_2 \quad (5.4.24)$$

$$D\phi_2 - \bar{\delta}\phi_1 = -\lambda\phi_0 + \rho\phi_2 \quad (5.4.25)$$

formában adhatók meg.

Az előző 5.3.1. alfejezetben alkalmazott érveléssel teljesen analóg gondolatmenetet fel-

használva megmutatható, hogy az (5.4.5) - (5.4.25) egyenletek egy jól meghatározott rendszert alkotnak a 21-dimenziós

$$\mathbb{V}_{EM}^T = (\xi^A, \omega, X^A, U; \rho, \sigma, \tau, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4; \phi_0, \phi_1, \phi_2) \quad (5.4.26)$$

vektorváltozóra. Hasonlóan az is megmutatható, hogy ezek az egyenletek egyenértékűek a teljes csatolt Newman-Penrose- és Maxwell-egyenletekkel.⁶ Ezen felül az is belátható, hogy amikor rájuk az (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordinátákban felírt parciális differenciálegyenletekként tekintünk, akkor az (5.4.5) - (5.4.25) egyenletek egy kvázilineáris, szimmetrikus, hiperbolikus rendszert alkotnak, mely rendszer felírható a

$$(\mathbb{A}_{EM})^\mu \cdot \partial_\mu \mathbb{V}_{EM} + \mathbb{B}_{EM} = 0 \quad (5.4.27)$$

alakban, ahol az $(\mathbb{A}_{EM})^\mu$ mátrixok, valamint a \mathbb{B}_{EM} vektor a \mathbb{V}_{EM} és a $\bar{\mathbb{V}}_{EM}$ változók sima függvényei, továbbá a $(\mathbb{A}_{EM})^\mu$ mátrixok Hermite-félék és a $(\mathbb{A}_{EM})^\mu(n_\mu + l_\mu)$ kifejezés pozitív definit.

Az is megmutatható, hogy egy általános elektrovákuum-rendszer esetén a redukált kezdőadatrendszer a vákuum konfigurációkat jellemző változók mellett a $\tilde{\Lambda} = -6\Lambda$ kozmológiai állandót, a $\tilde{\mathcal{H}}_1$ horizonton a ϕ_2 Maxwell-spinor komponenst, a $\tilde{\mathcal{H}}_2$ horizonton a ϕ_0 Maxwell-spinor komponenst, és a \mathcal{S} kettéhasadási felületen a ϕ_1 Maxwell-spinor komponenst foglalja magába, azaz

$$(\mathbb{V}_{EM})_0^{red} = \{\rho, \sigma, \mu, \lambda, \tau; \xi^A; \phi_1\}|_{\tilde{\mathcal{S}}} \cup \{\Psi_4; \phi_2\}|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \cup \{\Psi_0; \phi_0\}|_{\tilde{\mathcal{H}}_2} \cup \{\Lambda \in \mathbb{R}\}. \quad (5.4.28)$$

A vákuum esetben ismertett érvelés értelemszerű módosításával az is megmutatható, hogy az 5.2.1. alfejezetben származtatott eredmények mindegyike általánosítható a vizsgált elektrovákuum esetre és – a fenti észrevételek összegzéseként – az alábbi állítás bizonyítható.

5.4.1. Tétel. *A karakterisztikus kezdőértékprobléma keretein belül a $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ kezdőfelületen adott tetszőleges $(\mathbb{V}_{EM})_0^{red}$ redukált kezdőadatrendszerhez mindig egyértelműen található – a $\mathcal{D}[\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2]$ Cauchy-függőségi tartományban – az elektrovákuum Einstein-Maxwell-egyenletek egy \mathbb{V}_{EM} megoldása.*

A $(\mathbb{V}_{EM})_0$ teljes kezdőadatrendszer meghatározása a $\tilde{\mathcal{H}}_1 \cup \tilde{\mathcal{H}}_2$ kezdőfelületen a vákuum esetben, a 5.3.2. alfejezetben leírt lépések értelemszerű adaptálása révén valósítható meg. Az elektrovákuum esetre vonatkozó eredményeket az 5.2. táblázatban gyűjtöttük össze,

⁶A Newman-Penrose-egyenletek megtalálhatók az appendixben.

$\tilde{\mathcal{H}}_1$	$\tilde{\mathcal{F}}$	$\tilde{\mathcal{H}}_2$
$\rho = u \cdot (\bar{\delta}\tau - 2\alpha\tau - \Psi_2 - 2\Lambda)$	$\rho = 0$	$\rho = 0$
$\sigma = u \cdot (\delta\tau - 2\beta\tau)$	$\sigma = 0$	$\sigma = 0$
$\mu = 0$	$\mu = 0$	$\mu = r \cdot (\Psi_2 + 2\Lambda)$
$\lambda = 0$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0$
$\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\tau = 0$	$\alpha, \beta, \tau = \bar{\alpha} + \beta$	$D\alpha = D\beta = D\tau = 0$
$\Delta\Psi_2 = 0$	$\xi^A, \tau, \phi_1, \Lambda \rightarrow \alpha, \beta, \Psi_2$	$D\Psi_2 = 0$
$\phi_0 = u \cdot (\bar{\delta}\phi_1 - 2\tau\phi_1)$	$\phi_0 = 0$	$\phi_0 = 0$
$\Delta\phi_1 = 0$	ϕ_1	$D\phi_1 = 0$
$\phi_2 = 0$	$\phi_2 = 0$	$\phi_2 = r \cdot \bar{\delta}\phi_1$
$\Psi_0 = \frac{1}{2}u^2 \cdot \tilde{\Psi}_0$	$\Psi_0 = 0$	$\Psi_0 = 0$
$\Psi_1 = u \cdot \tilde{\Psi}_1$	$\Psi_1 = 0$	$\Psi_1 = 0$
$\Psi_3 = 0$	$\Psi_3 = 0$	$\Psi_3 = r \cdot \tilde{\Psi}_3$
$\Psi_4 = 0$	$\Psi_4 = 0$	$\Psi_4 = \frac{1}{2}r^2 \cdot \tilde{\Psi}_4$
(gauge) $\nu = 0 \rightarrow$	$\nu = 0 \rightarrow$	$\nu = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\bar{\delta}\Psi_2 + 2\bar{\delta}\phi_1 \cdot \bar{\phi}_1)$
(gauge) $\gamma = 0 \rightarrow$	$\gamma = 0 \rightarrow$	$\gamma = r \cdot \tilde{\gamma}$

5.2. táblázat. A deformált elektrovákuum feketelyukak $(\mathbb{V}_{EM})_0$ teljes kezdőadatrendszere.

ahol

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_0 &= \bar{\delta}^2\Psi_2 - 8\tau\bar{\delta}\Psi_2 + 12\tau^2\Psi_2 + 4(\bar{\delta}^2\phi_1 - [7\tau + 2\beta] \cdot \bar{\delta}\phi_1) \cdot \bar{\phi}_1 + 2\bar{\delta}\phi_1 \cdot \bar{\delta}\bar{\phi}_1 \\
\tilde{\Psi}_1 &= \bar{\delta}\Psi_2 - 3\tau\Psi_2 + 2\bar{\delta}\phi_1 \cdot \bar{\phi}_1 \\
\Psi_2 &= -\delta\alpha + \bar{\delta}\beta + \alpha\bar{\alpha} - 2\alpha\beta + \beta\bar{\beta} + \Lambda + 2\phi_1 \cdot \phi_1 \\
\tilde{\Psi}_3 &= \bar{\delta}\Psi_2 + 2\bar{\delta}\phi_1 \cdot \bar{\phi}_1 \\
\tilde{\Psi}_4 &= \bar{\delta}^2\Psi_2 + \bar{\tau}\bar{\delta}\Psi_2 + 4(\bar{\delta}^2\phi_1 + \bar{\tau}\bar{\delta}\phi_1) + 2\bar{\delta}\phi_1 \cdot \bar{\delta}\bar{\phi}_1 \\
\tilde{\gamma} &= \tau\alpha + \bar{\tau}\beta + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11}.
\end{aligned}$$

Ennek megfelelően a vákuum esetben bizonyított összes eredményünk – kisebb értelemeszerű módosítással – érvényben marad az elektrovákuum esetben is. Így például az 5.3.3. tétel megfelelőjeként az alábbi állítás bizonyítható.

5.4.2. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) egy deformált elektrovákuum feketelyuk-téridő, melynek \mathcal{N} jövő eseményhorizontja nem-degenerált úgy, hogy mind (M, g_{ab}) , mind pedig \mathcal{N} sima, illetve analitikus. Ekkor a téridő g_{ab} metrikája a feketelyuk-tartományban, illetve \mathcal{N} valamely kétoldali környezetében mindenütt egyértelműen meghatározott, míhelyt az \mathcal{N} -et kifizűtő Killing-pályák kétdimenziós terén indukált metrikát meghatározó ξ^A vektormező,*

valamint az \mathcal{N} generátorai mentén állandó τ spin-együttható és ϕ_1 elektromágneses potenciál ismert.

5.5. Záró megjegyzések és nyitott kérdések

A jelen fejezetben a deformált elektrovákuum feketelyuk-téridők általános tulajdonságait vizsgáltuk. Egy olyan új matematikai leírást vezettünk be, mely lehetővé teszi nemcsak a sztatikus, tengelyszimmetrikus, deformált vákuum feketelyukak tanulmányozását – ahogy azt a fejezet bevezetésében már említettük, lényegében ezekre szorítkozott az összes korábbi vizsgálat –, de a legáltalánosabb deformált elektrovákuum feketelyuk-téridők vizsgálatát is lehetővé teszi.

Mivel a deformált feketelyukak \mathcal{N} jövő eseményhorizontja is egy Killing-horizont, \mathcal{N} fényszerű generátorai expanzió- és nyírásmentesek. Ebben az értelemben a deformált feketelyukakra úgy is gondolhatunk, mint az Ashtekar és munkatársai által bevezetett és vizsgált [4, 5, 6, 7] „*izolált horizontokat*” admittáló téridőkre. Fontos azonban annak hangsúlyozása, hogy a deformált feketelyukak változatosságuk ellenére az izolált horizontokkal rendelkező téridőknek csak egy speciális osztályát képezik.

Mivel a fejezetben vizsgált téridők valójában feketelyukak, természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy a feketelyuk-termodinamika törvényei kiterjeszthetők-e a deformált feketelyukakra is. Ebben a vonatkozásban érdemes megjegyezni, hogy a sztatikus, tengelyszimmetrikus esetben – ahogy azt Geroch és Hartle a [49] munkában megmutatta – ez megtehető. Így valószínűleg nem tűnik az a feltételezés túlságosan ambiciózusnak, hogy a megfelelő vizsgálatok kivitelezhetőek (bár a jelen munka keretében erre nem tettünk kísérletet). A [12]-es munka eredményeire alapozottan feltehető, hogy az általánosítás megadható abban az esetben is, amikor a feketelyuk horizontja toroidális, vagy valamilyen magasabb genuszal rendelkező topológiával bír.

A feketelyuk-termodinamika törvényeinek a deformált feketelyukak esetére vett általánosíthatósága mellett szól az is, hogy minden ilyen feketelyuk tartalmaz lokális kauzális horizontot abban az értelemben, ahogyan ezt Jacobson és Parentani [63]-ben meghatározták. Emiatt azt várjuk, hogy egy megalapozott entrópiafogalom vezethető be a deformált feketelyukak esetében is. Ezen várakozásunkat erősíti Carlip azon javaslatának sikere is, miszerint a feketelyuk-entrópia meghatározható a horizontközeli konformis geometria aszimptotikus alakját ismerve [16, 17]. Mivel Carlip megközelítésében egyáltalán nem játszik szerepet a téridő globális szerkezete, a módszere bizonyosan alkalmazható a jelen fejezetben vizsgált, deformált feketelyukakra.

Figyelemre méltó, hogy a szokásos izolált, azaz aszimptotikusan sík vagy aszimptoti-

kusan anti-de-Sitter, stacionárius, elektrovákuum téridők is ott vannak a jelen fejezetben vizsgált deformált feketelyukak között. Azonban az utóbbi halmaz lényegesen nagyobb, hiszen a kérdéses feketelyuk-téridők aszimptotikus tulajdonságaira vonatkozóan semmiféle előzetes elvárással nem éltünk. A legfontosabb eredményünk értelmében egy deformált feketelyuk-téridőt – legalábbis az elektrovákuum esetben – teljes egészében meghatároz a kettéhasadási felületen indukált metrika, továbbá két komplex függvény, melyek egyike az egyik elektromágneses potenciál. Ebből az is következik, hogy az aszimptotikusan sík vagy aszimptotikusan anti-de-Sitter, stacionárius, elektrovákuum téridők is megadhatók ilyen típusú kezdőadatokkal, és a kérdéses téridőgeometria meghatározható a téregyenleteknek a horizonttól kifelé vett integrálása segítségével. Ebben az értelemben a feketelyuk-egyértelműségi tételek egy új típusú bizonyítására nyílnak lehetőségek. Éppen ezért fontos lenne azon kiválasztási elvek tisztázása, melyek kitüntetik az izolált feketelyuk-konfigurációkat a kettéhasadási felületen szabadon választható kezdőadatok terében. Az újfajta feketelyuk-egyértelműségi bizonyítás alkalmazásának, és különösen az eddig nem ismert, új feketelyuk megoldások megtalálásának a lehetősége a fejezetben bemutatott eredmények legfontosabb folyományának tekinthetők.

Tekintsük most egy pillanatra megint az általános deformált feketelyuk-téridő \mathcal{N} eseményhorizontjának egy $u = \text{állandó}$, Σ_u szelését. Ekkor a Σ_u szelés pontjaiból, a Σ_u szelésre merőlegesen, a $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ külső kommunikációs tartomány irányába indított, \mathcal{N} -et merőlegesen metsző fényszerű geodetikus kongruencia vagy mindenütt divergál, vagy Σ_u -nak vannak olyan részei, ahol éppen kontrahálódik. Az első esetben a Σ_u szelést konvexnek, míg a másodikban lokálisan konkávnak tekinthetjük. Amikor a szelés lokálisan konkáv, akkor az az elemi téridőkörnyezet, amelyet az \mathcal{N} eseményhorizontra merőlegesen, $-\ell^a$ érintővektorral indított fényszerű geodetikusok határoznak meg, nem nyúlhat ki az aszimptotikus régióba. Ezeket a múltirányú, fényszerű geodetikusokat mint „hajszálakat”, illetve ezek seregét mint haját tekintve azt is mondhatjuk, hogy a lokálisan konkáv szelésekkel rendelkező eseményhorizontú, deformált feketelyukak „kócos hajúak”. Ebben a képben gondolkodva a szokásos, izolált, aszimptotikusan sík vagy aszimptotikusan anti-de-Sitter, stacionárius feketelyuk-téridők – ezekre Wheeler nyomán úgy tekint a szakmai közvélemény, mint olyanokra, melyeknek nincs haja – hajasak, bár ezekben a speciális esetekben a haj tökéletesen elrendezett, azaz „jól fésült”.

Érdemes meggondolni, hogy az általános deformált feketelyukak azon halmaza, mely konvex szelésekkel rendelkezik, feltehetőleg sokkal tágabb, mint az izolált stacionárius feketelyukaké. Ebben a halmazban kell lenniük mindazon konfigurációknak, melyekre az \mathcal{N} jövő eseményhorizontot transzverzálisan metsző, múltirányú, fényszerű geodetikusok affin értelemben mind teljesek. A feketelyuk-egyértelműségi tételek alapján nyilvánvaló, hogy amennyiben a szelések topológiája a kétdimenziós gömb topológiájával egyezik meg, akkor az aszimptotikus tartománynak a szokásos izolált feketelyukakétól eltérőnek kell lennie,

vagy a szelések esetleg nem is gömbi topológiájúak. Az utóbbi esetben különféle aszimptotikus struktúrák valósulhatnak meg – ezek lehetőségét Newman és Unti vetették fel legelőször, majdnem öt évtizeddel ezelőtt (lásd a [81] munka végén található diszkussziót) –, mivel alapjában véve semmi nem zárja ki az $\mathcal{I} \sim \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ topológiájú aszimptotikával rendelkező téridők létezését. A nem gömbi aszimptotikával rendelkező téridők szimmetriáit Foster [30] már évekkel ezelőtt vizsgálta, míg Schmidt [108]-ben explicit toroidális szelésekkel rendelkező aszimptotikájú téridőket konstruált. Nyilvánvaló, hogy rengeteg érdekes kérdés fogalmazható és válaszolható meg csak az aszimptotikus struktúra vizsgálata kapcsán is.

Végül szeretnék ismételtten rámutatni, hogy a fejezet legfontosabb eredménye értelmében egy általános deformált elektrovákuum feketelyuk kettéhasadási felületére úgy is gondolhatunk, mint egy olyan kompakt adathordozóra, mely tárolja az elemi téridőkörnyezetben a teljes négydimenziós téridőgeometria, valamint az elektromágneses mező előképét, mely – mihelyt az adathordozó adott – a téregyenletek segítségével bontható ki. Ebben az értelemben a stacionárius, izolált feketelyukak kettéhasadási felületére úgy is gondolhatunk, mint egy hologramra, amelyben a teljes stacionárius feketelyuk-téridő összesűrítve ábrázolható.

6. fejezet

A tengelyszimmetria létezéséről

Ebben a fejezetben sima, stacionárius, elektrovákuum feketelyuk-téridőket tekintek. Felteszem, hogy a jövő eseményhorizont is sima, valamint nemdegenerált abban az vonatkozásban, hogy a fényszerű geodetikus generátorai affin értelemben múltirányban inkompletek. Hawking feketelyuk merevségi tételének általánosításaként megmutatom, hogy a sima esetben a horizont feketelyuk felőli oldalán létezik egy a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező, azaz a jövő eseményhorizont valójában egy Killing-horizont.

6.1. A probléma felvezetése

Ahogy azt már korábban is említettük, a feketelyuk-fizika egyik fontos eredménye a Hawking feketelyuk-merevségi tételeként emlegetett azon állítás, melynek értelmében – megfelelő feltételek teljesedése mellett – egy stacionárius elektrovákuum feketelyuk eseményhorizontja egy Killing-horizont, azaz a téridőn léteznie kell egy olyan – esetleg a stacionáriustól eltérő – Killing-vektormezőnek, mely merőleges az eseményhorizontra [54, 53]. A dolgozat bevezetésében azt is részletesen felidézttük, hogy Hawking ezen eredménye milyen fontos szerepet játszott Israel és Carter jól ismert feketelyuk-egyértelműségi tételeinek kidolgozása során. Mivel az analitikusság egy nagyon erős matematikai feltétel, fontos volt Hawking tételének ezen feltétel alkalmazásától mentes bizonyítását származtatni. A fejezet legfontosabb eredménye, a feketelyuk-merevségi tételnek az analitikus helyett a sima esetben történő bizonyítása. Az alkalmazott módszer természetes velejárójaként azt találjuk, hogy a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező létezése sima esetben csak a horizont feketelyuk-tartományba eső oldalán igazolható.

A soron következő alfejezetekben először megmutatjuk, hogy a stacionárius feketelyuk-téridőkben mindig található olyan diszkrét izometriacsoport, mely a horizont generátorait önmagukra képezi. Ezt követően igazoljuk, hogy az \mathcal{N} jövő eseményhorizont környe-

zetében bevezethető alkalmas Gauss-féle fényszerű koordinátákban kifejezve, az összes metrikus és térváltozó, valamint azok tetszőleges rendű, \mathcal{N} -re transzverzális iránymenti deriváltjai— \mathcal{N} generátorai mentén—függetlenek az u -koordinátától. Ebből az analitikus esetben azonnal következik, hogy a $(\partial/\partial u)^a$ vektormező lokálisan egy Killing-vektormező. Ezt követően, a geodetikus értelemben nem teljes Killing-horizontokat tartalmazó téridők lokális és globális kiterjesztése során használt [91, 92] eljárás továbbfejlesztett változatának segítségével, előállítunk egy olyan – a karakterisztikus kezdőértékprobléma alkalmazhatósága szempontjából nélkülözhetetlen – kezdőfelületet, melynek segítségével a Killing-vektormező létezése az analicitásra való hivatkozás nélkül is bizonyítható. Mindezek kiegészítéseként általánosan is megvizsgáljuk, hogy milyen elméletekben és kezdőérték-problémák esetén igaz az, hogy a kezdőadatok szimmetriáit a megoldások öröklik.

6.2. A vizsgált stacionárius feketelyuk-téridők

A stacionárius feketelyuk-téridők általános definícióját a 2.3. alfejezetben határoztuk meg. Ebben a fejezetben olyan sima, erősen kauzális, négydimenziós (M, g_{ab}) feketelyuk-téridőket tekintünk, amelyekben megadható egy olyan ϕ_t egyparaméteres izometriacsoport, melyet egy t^a Killing-vektormező generál. Ezen felül azt is megköveteljük, hogy amikor a téridőben valamilyen anyagmező található, akkor az azt ábrázoló tenzormező is legyen ϕ_t -invariáns. Egy (M, g_{ab}) stacionárius feketelyuk-téridő aszimptotikus tartománya mindig tartalmaz olyan sima, akauzális \mathcal{C} hiperfelületet, hogy annak valamely $\mathcal{C}^{stac} \subset \mathcal{C}$, a $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B(R^{stac})$ halmazzal diffeomorf részén a t^a Killing-vektormező szigorú értelemben időszerű. Ekkor a feketelyuk-téridők különféle részalmazainak meghatározása során alapvető szerepet játszó $M^{stac} \subset M$ stacionárius tartományt egyszerűen a \mathcal{C}^{stac} halmaz $\phi\{\mathcal{C}^{stac}\} = \cup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t[\mathcal{C}^{stac}]$ pályájaként határozzuk meg.

A korábbi fejezetekben megszokott módon feltesszük, hogy a téridőben található feketelyuk-, de nincs fehérlyuk-tartomány, azaz $\mathcal{B} = M \setminus I^-[M^{stac}]$ és $\mathcal{W} = M \setminus I^+[M^{stac}] = \emptyset$, amiből $M = I^+[M^{stac}]$ következik. Ekkor a külső kommunikációs tartományt és a jövő eseményhorizontot a $\mathcal{D} = I^-[M^{stac}]$ és az $\mathcal{N} = \partial I^-[M^{stac}]$ relációkkal határozzuk meg. Végül megköveteljük, hogy \mathcal{N} legyen sima, míg az \mathcal{N} -et generáló fényszerű geodetikusok teréről feltesszük, hogy az a kétdimenziós gömb topológiájával rendelkezik, azaz \mathcal{N} topológiáját az $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ szorzattal adhatjuk meg.

Érdemes megemlíteni, hogy az utóbbi mondatban felsorolt feltételek feleslegesek. Először is a következő alfejezetben található eredményeknek megfelelően \mathcal{N} szükségképpen az $\mathbb{R} \times \Sigma$ topológiával rendelkezik, ahol Σ egy kompakt halmaz. Ezek után a feketelyuk-topológiai tétel alapján (lásd a 7. fejezetet) \mathcal{N} minden összefüggő részalmazáról megmutatható, hogy az az $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ szorzattopológiával rendelkezik. Hasonlóan – ugyan ismét meg-

követeltük, hogy az \mathcal{N} hiperfelület legyen sima –, érdemes felidézni (lásd a 2.4.1. definíciót követő megjegyzést is), hogy amennyiben a stacionárius feketelyuk-téridő sima vagy analitikus, akkor az \mathcal{N} eseményhorizont is sima vagy analitikus hiperfelülete a vizsgált téridőnek [41, 26].

6.3. A Killing-pályák tere

Ebben a részben a Killing-pályák és a jövő eseményhorizont rövid jellemzése található.

6.3.1. Lemma. *Legyen (M, g_{ab}) a 6.2. alfejezetben meghatározott stacionárius feketelyuk-téridő. Ekkor bármely $q \in \mathcal{N}$ -re és tetszőleges $t \neq 0$ esetén $\phi_t(q) \neq q$, azaz t^a sehol nem tűnhet el az \mathcal{N} horizonton.*

Bizonyítás: Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy létezik olyan $q \in \mathcal{N}$ és $t \neq 0$, amelyre $\phi_t(q) = q$. Mivel $M = I^+[M^{stac}]$, léteznie kell olyan $p \in M^{stac}$ pontnak, amelyre $p \in I^-(q)$. Mivel tetszőleges n egész értékre $\phi_{nt}(q) = q$, így az is teljesül, hogy $\phi_{nt}(p) \in I^-(q)$ bármely n -re, amiből azt kapjuk, hogy $\phi\{p\} \subset I^-(q)$. Így a 2.3.1. lemma alapján $I^-(q) \supset M^{stac}$, és így $I^-(q) \supset I^-[M^{stac}] = \mathcal{D}$. Mivel $\mathcal{N} = \partial I^-[M^{stac}]$ a q pont szükségképpen az \mathcal{N} horizont valamely jövőirányban kiterjeszthetelen γ fényszerű geodetikus generátorához tartozik. Legyen most r a q pont jövőjében fekvő pont γ mentén, \mathcal{O} pedig legyen olyan nyílt környezete r -nek, mely nem tartalmazza q -t, végül $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$ legyen tetszőleges nyílt környezete r -nek. Mivel $r \in \mathcal{N} = \partial I^-[M_{asz}] = \partial \mathcal{D}$, a $\mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ metszet nem lehet üres. Így, mivel $I^-(q) \supset \mathcal{D}$, biztosan létezik olyan jövőirányú λ kauzális görbe, mely a $\mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ metszetből indul és q -ban végződik. Ezt a λ görbét a γ generátornak a q és r pontokat összekötő szakaszával kiegészítve egy olyan jövőirányú kauzális görbét kapunk, mely az r pont tetszőlegesen választott \mathcal{V} környezetéből indul, elhagyja azt, majd visszatér a \mathcal{V} környezetbe, így az erős kauzalitási feltétel sérül az r pontban. \square

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti lemma bizonyítása során sem \mathcal{N} topológiája, sem differenciálhatósági tulajdonságai nem játszottak szerepet.

6.3.2. Lemma. *Tetszőleges $p \in \mathcal{D}$ választás mellett az \mathcal{N} horizonton futó λ Killing-pálya pontosan egyszer metszi a $\mathcal{C} \equiv \partial I^+(p)$ – lokálisan Lipschitz – hiperfelületet.*

Bizonyítás: Mivel a λ Killing-pálya ϕ_t -invariáns, azaz $\phi\{\lambda\} = \lambda$ – a 2.3.1. lemma alapján – vagy $I^-\{\lambda\} \cap \mathcal{D} = \emptyset$, vagy pedig $I^-\{\lambda\} \supset \mathcal{D}$ teljesül. Az első eshetőség nem valósulhat meg, hiszen $M = I^+[M^{stac}] = I^+[\mathcal{D}]$, és így biztosan létezik olyan $q \in \lambda$ pont, amelyre $q \in I^+(p)$. A második esetben, azaz amikor $I^-\{\lambda\} \supset \mathcal{D}$ – az imént bizonyított lemma

értelmében $I^-(q)$ nem tartalmazhatja a \mathcal{D} külső kommunikációs tartományt –, biztosan létezik olyan $t > 0$ valós szám, hogy $q \notin I^+(\phi_t(p))$. Ez azt jelenti, hogy $\phi_{-t}(q) \notin I^+(p)$, amiből az következik, hogy a λ Killing-pálya biztosan metszi a \mathcal{C} hiperfelületet.

Tegyük fel, hogy $r \in \lambda \cap \mathcal{C}$. Ha λ több pontban is metszhetné a \mathcal{C} hiperfelületet, akkor létezne olyan $t > 0$ valós szám, hogy az $r \in \lambda$ pont mellett a $\phi_t(r)$ pont is a \mathcal{C} hiperfelületen fekédné. Ebből azonban az következne, hogy az r pontnak egyidejűleg az $I^+(p)$ és $I^+(\phi_{-t}(p))$ jövőhalmazok határához kellene tartoznia, ami ellentmond a $p \in I^+(\phi_{-t}(p))$ relációnak. Így bármely, az \mathcal{N} horizonton futó λ Killing-pálya pontosan egyszer metszi a $\mathcal{C} = \partial I^+(p)$ hiperfelületet. \square

Az imént bizonyított lemma értelmében $\Sigma = \mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ az \mathcal{N} horizonton futó Killing-pályákra nézve egy globális szelést határoz meg.

6.3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy az \mathcal{N} jövő eseményhorizont sima, valamint $\Sigma = \mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ kompakt. Ekkor Σ az \mathcal{N} horizontot kifeszítő fényszerű geodetikusokra nézve is globális szelést határoz meg.*

Bizonyítás: Az \mathcal{N} simaságára vonatkozó feltételünk kizárja, hogy \mathcal{N} bármely γ fényszerű geodetikus generátorának lehessen múltbeli végpontja. (A jövő végpontok létezése automatikusan kizárt, hiszen \mathcal{N} az $I^-[M^{stac}]$ múlt-halmaz határa.) Annak belátása érdekében, hogy γ szükségképpen metszi Σ -át, válasszunk egy tetszőleges r pontot γ -án és legyen \bar{t} olyan valós szám, amelyre $\phi_{-\bar{t}}(r) \in \Sigma$. Ilyen szám biztosan létezik, hiszen Σ az \mathcal{N} horizont Killing-pályáira nézve globális szelést határoz meg.

Tegyük fel, hogy $\bar{t} > 0$. Amennyiben γ nem metszené Σ -át, akkor γ -nak az r pont múltjába eső szakasza egy olyan múltirányban kiterjeszthetetlen, fényszerű geodetikus görbét határozna meg, mely mindvégig az \mathcal{N} horizont Σ és $\phi_{\bar{t}}[\Sigma]$ halmazok által határolt, kompakt részhalmazában futna, és így sérülne az erős kauzalitási feltétel [53, 87]. Hasonló érvelés alkalmazható a $\bar{t} < 0$ esetben is, így bebizonyítottuk, hogy γ szükségképpen metszi Σ -át.

Végül tegyük fel, hogy γ legalább két pontban, a q és s pontokban, metszi Σ -át. Ekkor, a \mathcal{C} hiperfelület akronalitása folytán, a γ görbe q és s pontok közötti szakasza a \mathcal{C} hiperfelület valamely λ fényszerű generátorával kell, hogy egybeessen. Tekintsük ezen szakasz múltirányú maximális λ_{max} kiterjesztését. Ekkor \mathcal{N} simasága folytán, valamint amiatt, hogy \mathcal{C} egy jövőhalmaz határa, továbbá mivel $p \notin \mathcal{N}$, a λ_{max} görbének egyidejűleg az \mathcal{N} horizonton és a \mathcal{C} hiperfelületen kell futnia. Emiatt λ_{max} egy olyan, múltirányban kiterjeszthetetlen, fényszerű geodetikus, mely mindvégig a $\Sigma = \mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ kompakt halmazban fut, ami ellentmond az erős kauzalitási feltételnek. \square

Az imént bizonyított lemma értelmében \mathcal{N} topológiailag az $\mathbb{R} \times \Sigma$ alakban adható meg, azaz a 6.2. alfejezetben ebben a vonatkozásban megfogalmazott elvárásunk automatikusan teljesül.

Jelen alfejezet legfontosabb eredménye az alábbi állítás, melynek teljesülését Hawking például [53] 9.3.6. állításában feltette, de bizonyítását elsőként mi adtuk meg [37].

6.3.1. Állítás. *Legyen (M, g_{ab}) a 6.2. alfejezetben meghatározott stacionárius feketelyuk-téridő, mely eleget tesz a fényszerű energiafeltételnek,¹ azaz melyre $R_{ab}k^ak^b \geq 0$, bármely fényszerű k^a vektor esetén. Ekkor létezik olyan $t_0 \neq 0$ szám, hogy ϕ_{t_0} az \mathcal{N} eseményhorizont minden egyes fényszerű generátorát önmagára képezi le. Így az \mathcal{N} eseményhorizonton futó Killing-pályák, t_0 periódussal, periodikusan metszik \mathcal{N} fényszerű generátorait.*

Bizonyítás: A Hawking és Ellis könyvében [53] található 9.3.1. állítás értelmében \mathcal{N} fényszerű generátorai expanzió- és nyírásmentesek. Ennek az állításnak a helyességét hamarosan, a 6.4.1. tétel bizonyítása során, függetlenül is ellenőrizzük. A 6.4.1. tétel egy másik következményének értelmében $\mathcal{L}_k g'_{ab} = 0$ az \mathcal{N} horizonton, ahol g'_{ab} a g_{ab} téridőmetrika \mathcal{N} -re vett visszahúzottját jelöli, továbbá k^a az \mathcal{N} horizont generátorait érintő tetszőleges, sima, fényszerű vektormező \mathcal{N} -en. Mivel a horizonton a $g'_{ab}k^bk^a = 0$ reláció is teljesül, Geroch [46] dolgozatának appendixe alapján, g'_{ab} egy negatív definit \hat{g}_{AB} metrikt határoz meg az \mathcal{N} -et kifeszítő fényszerű geodetikusok \mathcal{S} -el jelölt terén. Feltételeink szerint \mathcal{S} egy sima sokaság, mely a kétdimenziós gömb, \mathbb{S}^2 , topológiájával rendelkezik.

Ekkor, bármely t értékre, ϕ_t az \mathcal{N} horizontot önmagára, míg a fényszerű generátorokat fényszerű generátorokra képezi. Ennek megfelelően ϕ_t egy olyan egyparaméteres $\hat{\phi}_t$ diffeomorfizmus-csoportot indukál \mathcal{S} -en, mely egyben a \hat{g}_{AB} metrikára nézve egy izometriatransformáció-csoport is. Jelölje \hat{t}^A az ennek megfelelő Killing-vektormezőt \mathcal{S} -en. Ha \hat{t}^A azonosan nulla az \mathcal{S} generátorok terén – ebben az esetben t^a fényszerű az \mathcal{N} horizonton –, a fenti állítás teljesül bármely $t_0 \neq 0$ értékre. Amikor \hat{t}^A nem azonosan nulla \mathcal{S} -en, mivel \mathcal{S} Euler-karakterisztikája nem nulla, léteznie kell olyan $p \in \mathcal{S}$ pontnak, hogy $\hat{t}^A(p) = 0$. Ekkor, a [117]-as munka 119-120 oldalain található érvelést alkalmazva, megmutatható, hogy létezik olyan $t_0 \neq 0$ valós szám, hogy a $\hat{\phi}_{t_0}$ leképezés éppen az \mathcal{S} halmaz önmagára vett azonos leképezésével esik egybe. Ekkor ϕ_{t_0} az \mathcal{N} horizont minden egyes fényszerű generátorát önmagára képezi le. \square

6.4. Az analitikus eset

Ebben a részben olyan eredményeinket mutatjuk be, amelyek sima esetben fontosak lesznek a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező létezésének bizonyítása során. Ugyan-

¹Ez a feltétel gyengébb, mint a domináns energiafeltétel.

akkor ezen eredmények automatikus következménye az, hogy az analitikus esetben biztosan létezik a kérdéses Killing-vektormező.

Először is jegyezzük meg, hogy a vizsgált (M, g_{ab}) stacionárius feketelyuk-téridőkben az \mathcal{N} jövő eseményhorizont egy környezete mindig lefedhető olyan elemi téridőkörnyezetekkel, amelyekben Gauss-féle fényszerű koordináták értelmezhetőek az alábbiak szerint.

Legyen Σ az \mathcal{N} jövő eseményhorizont egy sima, globális szelése. Vezessük be \mathcal{N} fényszerű generátorai mentén azt az u parametrizációt, melyre $u = 0$ a Σ szelés pontjaiban, továbbá $u = t$ a $\Sigma_t = \phi_t[\Sigma]$ szeléseken. Jelölje k^a az így választott parametrizációhoz tartozó, jövőirányú, fényszerű érintővektormezőt \mathcal{N} -en. Jelölje $\tilde{\Sigma}$ a Σ szelés azon részét, ahol (x^3, x^4) lokális koordináták vezethetők be, jelölje továbbá $\tilde{\mathcal{N}}$ a horizont azon részhalmazát, melyet a $\tilde{\Sigma}$ pontjain átmenő fényszerű geodetikusok feszítenek ki. Ekkor, a 2.1.3. alfejezetben leírt konstrukció lépéseit követve, $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ szekciókhoz tartozó $\tilde{\mathcal{O}}$ elemi téridőkörnyezetben olyan (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordináták értelmezhetőek, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

- (i) Az (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordináták olyanok, hogy az u koordináta a $(-\infty, \infty)$ intervallumot futja be, míg $-\mathcal{N}$ kompaktsága folytán – az r koordináta valamely $\epsilon > 0$ -ra a $(-\epsilon, \epsilon)$ értékeken fut végig úgy, hogy $\tilde{\mathcal{N}}$ az $r = 0$ egyenlettel adott, továbbá x^3 és x^4 koordináták a $\Sigma \cap \tilde{\mathcal{N}}$ lokális szelésen.
- (ii) A $k^a = (\partial/\partial u)^a$ vektormező az \mathcal{N} horizonton jövőirányú és fényszerű, míg ℓ^a az \mathcal{N} horizont $u = \text{állandó}$ kétdimenziós Σ_u szeléseire merőlegesen, az $\ell^a k_a = 1$ normálási feltételnek eleget tevő, ℓ^a érintővektorral indított fényszerű geodetikusok mentén értelmezett r affinparaméter által meghatározott $(\partial/\partial r)^a$ vektormezőt jelöli.
- (iii) Az $\tilde{\mathcal{O}}$ környezetben a metrikát a

$$ds^2 = 2(dr - r \cdot \alpha du - r \cdot \beta_A dx^A) du + \gamma_{AB} dx^A dx^B \quad (6.4.1)$$

alakban írhatjuk fel, ahol α , β_A és γ_{AB} az u, r, x^3, x^4 változók olyan sima függvényei, melyek periodikusak u -ban, P periódussal, γ_{AB} negatív definit 2×2 -es mátrix, valamint a nagy latin indexek mindenütt a 3, 4 értékeket veszik fel.

- (iv) A választott Gauss-féle fényszerű koordinátákban az elektromágneses teret ábrázoló F_{ab} Maxwell-tenzor komponensei is periodikusak u -ban, P periódussal.²

² P -vel minden esetben azt a legkisebb pozitív értéket jelöljük, amelyre nézve a kérdéses függvények periodikusak u -ban.

6.4.1. u -invariancia a horizonton

A fényszerű konvergenciafeltételt és az u koordinátában vett periodikusságot felhasználva megmutatjuk, hogy \mathcal{N} fényszerű generátorai expanzió- és nyírásmentesek [95]

6.4.1. Állítás. *Legyen (M, g_{ab}) a 6.2. alfejezetben meghatározott stacionárius feketelyuk-téridő, mely eleget tesz a fényszerű energiafeltételnek, azaz melyre $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ bármely fényszerű k^a vektor esetén. Ekkor $\mathcal{L}_k g_{ab}|_{\mathcal{N}} = 0$, azaz bármely $\tilde{\mathcal{O}}$ elemi téridőkörnyezetben $\partial\gamma_{AB}/\partial u = 0$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ szekció felett.*

Bizonyítás: Legyen $(\tilde{\mathcal{O}}, g_{ab}|_{\tilde{\mathcal{O}}})$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ szekció elemi téridőkörnyezete. Mivel $k^a = (\partial/\partial u)^a$ fényszerű $\tilde{\mathcal{N}}$ -on,

$$R_{ab}k^ak^b = 8\pi T_{ab}k^ak^b. \quad (6.4.1)$$

Az (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordinátákban (6.4.1) a

$$\frac{\partial^2 [\ln \sqrt{\gamma}]}{\partial u^2} + \alpha \frac{\partial [\ln \sqrt{\gamma}]}{\partial u} + \frac{1}{4} \gamma^{AG} \gamma^{BD} \left(\frac{\partial \gamma_{AB}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{GD}}{\partial u} \right) + 8\pi T_{ab}k^ak^b = 0 \quad (6.4.2)$$

alakban írható fel $\tilde{\mathcal{N}}$ -en, ahol $\gamma := -\det(\gamma_{AB})$ és a 2×2 -es γ^{AB} mátrix γ_{AB} inverzét jelöli. Mivel γ_{AB} negatív definit, továbbá a fényszerű energiafeltétel teljesül, a (6.4.2) egyenlet baloldalán álló utolsó két kifejezés nagyobb vagy egyenlő, mint nulla. Ezen felül, mivel a γ_{AB} metrika az u koordináta periodikus kifejezése, biztosan létezik olyan u_0 érték, hogy $(\partial[\ln \sqrt{\gamma}]/\partial u)(u_0) = 0$. Továbbá, a (6.4.2) egyenlet az $\partial[\ln \sqrt{\gamma}]/\partial u$ változóra vonatkozó elsőrendű közönséges differenciálegyenlet $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén, melynek megoldása

$$\left(\frac{\partial[\ln \sqrt{\gamma}]}{\partial u} \right) (u) = -e^{-\int_{u_0}^u \alpha(u^*) du^*} \int_{u_0}^u b(u') e^{\int_{u_0}^{u'} \alpha(u'') du''} du', \quad (6.4.3)$$

ahol b a (6.4.2) egyenlet baloldalán álló utolsó két kifejezést helyettesíti. A (6.4.3) egyenlet alapján, valamint az u koordinátában vett periodikusságot és a $b \geq 0$ egyenlőtlenséget kihasználva, azt kapjuk, hogy mind $\partial[\ln \sqrt{\gamma}]/\partial u$, mind pedig b el kell, hogy tűnjön $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén. Következésképpen a (6.4.2) egyenlet baloldalán álló utolsó két kifejezés is azonosan eltűnik $\tilde{\mathcal{N}}$ -on, amiből azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\partial \gamma_{AB}}{\partial u} \right)^\circ = 0 \quad (6.4.4)$$

teljesül.³ □

³A továbbiakban bármely $\tilde{\mathcal{O}}$ elemi téridőkörnyezet felett értelmezett f függvény $f|_{\tilde{\mathcal{N}}}$ megszorítottját röviden f° -rel jelöljük.

A következőkben a domináns energiafeltételt és az u koordinátában vett periodikus-ságot felhasználva, az alábbi állítás bizonyítható.

6.4.2. Állítás. *Legyen $(\tilde{\mathcal{O}}, g_{ab}|_{\tilde{\mathcal{O}}})$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ szekció egy olyan elemi téridőkörnyezete, ahol $(\partial\gamma_{AB}/\partial u)^\circ$ azonosan nulla. Ekkor mindig található olyan Gauss-féle fényszerű koordinátarendszer, amelyben $\alpha^\circ = -\kappa_\circ$, ahol $\kappa_\circ \geq 0$ állandó, valamint $\partial\beta_A/\partial u = 0$ mindenütt az $\tilde{\mathcal{N}}$ szekció felett.*

Bizonyítás: Mivel $\tilde{\mathcal{N}}$ -on k^a merőleges a $(\partial/\partial x^A)^a$ koordináta bázisvektorokra,

$$R_{ab}k^a \left(\frac{\partial}{\partial x^A} \right)^b = 8\pi T_{ab}k^a \left(\frac{\partial}{\partial x^A} \right)^b \quad (6.4.5)$$

teljesül $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. Mivel egyrészt a domináns energiafeltétel miatt $T^a{}_b k^b$ jövőirányú időszerű vagy fényszerű vektor, másrészt $T_{ab}k^a k^b = 0$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ szekció felett, így azt kapjuk, hogy $T^a{}_b k^b$ szükségképpen k^a irányába mutat, azaz $\tilde{\mathcal{N}}$ -on $T_{ab}k^a (\partial/\partial x^A)^b = 0$. Felhasználva ekkor, hogy $(\partial\gamma_{AB}/\partial u)^\circ = 0$ az (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordinátákban, a (6.4.5) egyenlet a

$$\left(2 \frac{\partial\alpha}{\partial x^A} - \frac{\partial\beta_A}{\partial u} \right)^\circ = 0 \quad (6.4.6)$$

alakot ölti. Ezt az egyenletet az u koordináta szerint kiintegrálva, valamint felhasználva β_A u periodicitását és simaságát azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x^A} \int_0^P \alpha^\circ(u, x^3, x^4) du = 0, \quad (6.4.7)$$

ami azt jelenti, hogy létezik olyan $\kappa_\circ \geq 0$ állandó, amelyre

$$\int_0^P \alpha^\circ(u, x^3, x^4) du = -\kappa_\circ P \quad (6.4.8)$$

teljesül $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. (Ha κ_\circ kisebb lenne, mint nulla, a $\kappa_\circ > 0$ feltétel az $(u, r, x^3, x^4) \rightarrow (-u, -r, x^3, x^4)$ transzformáció, valamint az időirányítás megfordításának egyidejű alkalmazása révén mindig elérhető.)

Ezek után annak bizonyítása, hogy olyan új (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordináták vezethetők be, hogy az $\alpha^\circ = -\kappa_\circ$ egyenlet teljesüljön, a [75]-es munka 395-398. oldalain található érvelés értelemszerű alkalmazásának segítségével kapható. Ezt követően, mivel α° állandó, (6.4.6) aktuális alakjából a $(\partial\beta_A/\partial u)^\circ = 0$ reláció automatikusan következik.

□

A (6.4.8) összefüggés értelmében, bármely $\tilde{\mathcal{O}}$ elemi környezetben, az u koordinátában vett periodikusság kiválasztja a kitüntetett κ_\circ értéket, melyet a $\kappa_\circ = -1/P \int_0^P \alpha^\circ du$ reláció határoz meg. Érdemes megemlíteni, hogy mivel az $\tilde{\mathcal{O}}$ típusú elemi környezetek \mathcal{N} egy \mathcal{O} nyílt környezetének lefedését adják, a kitüntetett κ_\circ érték az \mathcal{N} horizont egészére vonatkozik, hiszen κ_\circ értéke ugyanaz kell legyen az átfedő elemi környezetekben.

A 6.4.1 és a 6.4.2. állítások értelmében, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy bármely $\tilde{\mathcal{O}}$ elemi környezetben bevezethetők olyan (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordináták, amelyekre $\alpha^\circ = -\kappa_\circ$, továbbá a β_A és a γ_{AB} kifejezések u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén. Annak belátása érdekében, hogy analitikus esetben $k^a = (\partial/\partial u)^a$ a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező, azt is meg kell mutatnunk, hogy nemcsak az α , β_A és a γ_{AB} kifejezések, hanem ezek tetszőleges rendű r -deriváltjai is u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén [53, 75]. Hasonló vizsgálatot kell elvégezni az elektromágneses teret ábrázoló Maxwell-tenzor komponenseivel kapcsolatban is.

Annak érdekében, hogy a geometriai és anyagi szabadsági fokokat megfelelően szeparálhassuk, először csak a metrika invarianciájának szükséges és elegendő feltételét határozzuk meg. Az elektromágneses térre vonatkozó vizsgálatainkat azt követően külön végezzük el.

Mint oly sok más esetben, ahol fényszerű hiperfelületek játszanak központi szerepet, most is célszerű a Newman-Penrose formalizmust [83] alkalmazni. Ahogy azt az előző fejezet Newman-Penrose formalizmus alapelemeit bemutató 5.2.1. alfejezetében láttuk, a (6.4.1) vonalelemmel adott metrika (5.2.5) kovariáns alakjában szereplő komponenseket az U , X^A valós-, és az ω , ξ^A komplex-függvények segítségével, az (5.2.6) egyenletnek megfelelően, a

$$g^{rr} = 2(U - \omega\bar{\omega}), \quad g^{rA} = X^A - (\bar{\omega}\xi^A + \omega\bar{\xi}^A), \quad g^{AB} = -(\xi^A\bar{\xi}^B + \bar{\xi}^A\xi^B)$$

relációk felhasználásával adhatjuk meg. Az 5.2.1. alfejezetben alkalmazott mértékrögzítéseket annak figyelembevételével használjuk, hogy az u koordináta most nem affin-, hanem Killing-koordináta. Így jelen esetben a komplex fényszerű tetrad olyan, hogy az $\tilde{\mathcal{O}}$ környezetben mindenütt $\kappa = \pi = \varepsilon = 0$, $\rho = \bar{\rho}$, $\tau = \bar{\alpha} + \beta$, míg $\nu = 0$, $\gamma = \bar{\gamma}$ és $\mu = \bar{\mu}$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ szekció felett.

6.4.1. Tétel. *Jelöljük $g^{\alpha\beta}$ -vel a 6.2. alfejezetben meghatározott stacionárius feketelyuk-téridő $\tilde{\mathcal{O}}$ elemi környezete felett értelmezett téridőmetrika Gauss-féle fényszerű koordinátákra vonatkozó kontravariáns komponenseit. Ekkor tetszőleges $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ értékre pontosan akkor teljesül a*

$$\Delta (D^{(i)} (\{g^{\alpha\beta}\}))^\circ = 0 \tag{6.4.9}$$

reláció⁴, ha $\Delta(\{(\Phi_{11} + 3\Lambda), \Phi_{02}\})^\circ = 0$ és tetszőleges $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ értékre

$$\Delta(D^{(j)}(\{\Phi_{00}, \Phi_{01}, (\Phi_{11} - 3\Lambda), D(\Phi_{02})\}))^\circ = 0. \quad (6.4.10)$$

Bizonyítás: Az (5.2.5) és (5.2.6) egyenletek alapján, valamint az ω, X^A, U függvények $\tilde{\mathcal{N}}$ -on történő eltűnése folytán kapjuk, hogy (6.4.9) pontosan akkor teljesül, amikor tetszőleges $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re

$$\Delta(D^{(i)}(\{\xi^A, \omega, X^A, U\}))^\circ = 0. \quad (6.4.11)$$

Továbbá, az (M.3) - (M.10) metrikus egyenleteknek⁵ megfelelően – lásd a (6.10a) - (6.10h) Newman-Penrose-egyenleteket is – belátható, hogy (6.4.11) pontosan akkor teljesül, amikor tetszőleges $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re

$$\Delta(D^{(i)}(\{\rho, \sigma, \tau, (\gamma + \bar{\gamma})\}))^\circ = 0. \quad (6.4.12)$$

Annak belátása érdekében, hogy $n = 1$ esetén (6.4.12) a $\Phi_{11} + 3\Lambda$ és Φ_{02} kifejezések $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén vett u -függetlenségével ekvivalens, jegyezzük meg, hogy a felületi gravitáció (2.5.1), valamint γ definíciója alapján (utóbbi megtalálható az appendixben)

$$(\gamma + \bar{\gamma})^\circ = (n^a n^b \nabla_a \ell_b)^\circ = (k^a k^b \nabla_a \ell_b)^\circ = -(k^a \ell^b \nabla_a k_b)^\circ = -\kappa_\circ, \quad (6.4.13)$$

ahol $\kappa_\circ = \text{állandó}$ az $\tilde{\mathcal{N}}$ felületen. Mivel $\bar{\gamma}^\circ = \gamma^\circ$ azt kapjuk, hogy

$$\delta(\gamma)^\circ = \bar{\delta}(\gamma)^\circ = \Delta(\gamma + \bar{\gamma})^\circ = 0. \quad (6.4.14)$$

Érdeemes felidézni, hogy a 6.4.1 és a 6.4.2 állítások értelmében $T_{uu}^\circ = T_{uA}^\circ = (\partial\gamma_{AB}/\partial u)^\circ = 0$, amiből a Ricci-, és Weyl-spinor komponensek, valamint a spin-együtthatók definíciója alapján (lásd az appendixet) azonnal kapjuk, hogy $\Phi_{22}^\circ = \Phi_{21}^\circ = \lambda^\circ = \mu^\circ = 0$, és hasonlóan az (NP.10), (NP.13) és (NP.14) egyenletekből $\Psi_3^\circ = \Psi_4^\circ = 0$ következik.

Ekkor az (NP.15), (NP.18) és a (6.4.14) egyenletek alapján azt kapjuk, hogy

$$\Delta(\alpha)^\circ = \Delta(\beta)^\circ = 0. \quad (6.4.15)$$

⁴A továbbiakban $\Delta(D^{(j)}(\{f_1, f_2, \dots, f_N\}))$ azon függvények listáját jelöli, melyeket az f_1, f_2, \dots, f_N függvényekből úgy nyerünk, hogy azokra a D differenciáloperátort (j -szer haddatjuk, majd a Δ operátort egyszer alkalmazzuk. Speciálisan, $\Delta(D^{(0)}(\{f_1, f_2, \dots, f_N\}))$ a $\Delta(\{f_1, f_2, \dots, f_N\})$ kifejezést adja.

⁵Az $(M.m)$, $(NP.n)$ és $(B.p)$ alakú egyenletszámozás az appendixben felidézett m -edik metrikus egyenlet, n -edik Newman-Penrose-egyenlet, illetve a p -edik Bianchi-azonosság – általunk kiválasztott mértékrögzítésnek megfelelő – alakjára utalnak.

Ehhez hozzávéve a $\tau = \bar{\alpha} + \beta$ relációt, $\Delta(\tau)^\circ = 0$ azonnal adódik. A (6.4.15) és (NP.12) egyenletek, valamint $\Phi_{11} + 3\Lambda$ u -függetlenségének azonnali következménye az, hogy

$$\Delta(\Psi_2 + 2\Lambda)^\circ = 0. \quad (6.4.16)$$

Ekkor (6.4.16) és (NP.17) alapján $\Delta(\rho)$ eleget tesz a

$$\Delta(\Delta(\rho)) + \kappa_\circ \Delta(\rho) = 0 \quad (6.4.17)$$

egyenletnek $\tilde{\mathcal{N}}$ -on, melynek az egyetlen periodikus megoldására $\Delta(\rho)^\circ = 0$ teljesül.

Végül (NP.16) alapján azt kapjuk, hogy $\Delta(\sigma)^\circ = 0$, hiszen feltételeink szerint $\Delta(\Phi_{02})$ eltűnik $\tilde{\mathcal{N}}$ -on.

Az, hogy az állításunk igaz $n = 2$ esetén is, az alábbi módon igazolható. Először is, (NP.6)-nak megfelelően, $\Delta(D(\gamma + \bar{\gamma}))^\circ = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\Delta(\Psi_2 + \bar{\Psi}_2 - 2\Lambda + 2\Phi_{11})^\circ = 0$. Vegyük észre, hogy (6.4.16) alapján az utolsó egyenlet éppen a $\Delta(\Phi_{11} - 3\Lambda)$ kifejezés $\tilde{\mathcal{N}}$ -on való eltűnésére vonatkozó – (6.4.10)-ben megfogalmazott – feltételünkkel ekvivalens.

A $\Delta(D(\alpha))^\circ$, $\Delta(D(\beta))^\circ$, valamint a $\Delta(D(\tau))^\circ$ kifejezések eltűnése, az (NP.3) – (NP.5) egyenletek és a feltételeink alapján, a $\Delta(\Psi_1)^\circ$ eltűnésével egyenértékűek. Az utóbbi feltétel teljesülésének megmutatásához jegyezzük meg, hogy jelen esetben (B.4) $\tilde{\mathcal{N}}$ -on a

$$\Delta(\Delta(\Psi_1)) + \kappa_\circ \Delta(\Psi_1) - \tau \Delta(2\Phi_{11} - 3\Psi_2) = 0 \quad (6.4.18)$$

alakot ölti. Az (6.4.18) egyenlet baloldalán álló utolsó kifejezés éppen $\tau [2\Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - 3(\Psi_2 + 2\Lambda)]$, ami – az induktív feltételünk, valamint (6.4.16) következtében – azonosan nulla $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. Emiatt (6.4.18) egyetlen periodikus megoldása a $\Delta(\Psi_1)^\circ = 0$ alakban adható meg.

Ezek után, (NP.1)-nek megfelelően, $\Delta(D(\rho))^\circ$ pontosan akkor nulla, ha $\Delta(\Phi_{00})^\circ = 0$, és hasonlóan, (NP.2) alapján, $\Delta(D(\sigma))^\circ = 0$ pontosan akkor, ha $\Delta(\Psi_0)^\circ = 0$. Feltételeink szerint $\Delta(\Phi_{00})^\circ = 0$, míg (B.2) alapján azt kapjuk, hogy

$$\Delta(\Delta(\Psi_0)) + 2\kappa_\circ \Delta(\Psi_0) - \sigma \Delta(3\Psi_2 + 2\Phi_{11}) + \Delta(D(\Phi_{02})) = 0 \quad (6.4.19)$$

$\tilde{\mathcal{N}}$ -on. A feltételeink felhasználásával megmutatható, hogy a (6.4.19) bal oldalán álló utolsó két kifejezés eltűnik, és így (6.4.19) egyetlen u -periodikus megoldása a $\Delta(\Psi_0)^\circ = 0$ alakot ölti.

Az $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \rho, \sigma$, valamint a $\Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{11}$ kifejezések u -függetlenségének egy további következménye az, hogy a (B.9) - (B.11) egyenleteknek megfelelően

$$\Delta (D(\{(\Phi_{11} + 3\Lambda), \Phi_{22}, \Phi_{21}\}))^\circ = 0, \quad (6.4.20)$$

míg az (NP.7) - (NP.9) egyenletek alapján

$$\Delta (D(\{\lambda, \mu, \nu\}))^\circ = 0. \quad (6.4.21)$$

Ezek után a teljes indukció módszerével igazolhatjuk azt, hogy a $(\gamma + \bar{\gamma}), \tau, \rho, \sigma$ kifejezések tetszőleges, $(n - 1)$ -nél alacsonyabb rendű D-deriváltjai pontosan akkor u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén, ha az $\Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{02}, (\Phi_{11} - 3\Lambda)$ és $D(\Phi_{02})$ kifejezések, valamint ezek $(n - 2)$ -nél alacsonyabb rendű D-deriváltjai u -függetlenek. Tegyük fel, azaz legyen az indukciós feltételünk az, hogy az imént megfogalmazott állítás teljesül az $n = \bar{n}$ értékre. Ekkor a (6.4.20) és (6.4.21) egyenletek igazolása során alkalmazott érvelés értelemszerű adaptálásával megmutatható, hogy

$$\Delta (D^{(i)}(\{\lambda, \mu, \nu, (\Phi_{11} + 3\Lambda), \Phi_{22}, \Phi_{21}\}))^\circ = 0, \quad (6.4.22)$$

tetszőleges $i \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ értékre.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy tételünk állítása teljesül $n = \bar{n} + 1$ -re is. Először is jegyezzük meg, hogy (NP.6) miatt $\Delta (D^{(\bar{n})}(\gamma + \bar{\gamma}))^\circ = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\Psi_2 + \bar{\Psi}_2 - 2\Lambda + 2\Phi_{11}))^\circ = 0$. Ez utóbbi kifejezés (NP.12) figyelembevételével $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\Phi_{11} - 3\Lambda))$ $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén való eltűnésével ekvivalens, mely egyike az induktív feltevéseinknek.

Ezek után, az (NP.3) - (NP.5) egyenletek alapján, $\Delta (D^{(\bar{n})}(\{\alpha, \beta, \tau\}))^\circ = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\{\Phi_{01}, \Psi_1\}))^\circ = 0$. Az utóbbi reláció első fele, azaz $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\Phi_{01}))^\circ = 0$ egyszerűen az induktív feltételünkből következik, míg annak érdekében, hogy a $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\Psi_1))^\circ = 0$ relációt igazoljuk, tekintsük a (B.1) egyenlet $(\bar{n} - 2)$ -szeres D-deriváltját. Felhasználva a D, δ és $\bar{\delta}$ operátorok kommutátorait (lásd az appendixet) azt kapjuk, hogy $D^{(\bar{n}-1)}(\Psi_1)$ $\tilde{\mathcal{N}}$ -on u -független kifejezések segítségével adható meg.

Hasonlóan, (NP.1) és (NP.2) alapján azt kapjuk, hogy $\Delta (D^{(\bar{n})}(\{\rho, \sigma\}))^\circ = 0$ pontosan akkor, ha $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\{\Phi_{00}, \Psi_0\}))^\circ = 0$. Belátható, hogy az iménti feltétel első része az induktív feltevésünk miatt azonnal teljesül, míg $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\Psi_0))^\circ$ eltűnése abból következik, hogy $\tilde{\mathcal{N}}$ -on $\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\Psi_0))$ a

$$\Delta (D^{(\bar{n}-1)}(\Psi_0)) + \kappa_o \{ \text{állandó} \} \cdot D^{(\bar{n}-1)}(\Psi_0) + \{ u\text{-független kifejezések} \} = 0 \quad (6.4.23)$$

egyenletnek tesz eleget, melyet (B.2) $(\bar{n} - 1)$ -szeres D-deriváltjából a D, δ és $\bar{\delta}$ operátorok kommutátorainak többszöri alkalmazásával kaphatunk meg.

Következésképpen a $(\gamma + \bar{\gamma}), \tau, \rho, \sigma$ spin-együtthatók, valamint azok \bar{n} -ed vagy annál alacsonyabb rendű D-deriváltjai u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén, amint azt bizonyítani szándékoztunk. \square

A Gauss-féle fényszerű koordináták és az imént alkalmazott komplex fényszerű tetrad, valamint a T_{ab} energiaimpulzus-tenzor komponenseinek és a $\Phi_{\alpha\beta}$ és Λ Ricci-spinor komponensek kapcsolatát tekintve – a vonatkozó relációk megtalálhatók az appendixben – belátható, hogy az imént bizonyított 6.4.1. tétel az alábbi állítással ekvivalens.

6.4.1. Következmény. *Legyen $(\tilde{\mathcal{O}}, g_{ab}|_{\tilde{\mathcal{O}}})$ a 6.2. alfejezetben meghatározott stacionárius feketelyuk-téridő egy elemi téridőkörnyezete. Tegyük fel, hogy az energiaimpulzus-tenzor $T_{ur}, T_{rr}, T_{rA}, T_{AB}$ komponensei, valamint a T_{rr}, T_{rA}, T_{AB} komponensek $n - 1$ -ed, vagy annál alacsonyabb rendű r -deriváltjai u -függetlenek az $\tilde{\mathcal{N}}$ hiperfelületen. Ekkor az (6.4.1) vonalelemmel adott metrikában szereplő α, β_A és γ_{AB} metrikus kifejezések, illetve azok n -ed, vagy annál alacsonyabb rendű r -deriváltjai u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ -on.*

6.4.2. Einstein–Maxwell rendszer

Korábbi ígéretünknek megfelelően ebben a részben a forrásmentes elektromágneses mező esetét tekintjük át az Einstein elméletben. A szabad elektromágneses teret az 5. fejezetben alkalmazott leírásnak megfelelően az F_{ab} Maxwell-tenzor segítségével ábrázoljuk, mely a (5.2.2) egyenletnek tesz eleget, továbbá a csatolt Einstein–Maxwell-rendszerhez tartozó energiaimpulzus-tenzort a (5.2.3) egyenletnek megfelelően adjuk meg.

A jelen alfejezet legfontosabb eredménye, mely egyben a következő részek alapjául is szolgál, az alábbi állításban foglalható össze:

6.4.2. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) egy, a 6.2. alfejezetben meghatározott, stacionárius, elektrovákuum, analitikus feketelyuk-téridő, valamint $(\tilde{\mathcal{O}}, g_{ab}|_{\tilde{\mathcal{O}}})$ olyan elemi téridőkörnyezet, ahol (u, r, x^3, x^4) Gauss-féle fényszerű koordináták értelmezettek, s melyben a g_{ab} metrika és az F_{ab} Maxwell-tenzor komponensei u -periodikusak. Ekkor*

$$\alpha|_{\tilde{\mathcal{N}}} = -\kappa_o \text{ és } F_{uA}|_{\tilde{\mathcal{N}}} = 0, \quad (6.4.24)$$

ahol $\kappa_o \in \mathbb{R}$, továbbá a metrika és az F_{ab} Maxwell-tenzor komponenseinek tetszőleges rendű r -deriváltjai u -függetlenek, azaz

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial^n}{\partial r^n} \{ \alpha, \beta_A, \gamma_{AB}; F_{ur}, F_{uA}, F_{rA}, F_{AB} \} \right] \right|_{\tilde{\mathcal{N}}} = 0 \quad (6.4.25)$$

teljesül bármely $n \geq 0$ egész értékre.

Bizonyítás: Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. Annak belátása érdekében, hogy az állításunk igaz $n = 0$ esetben, tekintsük először az energiainpulzus-tenzor T_{uu} komponensét, melyre az (5.2.3) reláció, valamint a γ_{AB} metrika negatív definitésége folytán $T_{uu}^\circ = -\frac{1}{4\pi}(F_{uA}F_{uB}\gamma^{AB})^\circ \geq 0$ teljesül, amiből – a 6.4.1. állítás bizonyítása során alkalmazott érvelést használva

$$F_{uB}^\circ = 0 \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial\gamma_{AB}}{\partial u}\right)^\circ = 0 \quad (6.4.26)$$

következik. Ekkor (5.2.3)-nak megfelelően $T_{uA}^\circ = 0$ is teljesül. Így a 6.4.2. tétel figyelembevételével

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^\circ = \left(\frac{\partial\beta_A}{\partial u}\right)^\circ = 0. \quad (6.4.27)$$

Az induktív bizonyítás első lépésének zárásaként tekintsük először a $\nabla_a F^{ba} = 0$ Maxwell-egyenlet Gauss-féle fényszerű koordinátákra vonatkozó ‘ u ’-komponensét, mely $\tilde{\mathcal{N}}$ -on a

$$\frac{\partial F_{ru}}{\partial u} = 0 \quad (6.4.28)$$

alakban írható fel. Hasonlóan, a $\nabla_{[u}F_{AB]} = 0$ és $F_{uB}^\circ = 0$ relációkat felhasználva, F_{AB} komponensek u -függetlensége is igazolható. Végül a $\nabla_a F^{Aa} = 0$ és $\nabla_{[r}F_{Bu]} = 0$ egyenletekből u -deriválást követően $\tilde{\mathcal{N}}$ -on a

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F_{Ar}}{\partial u} \right) + \kappa_\circ \frac{\partial F_{Ar}}{\partial u} = 0 \quad (6.4.29)$$

egyenletet kapjuk, melynek egyetlen u -periodikus megoldására a $\left(\frac{\partial F_{Ar}}{\partial u}\right)^\circ = 0$ reláció teljesül.

Ezek után az F_{ur} , F_{uA} , F_{rA} és F_{AB} komponensek u -függetlenségéből (5.2.3) alapján azt kapjuk, hogy a T_{ur} , T_{rr} , T_{rA} és T_{AB} komponensek is mind u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. Ezen utóbbi észrevétel a 6.4.1. következmény figyelembevételével az α , β_A , γ_{AB} metrikus függvények első r -deriváltjainak $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai menti u -függetlenségét igazolja.

Induktív hipotézisként most tegyük azt fel, hogy az α , β_A , γ_{AB} metrikus függvények összes $\bar{n} \in \mathbb{N}$ -nél nem magasabb rendű r -deriváltjai, valamint az F_{ur} , F_{uA} , F_{rA} és F_{AB} komponensek összes $\bar{n} - 1 \in \mathbb{N}$ -nél nem magasabb rendű r -deriváltjai mind u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ -on.

Ekkor az $\nabla_{[r}F_{AB]} = 0$ és az $\nabla_{[r}F_{Au]} = 0$ egyenletek $\bar{n} - 1$ -szeres r -deriváltjait az $\tilde{\mathcal{N}}$ felületen kiértékelve azonnal látszik, hogy a $\frac{\partial^{\bar{n}} F_{AB}}{\partial r^{\bar{n}}}$, valamint a $\frac{\partial^{\bar{n}} F_{uA}}{\partial r^{\bar{n}}}$ deriváltak u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. Hasonlóan, a $\nabla_a F^{ua} = 0$ Maxwell-egyenlet $\bar{n} - 1$ -szeres r -deriváltját

felhasználva a $\left(\frac{\partial^{\bar{n}} F_{ur}}{\partial r^{\bar{n}}}\right)^\circ$ kifejezés u -függetlensége is ellenőrizhető. Végül, az $\nabla_a F^{Aa} = 0$ és az $\nabla_{[r} F_{Bu]} = 0$ Maxwell-egyenletek \bar{n} -szeres r -deriváltját felhasználva, az $\frac{\partial^{\bar{n}} F_{rA}}{\partial r^{\bar{n}}}$ kifejezésre

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^{\bar{n}} F_{rA}}{\partial r^{\bar{n}}} \right) + \kappa_o \cdot \text{állandó} \cdot \frac{\partial^{\bar{n}} F_{rA}}{\partial r^{\bar{n}}} + \{u\text{-független kifejezések}\} = 0 \quad (6.4.30)$$

egyenletet kapjuk $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. (6.4.30) egyetlen u -periodikus megoldására $\left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^{\bar{n}} F_{rA}}{\partial r^{\bar{n}}}\right)\right)^\circ = 0$ teljesül.

Az F_{ur} , F_{uA} , F_{rA} és F_{AB} komponensek \bar{n} -szeres r -deriváltjainak u -függetlenségéből (5.2.3) alapján azt kapjuk, hogy a T_{rr} , T_{rA} és T_{AB} komponensek \bar{n} -szeres r -deriváltjai is mind u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. Így a 6.4.1. következményt felhasználva azt kapjuk – ahogy azt bizonyítani szerettük volna –, hogy az $\alpha, \beta_A, \gamma_{AB}$ metrikus függvények $\bar{n} + 1$ rendű r -deriváltjai is mind u -függetlenek $\tilde{\mathcal{N}}$ generátorai mentén. \square

Analitikus esetben (6.4.25)-ből azonnal következik, hogy – legalábbis \mathcal{N} egy elegendően kicsiny környezetében – $k^a = (\partial/\partial u)^a$ egy Killing-vektormező. A 6.6. alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy a sima esetben, ha a feketelyuk nem degenerált, akkor a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező létezése bizonyítható a horizont feketelyuk-tartomány felőli oldalán. Mielőtt ezt tennénk, a következő alfejezetben idézzük fel azt a kapcsolódó eredményünket, miszerint a gravitáció olyan metrikus elméleteiben, ahol a gravitáció és az anyag csatolt fejlődési egyenletei szimmetrikus, hiperbolikus, elsőrendű egyenletekké írhatók át, a kezdőadatok szimmetriái megőrződnek, azaz mind az evolúció során kapott téridő, mind pedig a rajta lévő anyagmezők rendelkeznek a kezdőadatok által hordozott szimmetriákkal.

6.5. A megoldások szimmetriái

Általánosan igaz az a meglátás, hogy a szimmetriával rendelkező megoldások minden fizikai rendszerben kitüntetett fontossággal bírnak. Ez azért van így, mert szimmetriák esetében a téregyenletek lényegesen leegyszerűsödnek, illetve bizonyos, a szimmetriáktól eltérő, tulajdonságok lényegtelenek az adott fizikai jelenség tárgyalása során.

A jelen alfejezet célja annak vizsgálata, hogy a kezdőérték-probléma során szabadon választható kezdőadatokban felismerhető szimmetriák milyen esetekben válnak a megoldások által is hordozott szimmetriákká. A probléma tárgyalása lényegesen túl mutat jelen fejezet keretein. Mégis a lentebb felidézett általános érvelés mellett döntöttem, leginkább azért, mert nem sokkal egyszerűbb az egyedi rendszerek külön-külön való vizsgálata sem. A bemutatásra kerülő eredmények – amellet, hogy általuk választ kapunk a szimmetriák propagálásával kapcsolatban feltett általános kérdéseinkre – fontos szerepet

játszanak a sima, elektrovákuum feketelyuk-téridők esetében a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező létezésének bizonyítása – lásd például a 6.6.2. tétel bizonyítását – kapcsán is.

Az általunk keresett szükséges és elégséges feltételek – ezek azok, amelyek a megoldások Killing-szimmetriáinak létezését biztosítják – a kezdőadatokra vonatkozó megszorítások segítségével adhatók meg. Az alkalmazott kezdőérték-problémára vonatkozó egyetlen elvárásunk az, hogy benne – alkalmasan választott kezdőértékek esetén – a kvázi-lineáris egyenletek megoldásának létezése és azok egyértelmősége garantált legyen. Azokra a kezdőérték-problémákra, amelyek eleget tesznek ezen elvárásunknak, a továbbiakban mint „alkalmas kezdőérték-problémák”-ra hivatkozunk. Alkalmas kezdőérték-probléma például a standard Cauchy-probléma [28], vagy a karakterisztikus kezdőérték-problémák, ahol a kezdőfelület vagy két sima, egymást egy kétdimenziós térszerű felületben metsző fényszerű hiperfelület uniója [77, 103], vagy pedig egy karakterisztikus kúp [31, 14, 103]. Mivel a kezdőérték-problémák kapcsán semmiféle további megszorítást nem kell alkalmaznunk, a jelen alfejezet eredményeit abban az alakban fogalmazzuk meg, amely bármelyik alkalmas kezdőérték-probléma esetén azonnal alkalmazható. A továbbiakban a kezdőfelületet mindig \mathcal{C} -vel, míg a kezdőadatokat az alapváltozók szögletes zárójelben történő feltüntetésével jelöljük. Így, amikor φ az alapváltozónk a standard Cauchy-probléma esetén, ahol n^a a \mathcal{C} térszerű hiperfelületre merőleges egységvektor, $[\varphi]$ a $\varphi|_{\mathcal{C}}$ és az $n^a \nabla_a \varphi|_{\mathcal{C}}$ függvénypárost jelöli, míg a karakterisztikus kezdőérték-probléma esetén $[\varphi]$ maga a $\varphi|_{\mathcal{C}}$ függvény.

6.5.1. A gravitáció és anyag csatolt rendszerei

Ebben a részben a vizsgálatunkba bevont gravitáció és anyag csatolt rendszereinek pontos meghatározását adjuk. Az anyagmezőket – mivel a g_{ab} téridőmetrika adott, ahogy azt a 4.3. alfejezetben is tettük – sima $(0, \ell_i)$ típusú $T_{(i)a\dots b}$ tenzormezőkkel ábrázoljuk. Az anyagmezők némely esetben belső mértékszabadsággal is rendelkezhetnek. Még akkor is, ha ez így van, a kapcsolódó mérték-indexeket nem írjuk ki, és legtöbb esetben magukat a téridőindexeket sem jelenítjük meg. Ennek megfelelően a $(0, \ell_i)$ típusú $T_{(i)a\dots b}$ tenzormezőt egyszerűen $\mathcal{T}_{(i)}$ -vel jelöljük. Ugyanakkor, minden nem magától értetődő esetben az indexeket explicit módon kiírjuk.

Amint az várható is, az anyagmezőkre vonatkozó téregyenletek hiperbolikus jellege sokkal fontosabb szerepet játszik, mint azok konkrét alakja. Ennek megfelelően a továbbiakban csak azt tételezzük fel, hogy a $\mathcal{T}_{(i)}$ mezők a

$$\nabla^a \nabla_a \mathcal{T}_{(i)} = \mathcal{F}_{(i)} \left(\mathcal{T}_{(j)}, \nabla_c \mathcal{T}_{(j)}, g_{ef} \right) \quad (6.5.1)$$

általános, kvázi-lineáris, diagonális, másodrendű hullámegyenletnek tesznek eleget, ⁶ ahol az $\mathcal{F}_{(i)}$ forrástagok, melyek maguk is $(0, \ell_i)$ típusú tenzormezők, a jelzett változók sima függvényei. A téridőpontoktól való függést sehol sem jelezzük.

Ezen túlmenően feltesszük, hogy az anyagmezők oly módon csatolódnak a gravitációhoz, hogy az R_{ab} Ricci-tenzor a $\mathcal{T}_{(i)}$ mezők, azok elsőrendű kovariáns deriváltjai, valamint a metrika segítségével az

$$R_{ab} = R_{ab} \left(\mathcal{T}_{(i)}, \nabla_c \mathcal{T}_{(i)}, g_{ef} \right) \quad (6.5.2)$$

alakban adható meg.

Ezen utóbbi feltétel biztosan teljesül az Einstein-elméletben feltéve, hogy az anyagi Lagrange-függvény az anyagi térváltozók legfeljebb elsőrendű deriváltjait tartalmazza. Érdeemes azonban megjegyezni, hogy a fenti feltétel sokkal általánosabb elméletek vizsgálatát is lehetővé teszi, hiszen az összeegyeztethető a magasabb görbületi tagokkal operáló olyan elméletek komformis megfelelőjével, ahol a gravitációs Lagrange-függvény például a Ricci-skalár polinomja – ilyen elmélet vizsgálata található például a [62] munkában –, de teljesülhet a gravitáció számos, az Einstein-elmélettől lényegesen eltérő, más metrikus elméleteiben is.

Az imént bevezetett matematikai modell túl általánosnak tűnhet, hiszen még magában az Einstein-elméletben sem általánosan ismert az, hogy a gravitáció és anyag egy adott rendszere esetén a téregyenletekhez létezik-e egyértelmű megoldás. Az alábbiakban először – a Friedrich által felismert [36] „hiperbolikus redukációs eljárás” általánosításának segítségével – éppen azt szeretnénk megmutatni, hogy az (6.5.1) és (6.5.2) egyenleteket felírhatjuk kvázi-lineáris, elsőrendű hullámegyenletekként, így azok a sima esetben – diffeomorfizmusok erejéig – egyértelmű maximális Cauchy-fejlődéssel rendelkeznek, minden alkalmas kezdőértékprobléma esetén.

Az iménti állítás igazolásához tekintsük először a g_{ab} metrika és a $\mathcal{T}_{(i)}$ anyagi térváltozók komponenseit egy tetszőlegesen választott koordinátarendszerben. Ekkor a Ricci-tenzor, valamint a $\nabla^a \nabla_a \mathcal{T}_{(i)}$ kifejezések a

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta} + g_{\delta(\alpha} \partial_{\beta)} \Gamma^\delta + H'_{\alpha\beta}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}) \quad (6.5.3)$$

és a

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \mathcal{T}_{(i)} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{T}_{(i)} - \sum_{k=1}^{\ell_i} \left(\mathcal{T}_{(i)} \right)_\delta^{[\alpha k]} (R_{\alpha k}{}^\delta + \partial_{\alpha k} \Gamma^\delta) + \mathcal{H}'_{(i)}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}, \mathcal{T}_{(j)}, \partial_\gamma \mathcal{T}_{(j)}) \quad (6.5.4)$$

⁶Az érdeklődő olvasó egy sokkal általánosabb, az összes lehetséges anyagmező megjelenítésére alkalmas keretben elvégzett hasonló vizsgálat eredményeit ismerheti meg a [97] dolgozatunkból.

alakban írhatók fel, ahol ∂_α az x^α koordináta szerinti parciális deriváló operátort jelöli, $\Gamma^\mu = g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$, ahol $\Gamma^\mu_{\varepsilon\rho}$ a $g_{\alpha\beta}$ metrikához tartozó Christoffel-szimbólumot jelöli, $\left(\mathcal{T}_{(i)}\right)_\delta^{[\alpha_k]}$ a $T_{(i)\alpha_1\dots\alpha_{k-1}\delta\alpha_{k+1}\dots\alpha_{\ell_i}}$ kifejezés rövidített változatát jelöli, míg $H'_{\alpha\beta}$ és $\mathcal{H}'_{(i)}$ kifejezések – az utóbbi $\alpha_1\dots\alpha_{\ell_i}$ indexeit elhagytuk – jelzett változóik sima függvényei.

Így az (6.5.1) és (6.5.2) egyenletek a

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\mathcal{T}_{(i)} = \sum_{k=1}^{\ell_i} \left(\mathcal{T}_{(i)}\right)_\delta^{[\alpha_k]}\partial_{\alpha_k}\Gamma^\delta + \mathcal{H}_{(i)}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}, \mathcal{T}_{(j)}, \partial_\gamma\mathcal{T}_{(j)}) \quad (6.5.5)$$

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta} = 2g_{\delta(\alpha}\partial_{\beta)}\Gamma^\delta + H_{\alpha\beta}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}, \mathcal{T}_{(j)}, \partial_\gamma\mathcal{T}_{(j)}). \quad (6.5.6)$$

alakban írhatók fel.

Ha a Γ^δ függvények ismertek lennének, akkor ezek az egyenletek rögtön a kívánt kvázilinéáris, diagonális, másodrendű hiperbolikus alakkal rendelkeznének, és így készen is lennének. Azonban Friedrich vákuumesetben alkalmazott érvelését [36] a jelen esetben is megismételhetjük. Ennek megfelelően helyettesítsük a Γ^δ függvényeket tetszőleges f^δ mértékforrás-függvényekkel úgy, hogy rájuk a \mathcal{C} kezdőfelületen az $[f^\delta] = [\Gamma^\delta]$ reláció teljesüljön.⁷ Oldjuk meg az így nyert redukált egyenleteket, mint időfejlődési egyenleteket az alapváltozóinkra. A kapott egyértelmű $g_{\alpha\beta}$ megoldás felhasználásával a releváns Γ^δ függvények meghatározhatók, és a kétszeres Bianchi-azonosság felhasználásával megmutatható [36] (lásd a [35]-es munka 540. oldalát is), hogy

$$\nabla^\mu\nabla_\mu(\Gamma^\delta - f^\delta) + R^\delta{}_\nu(\Gamma^\nu - f^\nu) = 0. \quad (6.5.7)$$

Emlékezzünk, hogy $[\Gamma^\delta] = [f^\delta]$ a \mathcal{C} kezdőfelületen, ehhez hozzávéve a (6.5.6) egyenletet, valamint annak redukált alakját, azt kapjuk, hogy a (6.5.7) egyenletre vonatkozó teljes kezdőadat triviális, azaz $[\Gamma^\delta - f^\delta]$ azonosan nulla. Ez alapján a teljes függőségi tartományban $\Gamma^\delta = f^\delta$ teljesül, azaz a redukált probléma megoldása egyben az eredeti (6.5.5) és (6.5.6) egyenletek megoldását is adja.

6.5.2. A Killing-vektormező megkonstruálása

Ismert, hogy a K^a vektormező akkor Killing-vektormező az (M, g_{ab}) téridőn, ha eleget tesz a

$$\mathcal{L}_K g_{ab} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0 \quad (6.5.8)$$

⁷Erdemes megjegyezni, hogy a kezdőfelületen $[\Gamma^\delta]$ mindig meghatározható a metrikára vonatkozó $[g_{\alpha\beta}]$ kezdőadat, valamint a metrikára vonatkozó téregyenletek felhasználásával.

Killing-egyenletnek. Ekkor az M -en értelmezett $X_{ab} = \nabla_a K_b$ kétformamezőre vonatkozó $(dX)_{abc} = 0$ integrálási feltételt a

$$\nabla_a \nabla_b K_c + \nabla_c \nabla_a K_b + \nabla_b \nabla_c K_a = 0 \quad (6.5.9)$$

alakban írhatjuk fel. A második kifejezésben a $\nabla_a K_b$ kifejezést $-\nabla_b K_a$ -re cserélve ($\nabla_a K_b$ antiszimmetrikus), valamint felhasználva a görbületi tenzor definícióját, azt kapjuk, hogy az X_{ab} -ra vonatkozó integrálási feltétel a

$$\nabla_a \nabla_b K_c + R_{bca}{}^d K_d = 0 \quad (6.5.10)$$

egyenlet alakjában írható fel.

A fenti megállapítások alapján bármely K^a Killing-vektormező egyértelműen meghatározott K^a és $X_{ab} = \nabla_a K_b$ valamely M -beli pontban adott értékei által, hiszen (6.5.8) és (6.5.10), bármely folytonosan deriválható görbe mentén, egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszert határoznak meg a K_α és az $X_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha K_\beta$ komponensekre. Ez a rekonstrukciós eljárás azonban csak akkor működik, amikor eleve adott a K^a Killing-vektormező. Biztosan nem alkalmazható akkor, amikor egy Killing-vektormező létezését szeretnénk igazolni. Azonban, ahogy azt lentebb megmutatjuk, a (6.5.10) reláció kontrakciójából kapott

$$\nabla^a \nabla_a K_c + R_c{}^d K_d = 0 \quad (6.5.11)$$

egyenletet felhasználva – ez K^a -ra egy homogén lineáris hullámegyenlet – mégis ki tudjuk olvasni a kezdőadatokból a beléjük kódolt Killing-vektormezők létezését. Nyilvánvaló, hogy a (6.5.11) egyenletnek minden, az (M, g_{ab}) téridőn értelmezett Killing-vektor eleget tesz, ugyanakkor (6.5.11) nem minden megoldása Killing-vektormező (M, g_{ab}) felett.

Az alábbi tétel a (6.5.11) egyenlet – a g_{ab} metrika és a $\mathcal{T}_{(i)}$ mezők ismeretében meghatározható – kezdőadataira vonatkozó szükséges és elégséges feltételeket adja, amelyek azt biztosítják, hogy (6.5.11) megfelelő megoldása olyan Killing-vektormező legyen, amelyre nézve az anyagmezők is invariánsak.

6.5.1. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) a 6.5.1. alfejezetben meghatározott gravitáció és anyag csatolt rendszerét leíró téridő. Jelölje $D[\mathcal{C}]$ a \mathcal{C} kezdőfelület – egy alkalmas kezdőértéprobléma keretein belül meghatározott – Cauchy-függőségi tartományát. Ekkor K^a pontosan akkor lesz a $D[\mathcal{C}]$ tartományban nem-triviális Killing-vektormező úgy, hogy a $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)} = 0$ relációk is teljesülnek, ha az (6.5.11) egyenlethez található olyan $[K^a]$ nem-triviális kezdőadat, amelyre nézve az $[\mathcal{L}_K g_{ab}]$ és $[\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}]$ kifejezések azonosan eltűnnek a \mathcal{C} kezdőfelületen.⁸*

⁸Amint azt azonnal megmutatjuk, a $\mathcal{L}_K g_{ab}$ és $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}$ kifejezésekre vonatkozó fejlődési egyenletek (6.5.16) és (6.5.20), melyekre hivatkozva a $[\mathcal{L}_K g_{ab}]$ és $[\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}]$ kezdőadatok azonnal értelemmel telnek meg, bármely alkalmas kezdőértéprobléma keretein belül.

Bizonyítás: A tételben megfogalmazott feltétel szükséges volta triviális, hiszen a $\mathcal{L}_K g_{ab}$ és $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}$ mezők, a deriváltjaikkal együtt, eltűnnek a \mathcal{C} kezdőfelületen.

Annak megmutatása érdekében, hogy a feltételünk elegendő is, a következők szerint járhatunk el. Tegyük fel, hogy K^a eleget tesz a (6.5.11) egyenletnek, de különben egy tetszőleges vektormező. A (6.5.11) egyenlet kovariáns deriváltjának, illetve a kovariáns deriváltak kommutátorainak és a kontrahált Bianchi-azonosság [53, 115] felhasználásával megmutatható, hogy $\mathcal{L}_K g_{ab}$ a

$$\nabla^e \nabla_e (\mathcal{L}_K g_{ab}) = -2\mathcal{L}_K R_{ab} + 2R^e{}_{ab}{}^f (\mathcal{L}_K g_{ef}) + 2R^e{}_{(a} (\mathcal{L}_K g_{b)e}) \quad (6.5.12)$$

egyenletnek tesz eleget. Ezek után (6.5.2) Lie-deriváltját felhasználva azt kapjuk, hogy⁹

$$\mathcal{L}_K R_{ab} = \sum_{(i)} \left(\frac{\partial R_{ab}}{\partial \mathcal{T}_{(i)}} \right) \mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)} + \sum_{(i)} \left(\frac{\partial R_{ab}}{\partial (\nabla_e \mathcal{T}_{(i)})} \right) \mathcal{L}_K (\nabla_e \mathcal{T}_{(i)}) + \left(\frac{\partial R_{ab}}{\partial g_{ef}} \right) \mathcal{L}_K g_{ef}. \quad (6.5.13)$$

Tekintsük most a \mathcal{L}_K és ∇_a operátorok kommutátorait:

$$\mathcal{L}_K (\nabla_b \mathcal{T}_{(i)}) = \nabla_b (\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}) - \sum_{k=1}^{l_i} (\mathcal{T}_{(i)})_e^{[a_k]} [\nabla \mathcal{L}_K g]_{a_k}{}^e{}_b, \quad (6.5.14)$$

ahol a $(\mathcal{T}_{(i)})_e^{[a_k]}$ a $T_{(i)a_1 \dots a_{k-1} e a_{k+1} \dots a_{l_i}}$ kifejezés rövidített jelölésére szolgál, továbbá a

$$[\nabla \mathcal{L}_K g]_{a}{}^c{}_b = \frac{1}{2} g^{cf} \{ \nabla_a (\mathcal{L}_K g_{fb}) + \nabla_b (\mathcal{L}_K g_{af}) - \nabla_f (\mathcal{L}_K g_{ab}) \} \quad (6.5.15)$$

jelölést használtuk. Ekkor (6.5.12), (6.5.13) és (6.5.14) alapján $\mathcal{L}_K g_{ab}$ a

$$\begin{aligned} \nabla^e \nabla_e (\mathcal{L}_K g_{ab}) &= K_{ab} (\mathcal{L}_K g_{cd}) + L_{ab} (\nabla_c (\mathcal{L}_K g_{cd})) \\ &\quad + \sum_{(i)} M_{(i)ab} (\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}) + \sum_{(i)} N_{(i)ab} (\nabla_c (\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)})) \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

típusú egyenletnek tesz eleget, ahol K_{ab} , L_{ab} , $M_{(i)ab}$ és $N_{(i)ab}$ a külön jelzett változóik homogén, lineáris függvényei.

A következő lépésben azt mutatjuk meg, hogy ugyanilyen típusú egyenlet származtatható az $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}$ kifejezésekre is. Ennek belátása érdekében először is tekintsük a (6.5.1)

⁹Ha $T_{a_1 \dots a_k}$ és $S_{b_1 \dots b_\ell}$ külön-külön $(0, k)$ és $(0, \ell)$ típusú tenzormezők, akkor a $(\partial T_{a_1 \dots a_k} / \partial S_{b_1 \dots b_\ell})$ kifejezést egy (ℓ, k) típusú tenzormezőnek tekintjük. Ennek megfelelően a $(\partial T_{a_1 \dots a_k} / \partial S_{b_1 \dots b_\ell})$ és a $\mathcal{L}_K S_{b_1 \dots b_\ell}$ tenzormezők $(\partial T_{a_1 \dots a_k} / \partial S_{b_1 \dots b_\ell}) \mathcal{L}_K S_{b_1 \dots b_\ell}$ kontrakciója egy $(0, k)$ típusú tenzormezőt jelöl.

egyenlet K^a vektormező menti Lie-deriváltját, amit a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K \left(\nabla^e \nabla_e \mathcal{T}_{(i)} \right) &= (\mathcal{L}_K g^{ef}) \nabla_e \nabla_f \mathcal{T}_{(i)} + g^{ef} \mathcal{L}_K \left(\nabla_e \nabla_f \mathcal{T}_{(i)} \right) \\ &= \sum_{(j)} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{(i)}}{\partial \mathcal{T}_{(j)}} \right) \mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(j)} + \sum_{(j)} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{(i)}}{\partial (\nabla_c \mathcal{T}_{(j)})} \right) \mathcal{L}_K \left(\nabla_c \mathcal{T}_{(j)} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{(i)}}{\partial g_{ab}} \right) \mathcal{L}_K g_{ab} \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

alakban írhatunk fel. Ekkor a (6.5.14) kommutációs relációt kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K \left(\nabla_e \nabla_f \mathcal{T}_{(i)} \right) &= \nabla_e \nabla_f \left(\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)} \right) - \left(\nabla_c \mathcal{T}_{(i)} \right) \left[\nabla \mathcal{L}_K g \right]_f{}^c{}_e \\ &\quad - \sum_{k=1}^{l_i} \left[2 \left(\nabla_{(e} \mathcal{T}_{(i)} \right)_{c}^{[ak]} \left[\nabla \mathcal{L}_K g \right]_{a_k}{}^c{}_{|f)} + \left(\mathcal{T}_{(i)} \right)_{c}^{[ak]} \nabla_e \left(\left[\nabla \mathcal{L}_K g \right]_{a_k}{}^c{}_{|f)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

Vegyük észre, hogy az (6.5.19) egyenlet jobb oldalának utolsó tagja még nem az elvárt alakú, hiszen $\mathcal{L}_K g_{ab}$ -nek a másodrendű kovariáns deriváltját tartalmazza. Emiatt ez a tag megakadályozhatná annak igazolását is, hogy $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}$ a (6.5.16) egyenlethez hasonló kvázi-lineáris hullámegyenletnek tesz eleget. Éppen ezért figyelemreméltó, hogy $\mathcal{L}_K g_{ab} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a$, valamint a kovariáns deriváltak kommutátorainak alkalmazásával és a Bianchi-azonosság felhasználásával megmutatható, hogy (6.5.11) tetszőleges K^a megoldására a

$$g^{ef} \nabla_e \left(\left[\nabla \mathcal{L}_K g \right]_{a_k}{}^c{}_{|f)} \right) = \frac{1}{2} g^{cd} \left\{ \nabla^e \nabla_e (\mathcal{L}_K g_{a_k d}) - R_d{}^e (\mathcal{L}_K g_{a_k e}) + R_{a_k}{}^e (\mathcal{L}_K g_{ed}) \right\} \quad (6.5.19)$$

reláció teljesül. Így a (6.5.13) – (6.5.19) egyenletek felhasználásával megmutatható, hogy $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}$ valóban egy

$$\begin{aligned} \nabla^e \nabla_e \left(\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)} \right) &= \mathcal{P}_{(i)} (\mathcal{L}_K g_{cd}) + \mathcal{Q}_{(i)} (\nabla_b (\mathcal{L}_K g_{cd})) \\ &\quad + \sum_{(j)} \mathcal{R}_{(i)(j)} \left(\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(j)} \right) + \sum_{(j)} \mathcal{S}_{(i)(j)} \left(\nabla_c (\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(j)}) \right) \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

alakú egyenletnek tesz eleget, ahol $\mathcal{P}_{(i)}$, $\mathcal{Q}_{(i)}$, $\mathcal{R}_{(i)(j)}$ és $\mathcal{S}_{(i)(j)}$ a külön jelzett változók homogén, lineáris függvényei, feltéve, hogy K^a a (6.5.11) egyenlet megoldása.

A bizonyításunk zárásaként tekintsünk egy nemtriviális $[K^a]$ kezdőadatot a \mathcal{C} kezdőfelületen, amelyre a (6.5.16) és (6.5.20) fejlődési egyenletekhez tartozó $[\mathcal{L}_K g_{ab}]$ és $[\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}]$ kezdőadatok azonosan eltűnnek a \mathcal{C} kezdőfelületen. Mivel a (6.5.16) és (6.5.20) fejlődési egyenletek a $\mathcal{L}_K g_{ab}$ és $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}$ változókra egy csatolt, homogén, lineáris egyenletrendszer alakot vesznek – ezekről tudjuk, hogy zérus kezdőadat esetén, a megoldásuk azonosan nulla

–, azt kapjuk, hogy $\mathcal{L}_K g_{ab} \equiv 0$ és $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)} \equiv 0$ mindenütt, ahol a (6.5.11) egyenlet megoldása létezik. Az, hogy ez a tartomány éppen a $D[\mathcal{C}]$ Cauchy-függőségi tartománnyal esik egybe, a következőképpen látható be. Mivel (6.5.11) maga is egy homogén, lineáris egyenlet, megmutatható – például a [76]-os hivatkozás 266. oldalán ismertetett „lokális megoldások összeillesztésének” módszerét alkalmazva –, hogy (6.5.11) bármely megoldása a \mathcal{C} kezdőfelület teljes $D[\mathcal{C}]$ Cauchy-függőségi tartományára kiterjeszthető. \square

Figyelemreméltó, hogy az (6.5.1), (6.5.2), (6.5.11), (6.5.16) és (6.5.20) evolúciós egyenletek – a fentebb ismertetett hiperbolikus redukciós eljárás felhasználásával – kvázi-lineáris hullámegyenletek csatolt rendszerévé írhatók át. Érdeemes megemlíteni, hogy az imént bizonyított tétel feltételeinek teljesülése azonnal ellenőrizhető, mielőtt a (6.5.1) és (6.5.2) fejlődési egyenletekre vonatkozó, $[g_{ab}]$ és $[\mathcal{T}_{(i)}]$, kezdőadatok ismertek a \mathcal{C} kezdőfelületen, hiszen ekkor a téregyenletek segítségével g_{ab} és $\mathcal{T}_{(i)}$ komponenseinek tetszőleges rendű deriváltjai is meghatározhatók a \mathcal{C} felületen. Mindezen észrevételek és a 6.5.1. tétel figyelembe vételével kapjuk az alábbi állítás bizonyítását.

6.5.1. Következmény. *Jelölje $D[\mathcal{C}]$ – valamely alkalmas kezdőértékprobléma keretein belül – a (6.5.1) és (6.5.2) fejlődési egyenletekre vonatkozóan a \mathcal{C} kezdőfelületen meghatározott $[g_{ab}]$ és $[\mathcal{T}_{(i)}]$ kezdőadatokhoz tartozó maximális Cauchy-függőségi tartományt. Ekkor $D[\mathcal{C}]$ felett pontosan akkor létezik olyan nemtriviális K^a Killing-vektormező, amelyre a $\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)} = 0$ feltételek is teljesülnek, ha a (6.5.11) egyenlethez található olyan $[K^a]$ nemtriviális kezdőadatrendszer, hogy a (6.5.16) és (6.5.20) egyenletekre vonatkozó $[\mathcal{L}_K g_{ab}]$ és $[\mathcal{L}_K \mathcal{T}_{(i)}]$ kezdőadatok azonosan eltűnnek a \mathcal{C} kezdőfelületen.*

Végül megmutatjuk, hogy a jelen fejezet vizsgálatainak középpontjában álló elektrovákuum feketelyuk-téridők esetében hogyan alkalmazhatjuk a fenti általános eredményeket. Először is jegyezzük meg, hogy a (5.2.2) téregyenletek felírhatók a sokkal kompaktabb $dF = 0$ és $d^\dagger F = 0$ alakban is, ahol d és d^\dagger a Hodge-deRham-operátort és annak $d^\dagger = *d*$ adjungáltját jelöli. Így a szabad elektromágneses teret ábrázoló F_{ab} Maxwell-tenzor eleget tesz a $(d \cdot d^\dagger + d^\dagger \cdot d)F = 0$ egyenletnek, melyet – az absztrakt index jelölésre visszatérve, valamint a metrikával kompatibilis differenciáloperátort felhasználva – a

$$\nabla^e \nabla_e F_{ab} + 2 R_{[a}{}^f F_{b]f} - 2 R_{[a}{}^e{}_{b]}{}^f F_{ef} = 0 \quad (6.5.21)$$

hullámegyenletként írhatunk fel, míg a Ricci-tenzort, (5.2.3) és T_{ab} spúrmentessége alapján, a

$$R_{ab} = \left\{ F_{ae} F_b{}^e - \frac{1}{4} g_{ab} (F_{ef} F^{ef}) \right\} \quad (6.5.22)$$

alakban írhatjuk fel.

Vegyük észre, hogy (6.5.21) nem a (6.5.1) egyenlet alakjában adott. Ennek ellenére, mivel a (6.5.21) egyenlet bal oldalán álló két utolsó tag éppen a

$$g^{ef} [(\nabla_e \nabla_a - \nabla_a \nabla_e) F_{bf} - (\nabla_e \nabla_b - \nabla_b \nabla_e) F_{af}] \quad (6.5.23)$$

kifejezéssel egyezik meg, a (6.5.19) kapcsán alkalmazott érvelés értelemszerű alkalmazásával – kihasználva például, hogy $(\nabla_e \nabla_a - \nabla_a \nabla_e) \mathcal{L}_K F_{bf} = R_{cab}{}^d \mathcal{L}_K F_{df} + R_{eaf}{}^d \mathcal{L}_K F_{bd}$ – megmutatható, hogy az $\mathcal{L}_K F_{ab}$ -re vonatkozó fejlődési egyenlet is a (6.5.20) egyenlet alakjában adható meg.

Mindez, a fent felidézett eredményekkel együtt, adja az alábbi állítást bizonyítását.

6.5.2. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) a 6.2. és a 6.4.2. alfejezetekben meghatározott stacionárius, elektrovákuum feketelyuk-téridő. Legyen \mathcal{C} kezdőfelület valamely alkalmas kezdőérték-problémában. Ekkor a \mathcal{C} felület $D[\mathcal{C}]$ Cauchy-függőségi tartományában pontosan akkor létezik olyan nemtriviális K^a Killing-vektormező, amelyre nézve a Maxwell-tenzor is invariáns – azaz $\mathcal{L}_K F_{ab} = 0$ teljesül $D[\mathcal{C}]$ felett –, ha található (6.5.11)-hez olyan nemtriviális $[K^a]$ kezdőadat, hogy mind $[\mathcal{L}_K g_{ab}]$, mind pedig $[\mathcal{L}_K F_{ab}]$ azonosan zérus legyen a \mathcal{C} kezdőfelületen.*

6.6. A Killing-vektormező létezése a sima esetben

Ebben a részben azt szeretnénk megmutatni, hogy a 6.4.2. tétel állításának megfelelően, a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező nemcsak az analitikus-, de a fizikailag sokkal elfogadhatóbb sima esetben is létezik. A bizonyítás során felmerülő legnagyobb technikai nehézség azzal kapcsolatos, hogy a téridő geometriájára, illetve az elektromágneses mezőre vonatkozó, használható információ csak az \mathcal{N} jövő eseményhorizonton áll rendelkezésünkre, ugyanakkor az \mathcal{N} hiperfelület önmagában nem képez kezdőfelületet egyetlen alkalmas kezdőérték-problémában sem. Ezt a problémát oldja fel az alábbi eredmény, melynek értelmében az \mathcal{N} felület kiegészíthető úgy, hogy a karakterisztikus kezdőérték-problémához tartozó alkalmas kezdőfelületet és rajta jól meghatározott kezdőadatokat kapjunk.

6.6.1. Tétel. *Legyen $(\tilde{\mathcal{O}}, g_{ab} |_{\tilde{\mathcal{C}}})$ a 6.2. és a 6.4.2. alfejezetekben meghatározott sima, stacionárius, elektrovákuum feketelyuk-téridő elemi téridőkörnyezete. Tegyük fel, hogy az $\tilde{\mathcal{N}}$ eseményhorizont nemdegenerált, azaz $\kappa_o > 0$ (lásd a (6.4.24) egyenletet). Ekkor $\tilde{\mathcal{N}}$ -nak mindig létezik olyan \mathcal{U} nyílt környezete, amelyre az alábbiak teljesülnek:*

- (1) *Az $(\mathcal{U}, g_{ab} |_{\mathcal{U}}, F_{ab} |_{\mathcal{U}})$ résztéridő kiterjeszthető egy olyan sima $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^*, F_{ab}^*)$ elektrovákuum téridőbe, melyben létezik egy \mathcal{H}^* kettéhasadó fényszerű felület – azaz \mathcal{H}^**

két olyan, \mathcal{H}_1^* és \mathcal{H}_2^* , fényszerű hiperfelület uniójaként adható meg, melyek egymást egy kétdimenziós térszerű \mathcal{S}^* felületben metszik – úgy, hogy $\tilde{\mathcal{N}}$ az \mathcal{H}_1^* hiperfelület azon részalmazának felel meg, mely \mathcal{S}^* kauzális jövőjében fekszik, továbbá $I^+[\mathcal{S}^*] = \mathcal{U} \cap I^+[\tilde{\mathcal{N}}]$.

(2) Mindezekon felül \mathcal{O}^* felett található egy olyan k^{*a} vektormező, mely érinti a \mathcal{H}_1^* és \mathcal{H}_2^* felületek fényszerű generátorait, továbbá az $\mathcal{L}_{k^*}g_{ab}^*$ és $\mathcal{L}_{k^*}F_{ab}^*$ Lie-deriváltak azonosan zérus értéket vesznek fel a \mathcal{H}_1^* és \mathcal{H}_2^* fényszerű hiperfelületeken.

Bizonyítás: A (6.4.25) egyenletnek megfelelően a $\tilde{\mathcal{O}}$ elemi téridőkörnyezetben a g_{ab} metrikát a

$$g_{ab} = g_{ab}^{(\circ)} + \gamma_{ab} \quad (6.6.1)$$

alakban írhatjuk fel, ahol – a 6.4.2. tétel állításának megfelelően – a $g_{ab}^{(\circ)}$ metrika $g_{\mu\nu}^{(\circ)}$ Gauss-féle fényszerű koordinátákra vonatkozó komponensei u -függetlenek, míg a γ_{ab} tenzor $\gamma_{\mu\nu}$ komponensei, valamint azok tetszőleges rendű r -deriváltjai eltűnnek az $r = 0$ egyenlettel adott $\tilde{\mathcal{N}}$ felületen. Figyelembe véve, hogy a $\gamma_{\mu\nu}$ komponensek u -periodikusak, ezekre úgy is tekinthetünk, mintha azok az (u, x^3, x^4) koordinátákban csak egy kompakt halmaz fölött lennének értelmezve, és így belátható, hogy tetszőleges $j \geq 0$ egész értékhez mindig létezik alkalmas C_j állandó úgy, hogy

$$|\gamma_{\mu\nu}| < C_j |r|^j \quad (6.6.2)$$

teljesül $\tilde{\mathcal{O}}$ felett. Hasonló relációk bizonyíthatók $\gamma_{\mu\nu}$ tetszőleges rendű, parciális deriváltjai tekintetében is.

A (6.6.2) relációk folytán az is igaz, hogy ha az $\tilde{\mathcal{N}}$ felület $\tilde{\mathcal{U}}$ nyílt környezetét megfelelően kicsinyre választjuk – az $\tilde{\mathcal{U}}$ nyílt környezet pontos meghatározása megtalálható a 3. fejezet 3.1.1. tételének bizonyításában –, akkor $g_{ab}^{(\circ)}$ biztosan Lorentz-szignatúrájú metrika $\tilde{\mathcal{U}}$ felett. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\tilde{\mathcal{N}}$ egy Killing-horizont, valamint $k^a = (\partial/\partial u)^a$ Killing-vektormező a $g_{ab}^{(\circ)}$ metrikára nézve. Így, a 3.1.1. tétel értelmében, az $(\tilde{\mathcal{U}}, g_{ab} |_{\tilde{\mathcal{U}}})$ résztéridőhöz található olyan sima $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^{(\circ)*})$ téridő, mely az előbbinek egy sima kiterjesztése, továbbá $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^{(\circ)*})$ -ban található egy $\tilde{\mathcal{H}}^*$ kettéhasadó Killing-horizont, amelyre a tételünk állításában – mint általános kettéhasadó felületre – megfogalmazott feltételek teljesülnek. Ezen felül, a 4.2.1 tétel értelmében – lásd a [92] munkánk 4.2. tételét is –, az $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^{(\circ)*})$ kiterjesztés mindig megválasztható úgy, hogy a k^a Killing-vektormező k^{*a} kiterjesztettje \mathcal{O}^* felett mindenütt Killing-vektormező legyen. Az is mindig elérhető, hogy az $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^{(\circ)*})$ téridő az $\tilde{\mathcal{S}}$ kettéhasadási felületre, mint szimmetriatengelyre, vonatkozó tükrözésre nézve invariáns legyen. A továbbiakban feltesszük, hogy az $(\mathcal{O}^*, g_{ab}^{(\circ)*})$ kiterjesztés rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal.

Jelöljük most $(u_{(\circ)}, r_{(\circ)}, x_{(\circ)}^3, x_{(\circ)}^4)$ -el a $g_{ab}^{(\circ)}$ metrika által meghatározott Gauss-féle fényszerű koordinátákat $\tilde{\mathcal{U}}$ -ban, amelyekre az $r_{(\circ)} = r = 0, u_{(\circ)} = u, x_{(\circ)}^3 = x^3, x_{(\circ)}^4 = x^4$ teljesül $\tilde{\mathcal{N}}$ -on. Mivel γ_{ab} sima és u -periodikus $\tilde{\mathcal{U}}$ felett, az $u_{(\circ)}, r_{(\circ)}, x_{(\circ)}^3$ és $x_{(\circ)}^4$ koordinátafüggvények is sima és u -periodikus függvényei az (u, r, x^3, x^4) koordinátáknak. Az is igaz, hogy az $(u_{(\circ)}, r_{(\circ)}, x_{(\circ)}^3, x_{(\circ)}^4)$ és az (u, r, x^3, x^4) koordináták között kapcsolatot teremtő koordináta-transzformáció Jacobi-mátrixa korlátos $\tilde{\mathcal{U}}$ felett, és így létezik olyan a állandó, hogy $|r| \leq a |r_{(\circ)}|$ az $\tilde{\mathcal{U}}$ nyílt környezet felett. Így a γ_{ab} tenzor $g_{ab}^{(\circ)}$ metrikához tartozó Gauss-féle fényszerű koordinátáira vonatkozó $\gamma_{\mu\nu\circ}$ komponensei is, tetszőleges $j \geq 0$ egész értékre, eleget tesznek a

$$|\gamma_{\mu\nu\circ}| < C'_j |r_{(\circ)}|^j \quad (6.6.3)$$

egyenlőtlenségnek.

Jelöljük (U, V) -vel a $g_{ab}^{(\circ)}$ metrika által, a 3. fejezetben leírtak szerint, értelmezett Kruskal-típusú koordinátákat [91, 92]. Ezen koordináták definíciójuknak megfelelően olyanok, hogy \mathcal{O}^* -nak pontosan azon pontjai felelnek meg $\tilde{\mathcal{U}}$ -nak, amelyekre $U > 0$, továbbá a kettéhasadási felületre, mint szimmetriatengelyre, vett tükrözés a $U \rightarrow -U, V \rightarrow -V$ hozzárendelési szabály segítségével adható meg. A $g_{ab}^{(\circ)*}$ metrikához tartozó \mathcal{H}^* Killing-horizontot kifestítő \mathcal{H}_1^* és \mathcal{H}_2^* fényszerű hiperfelületeket a $V = 0$, illetve az $U = 0$ egyenletekkel adhatjuk meg.

A (3.1.11) egyenlet alapján azt is tudjuk, hogy léteznie kell olyan C pozitív, valós számnak, amelyre

$$|r_{(\circ)}| < C |UV| \quad (6.6.4)$$

teljesül $\tilde{\mathcal{U}}$ -ban. Emiatt azt kapjuk, hogy tetszőleges j -re

$$|\gamma_{\mu\nu\circ}| < C''_j |UV|^j, \quad (6.6.5)$$

továbbá hasonló egyenlőtlenségek teljesülnek a $\gamma_{\mu\nu\circ}$ komponensek $(u_{(\circ)}, r_{(\circ)}, x_{(\circ)}^3, x_{(\circ)}^4)$ koordináták szerinti, tetszőleges rendű deriváltjaira is. Ezek után, az Eddington- és Kruskal-féle koordináták közötti (3.1.6) transzformációs összefüggést felhasználva, megmutatható, hogy γ_{ab} Kruskal-féle koordinátákra vonatkozó komponenseinek határértéke egyenletesen nulla az $U \rightarrow 0$ határátmenetben, az (V, x^3, x^4) koordináták tetszőleges kompakt tartománya felett. Következésképpen az $\tilde{\mathcal{U}}$ felett értelmezett γ_{ab} tenzor sima módon terjeszthető ki az $U = 0$ határfelülethez, mely \mathcal{O}^* -ban éppen a \mathcal{H}_2^* fényszerű hiperfelületnek felel meg.

Ekkor – a kettéhasadási felületre, mint szimmetriatengelyre, vett tükrözési transzformációt alkalmazva – γ_{ab} kiterjeszthető az $U < 0$ tartományra, és így az egész \mathcal{O}^* felett

értelmezett, sima γ_{ab}^* tenzormezőhöz jutunk. Tekintsük most \mathcal{O}^* felett a

$$g_{ab}^* = g_{ab}^{(\circ)*} + \gamma_{ab}^* \quad (6.6.6)$$

relációval értelmezett g_{ab}^* tenzormezőt, mely sima és szintén invariáns a kettéhasadási felületre, mint szimmetriatengelyre, vett tükrözési transzformációra nézve. Továbbá, mivel γ_{ab}^* eltűnik a \mathcal{H}_1^* és \mathcal{H}_2^* fényszerű hiperfelületeken, \mathcal{H}^* egy kettéhasadó fényszerű felület g_{ab}^* -re nézve, továbbá k^{*a} mindenütt merőleges a \mathcal{H}_1^* és \mathcal{H}_2^* fényszerű hiperfelületekre. Ezen felül az is igaz, hogy $\mathcal{L}_{k^*} g_{ab}^* = 0$ \mathcal{H}^* -on, hiszen k^{*a} Killing-vektormező a $g_{ab}^{(\circ)*}$ metrikára nézve, azaz $\mathcal{L}_{k^*} g_{ab}^{(\circ)*} = 0$ $\tilde{\mathcal{U}}$ felett, valamint γ_{ab}^* és tetszőleges rendű deriváltjai eltűnnek \mathcal{H}^* -on. Így azt kapjuk, hogy az $\mathcal{L}_{k^*} g_{ab}^* = 0$ reláció teljesül mindenütt a \mathcal{H}_1^* és \mathcal{H}_2^* fényszerű hiperfelületeken.

Ezek után – felhasználva azt, hogy (6.4.24)-nek megfelelően $F_{uA}|_{\tilde{\mathcal{N}}} = 0$ – egy teljesen analóg érveléssel megmutatható, hogy az F_{ab} Maxwell-tenzor is sima módon terjeszthető ki \mathcal{O}^* -ra úgy, hogy a kiterjesztésként kapott F_{ab}^* is invariáns a kettéhasadási felületre, mint szimmetriatengelyre, vett tükrözési transzformációra nézve, továbbá a $\mathcal{L}_{k^*} F_{ab}^* = 0$ reláció is teljesül a \mathcal{H}^* felületen. Mivel a feltételeink szerint a (g_{ab}, F_{ab}) páros eleget tesz a forrásmentes Einstein-Maxwell-egyenleteknek, valamint a kiterjesztés során kapott (g_{ab}^*, F_{ab}^*) páros mindkét tagja invariáns a kettéhasadási felületre, mint szimmetriatengelyre, vett tükrözési transzformációra, az elektrovákuumra vonatkozó téregyenletek teljesülnek \mathcal{O}^* -nak az $U < 0$ egyenlőtlenség által kijelölt részén is. Végül a folytonosságra hivatkozva az is látható, hogy a (g_{ab}^*, F_{ab}^*) páros eleget tesz a forrásmentes Einstein-Maxwell-egyenleteknek az $U = 0$ hiperfelületen is, és így \mathcal{O}^* felett mindenütt. \square

Fontos annak hangsúlyozása, hogy a bizonyítás során alkalmazott téridő-kiterjesztés csak a $\kappa_o \neq 0$ esetben valósítható meg, azaz az imént bizonyított tétel biztosan nem alkalmazható a degenerált eseményhorizonttal rendelkező feketelyuk-téridők esetében.

6.6.2. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) egy, a 6.2. és a 6.4.2. alfejezetekben meghatározott, sima, stacionárius, elektrovákuum feketelyuk-téridő. Tegyük fel, hogy az \mathcal{N} jövő eseményhorizont fényszerű generátorai múltirányban affín értelemben inkomplettek. Ekkor \mathcal{N} -hez található olyan M -beli \mathcal{U} nyílt környezet, hogy a $J^+[\mathcal{N}] \cap \mathcal{U}$ halmaz felett létezik olyan k^a vektormező, amely egy sima Killing-vektormező $J^+[\mathcal{N}] \cap \mathcal{U}$ felett, és amely merőleges az \mathcal{N} fényszerű hiperfelületre, azaz \mathcal{N} Killing-horizont k^a -ra nézve. Ezen felül, az elektromágneses tér is invariáns, azaz $\mathcal{L}_k F_{ab} = 0$ mindenütt a $J^+[\mathcal{N}] \cap \mathcal{U}$ halmaz felett.*

Bizonyítás: A 6.2. alfejezetben rögzített feltételeink alapján \mathcal{N} az $\mathbb{R} \times \Sigma$ szorzatalakban írható fel, ahol Σ kompakt és összefüggő, így \mathcal{N} mindig lefedhető végesen sok $\tilde{\Sigma}_{(i)}$ lokális koordinátakörnyezettel. Jelölje $\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}$ az \mathcal{N} horizont $\tilde{\Sigma}_{(i)}$ lokális szelésekhez tartozó

azon szekcióit, melyeket \mathcal{N} $\tilde{\Sigma}_{(i)}$ pontjain keresztül futó generátorai feszítenek ki. Minden ilyen $\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}$ szeléshez külön-külön található olyan $(\tilde{\mathcal{O}}_{(i)}, g_{ab} |_{\tilde{\mathcal{O}}_{(i)}})$ elemi téridőkörnyezet, mely a 6.6.1. tétel összes feltételének eleget tesz, hiszen a 6.4.2. állítás bizonyítását követő megjegyzés értelmében – Σ összefüggősége folytán – az $\tilde{\mathcal{O}}_{(i)}$ elemi téridőkörnyezetekhez tartozó felületi gravitáció értéke, az i index értékétől függetlenül, ugyanaz a $\kappa_o > 0$ állandó. Jelölje $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ az $\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}$ szekció azon nyílt környezetét, amelyhez a 6.6.1. tétel állításának megfelelően létezik olyan $(\mathcal{O}_{(i)}^*, g_{ab}^{(i)*}, F_{ab}^{(i)*})$ elektrovákuum téridő, mely az $(\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}, g_{ab} |_{\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}}, F_{ab} |_{\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}})$ elektrovákuum téridőnek olyan kiterjesztése, amelyben található egy $\mathcal{H}_{(i)}^*$ kettéhasadó fényszerű felület, továbbá létezik olyan $k_{(i)}^{*a}$ vektormező $\mathcal{O}_{(i)}^*$ -on, melyre mind $\mathcal{L}_{k_{(i)}^*} g_{ab}^{(i)*}$, mind pedig $\mathcal{L}_{k_{(i)}^*} F_{ab}^{(i)*}$ eltűnik $\mathcal{H}_{(i)}^*$ -on.

Ekkor az előző alfejezetben bizonyított 6.5.2. tétel alapján a

$$\nabla^e \nabla_e K_{(i)}^a + R^a_e K_{(i)}^e = 0 \quad (6.6.7)$$

egyenlet $[K_{(i)}^a] = k_{(i)}^{*a} |_{\tilde{\mathcal{H}}_{(i)}^*}$ kezdőadathoz tartozó $K_{(i)}^a$ megoldása biztosan Killing-vektormező a $\mathcal{H}_{(i)}^*$ kettéhasadó fényszerű felület $\mathcal{D}[\mathcal{H}_{(i)}^*]$ Cauchy-függőségi tartományában úgy, hogy $\mathcal{D}[\mathcal{H}_{(i)}^*]$ felett a Maxwell-tenzor is invariáns a $K_{(i)}^a$ által indukált izometriatranszformációkra nézve.

Tekintsük most a $K_{(i)}^a$ Killing-vektormezőnek az $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ nyílt környezetre való megszorítottját. Jelöljük az így kapott Killing-vektormezőt $\tilde{k}_{(i)}^a$ -val. Azonnal adódik, hogy $\tilde{k}_{(i)}^a$ a $\mathcal{D}[\mathcal{H}_{(i)}^*]$ Cauchy-függőségi tartomány és $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ közös részén értelmezett. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez $\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}$ pontosan azon egyoldalú környezetének felel meg, melyet a $J^+[\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}] \cap \tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ metszet határoz meg.

Végül tekintsük a $(\tilde{\mathcal{O}}_{(i)}, g_{ab} |_{\tilde{\mathcal{O}}_{(i)}})$ típusú elemi téridőkörnyezetekhez a $J^+[\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}] \cap \tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ halmazok felett külön-külön létező $\tilde{k}_{(i)}^a$ Killing-vektormezőket. A 3.1.1. tétel bizonyításának utolsó részében alkalmazott érvelés értelemszerű alkalmazásával megmutatható, hogy az $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)}$ környezetek az \mathcal{N} felület $\mathcal{U} = \{\cup_{(i)} \tilde{\mathcal{U}}_{(i)}\} / \mathcal{R}$ alakban meghatározott, nyílt környezetévé állnak össze. Ezen felül bármely i, j párra, amikor $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)} \cap \tilde{\mathcal{U}}_{(j)} \neq \emptyset$, a $\tilde{k}_{(i)}^a$ és $\tilde{k}_{(j)}^a$ vektormezők szükségképpen egybeesnek az $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)} \cap \tilde{\mathcal{U}}_{(j)}$ metszeten, hiszen a kezdőadatokat meghatározó $k_{(i)}^{*a}$ és $k_{(j)}^{*a}$ vektormezők egybeesnek az $\tilde{\mathcal{N}}_{(i)} \cap \tilde{\mathcal{N}}_{(j)}$ felületen, ami – a (6.6.7) egyenlet megoldásainak egyértelműsége miatt – garantálja a megoldások egybeesését a $\mathcal{D}[\tilde{\mathcal{N}}_{(i)}] \cap \mathcal{D}[\tilde{\mathcal{N}}_{(j)}]$ halmazon, és így az $\tilde{\mathcal{U}}_{(i)} \cap \tilde{\mathcal{U}}_{(j)}$ metszet felett is. Következésképpen a $\tilde{k}_{(i)}^a$ lokálisan értelmezett Killing-vektormezők a tételünk állításának megfelelő k^a Killing-vektormezővé állnak össze az \mathcal{N} felület $J^+[\mathcal{N}] \cap \mathcal{U}$ alakban meghatározott féloldali környezetében. \square

7. fejezet

A feketelyukak topológiája

Az Einstein-elmélet feketelyuk-fizikájának egyik kulcsfontosságú eredménye Hawking feketelyuk-topológia tétele [54], melynek értelmében minden összefüggő, a feketelyuk-tartományt a téridő más részeitől elválasztó dinamikai horizont (globális) szelése egy kétdimenziós gömbfelület topológiájával rendelkezik. Ezen tételét Hawking a következő indirekt módon bizonyította: megmutatta, hogy ha a domináns energiafeltétel teljesül, akkor bármely \mathcal{S} legkülső marginális csapdafelület deformálható – a dinamikai horizontot az \mathcal{S} felületben transzverzálisan metsző, kétparaméteres, fényszerű geodetikuskongruencia elemei mentén – a feketelyuk-tartomány komplementer halmazába úgy, hogy ott – annak ellenére, hogy \mathcal{S} a legkülső marginális csapdafelület – az így nyert deformált felület jövő csapdafelület lesz, hacsak az \mathcal{S} felület $\chi_{\mathcal{S}}$ Euler-karakterisztikája nem pozitív.

Érdekes felidézni, hogy a Gauss-Bonnet-tételnek megfelelően minden négydimenziós téridőben lévő kétdimenziós felület Euler-karakterisztikáját, illetve $g_{\mathcal{S}}$ „genuszát” az \mathcal{S} felületen indukált q_{ab} metrika R_q skalár görbület integrálja segítségével, a

$$2\pi\chi_{\mathcal{S}} = 4\pi(1 - g_{\mathcal{S}}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} R_q \epsilon_q \quad (7.0.1)$$

összefüggés által értelmezzük.

Gibbons [50] és Woolgar [119] majdnem három évtizeddel Hawking feketelyuk-topológia tételének megjelenését követően, Hawking eredeti bizonyításának egy módosított változatának segítségével, egy genuszról függő alsó korlátot adtak meg a topológiai feketelyukak – ezekre Hawking bizonyítása direkt módon nem alkalmazható – entrópiájára.

Ezt követően, lényegében a húrelmélet és az Einstein-elmélet magasabb dimenziós általánosításait vizsgáló kutatócsoportok részéről megfogalmazódó érdeklődéstől ösztönözve, Galloway és munkatársai [15, 43, 44, 45] ugyan több lépcsőben, mind Hawking feketelyuk-topológia tételének, mind pedig Gibbons és Woolgar topológiai feketelyukakra vonatkozó

eredményeinek általánosítását származtatták. Fontos kiemelni, hogy ezek az általánosítások kivétel nélkül az $n \geq 4$ -dimenziós Einstein-elméletre és mindig csak a legkülső marginális csapdázott felületek topológiai tulajdonságaira vonatkoztak.

Ebben a fejezetben az ide kapcsolódó, nemrégiben elért saját eredményeim bemutatása található. Az első munkában [100] Hawking feketelyuk-topológia tételének Galloway-ék által megadott általánosításaira egy olyan egyszerű és önmagában is érthető új bizonyítást sikerült adnom, mely nyilvánvalóvá tette azt is, hogy az általánosított tételek a korábban gondoltnál szélesebb keretek között is érvényesek. Ezt követően megmutattam [101], hogy az általam alkalmazott bizonyítási módszer segítségével a [100]-ben megfogalmazott eredmények akkor is érvényesek, ha a marginálisan csapdázott felületek mellett nemcsapdázott felületekre is alkalmazzuk őket. Az utóbbi eredmény fontosságát jól érzékelteti az, hogy a nemcsapdázott felületek előfordulási gyakorisága sokkal nagyobb még a feketelyuk-téridőkben is, ugyanakkor rengeteg olyan téridőt ismerünk, ahol nincs is csapdázott felület, miközben bennük mindenhol található nemcsapdázott felületek. Egy további friss felismerésem szerint – ennek bizonyítása is megtalálható a fejezet későbbi részeiben – bármely szigorúan stabil felületre – függetlenül attól, hogy csapdázott, marginális, vagy nemcsapdázott felületet tekintünk – alkalmazható az imént megfogalmazott állítás.

7.1. Hawking tételének általánosításai

Hawking eredményének magasabb dimenziós téridőkre történő általánosítása során a legfontosabb technikai nehézséget az okozza, hogy amikor \mathcal{S} valamely n -dimenziós téridőben egy $s = n - 2 \geq 3$ dimenziós felület, akkor a $R^{(s)}$ görbületi skalár integrálja önmagában nem elegendően informatív úgy, ahogyan az volt a négydimenziós téridők esetében. Az derült ki, hogy az ilyen felületek topológiai jellemzése során az Euler-karakterisztika helyett a Yamabe-invariánst kell alkalmaznunk. Az utóbbi fogalom a magasabb dimenziós felületek topológiai invariánsa, melyet a következőképpen értelmezhetünk.

Jelölje $[q]$ az \mathcal{S} -en értelmezett q_{ab} -val konformisan ekvivalens Riemann-metrikák halmazát. Ahogy azt Yamabe megjósolta, valamint később Trudinger, Aubin és Schoen bizonyította, minden kompakt és sima sokaságon létezik olyan \tilde{q}_{ab} állandó görbülettel rendelkező metrika az adott $[q]$ konform-osztályon belül, amelyre

$$R_{\tilde{q}} = Y(\mathcal{S}, [q]) \cdot \left(\int_{\mathcal{S}} \epsilon_{\tilde{q}} \right)^{-\frac{2}{s-2}}, \quad (7.1.1)$$

ahol a $[q]$ konform-osztályhoz tartozó $Y(\mathcal{S}, [q])$ Yamabe-konstanst értékét a

$$Y(\mathcal{S}, [q]) = \inf_{\hat{q} \in [q]} \frac{\int_{\mathcal{S}} R_{\hat{q}} \epsilon_{\hat{q}}}{\left(\int_{\mathcal{S}} \epsilon_{\hat{q}}\right)^{\frac{s-2}{s}}} = \inf_{u \in C^\infty(\mathcal{S}), u > 0} \frac{\int_{\mathcal{S}} \left[4 \frac{s-1}{s-2} (D^a u)(D_a u) + R_q u^2\right] \epsilon_q}{\left(\int_{\mathcal{S}} u^{\frac{2s}{s-2}} \epsilon_q\right)^{\frac{s-2}{s}}} \quad (7.1.2)$$

összefüggéssel határozzuk meg. Az imént alkalmazott formulában a $\hat{q} \in [q]$ metrikát a $\hat{q}_{ab} = u^{\frac{4}{s-2}} q_{ab}$ összefüggéssel definiáljuk, továbbá D_a és R_q az \mathcal{S} -en értelmezett q_{ab} metrikával kompatibilis kovariáns deriváló operátort és skalár görbületet jelöli. Ezek után az $\mathcal{Y}(\mathcal{S})$ Yamabe-invariánst a

$$\mathcal{Y}(\mathcal{S}) = \sup_{[q]} Y(\mathcal{S}, [q]) \quad (7.1.3)$$

összes konformis-osztályra vett szuprémum segítségével értelmezzük. Érdekes felidézni azt, hogy Aubin és Schoen alapvető eredményének értelmében az $\mathcal{Y}(\mathcal{S})$ Yamabe-invariáns minden esetben felülről korlátos, hiszen az biztosan kisebb, mint az ugyanolyan $s = n-2 \geq 3$ dimenziós metrikus gömbhöz tartozó Yamabe-konstans értéke. (7.1.2) alapján az is azonnal látszik, hogy a kétdimenziós felületek esetében a Yamabe-konstans definíciójából éppen az \mathcal{S} felület $\chi_{\mathcal{S}}$ Euler-karakterisztikájának 4π -szeresét kapjuk, azaz $Y(\mathcal{S}, [q]) = 4\pi\chi_{\mathcal{S}}$, az \mathcal{S} -en értelmezett Riemann-metrikák tetszőleges $[q]$ konform-osztálya esetén. Így a fenti definíció alapján, maga a Yamabe-invariáns is az Euler-karakterisztika 4π -szeresével egyezik meg.

Hawking feketelyuk-topológia tételének, valamint a Gibbons [50] és Woolgar [119] által közölt, a topológiai feketelyukak entrópiájának alsó korlátjára vonatkozó eredmények magasabbdimenziós Einstein-elméletben is érvényes, több lépésben elért általánosításai, valamint a vonatkozó részeredmények bizonyításai megtalálhatóak Galloway, Schoen, O'Murchadha és Cai munkáiban [15, 43, 44, 45]. A Galloway által vezetett kutatómunka eredményeit az alábbi állításban összegezhetjük.

7.1.1. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) egy $n \geq 4$ dimenziós téridő az Einstein-elméletben, azaz tegyük fel, hogy teljeseznek az Einstein-egyenletek*

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (7.1.4)$$

ahol Λ a kozmológiai állandót jelöli. Tegyük fel, hogy az anyag eleget tesz a domináns energiafeltételnek. Legyen továbbá \mathcal{S} egy Σ térszerű hiperfelületen található, szigorú értelemben stabil, legkülső marginális csapdafelület. Ekkor

(1) Ha $\Lambda \geq 0$, akkor \mathcal{S} Yamabe-típusa pozitív, azaz $\mathcal{Y}(\mathcal{S}) > 0$.

(2) Ha $\mathcal{Y}(\mathcal{S}) < 0$ és $\Lambda < 0$, akkor az \mathcal{S} felület $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \epsilon_q$ „felszínére” a

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \geq \left(\frac{|\mathcal{Y}(\mathcal{S})|}{2|\Lambda|} \right)^{\frac{s}{2}} \quad (7.1.5)$$

egyenlőtlenség teljesül.

Ezen eredmény első részének jelentősége akkor válik igazán nyilvánvalóvá, ha felidézünk Gromov és Lawson [51] méltán híres eredményét, melynek értelmében, ha az \mathcal{S} felület Yamabe-invariánsa pozitív, azaz amikor $\mathcal{Y}(\mathcal{S}) > 0$, akkor \mathcal{S} -n nem adható meg olyan metrika, melynek szekcionális görbülete nempozitív lenne. A szekcionális görbület előjele erősen behatárolja \mathcal{S} topológiai tulajdonságait. Az állítás második felének értelmében a (7.1.5) reláció éppen az $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ „felszínrel” arányos entrópiára ad – a Yamabe invariáns és a kozmológiai állandó segítségével – egy alsó korlátot.

Mielőtt tovább mennénk, érdemes kiemelni a következő koncepcionális pontot. A feketelyukak tulajdonságainak vizsgálatára irányuló tanulmányok többségében (lásd például a [2, 3, 15, 43, 44, 45] hivatkozásokat) az alapfeltevések azzal kezdődnek, hogy tekintsük a téridő egy olyan $\{\mathcal{C}_t\}$ „referencia foliázását”, ahol a \mathcal{C}_t felületek valójában (parciális) Cauchy-felületek. Ebben a vonatkozásban érdemes felidézni azt, hogy egy esetleg nem optimálisan választott $\{\mathcal{C}_t\}$ foliázással akár el is véthetjük valamely feketelyuk felismerését. Pontosabban fogalmazva, ahogy azt Wald és Iyer megmutatták [116], még a bevezetőben felidézett Schwarzschild-téridő maximális kiterjesztésében is található Cauchy-felületeknek olyan sorozata, melynek elemei tetszőlegesen közel kerülhetnek a szingularitáshoz, hogy közben a Cauchy-felületek egyike sem tartalmaz jövő értelemben csapdázott felületet. Éppen ezért az alábbiakban bemutatott eredményekkel kapcsolatban érdemes azt kiemelni, hogy – a bizonyítások egyszerűsége és az eredmények általánossága mellett – az alkalmazott megközelítésben végig arra törekedtem, hogy egyáltalán ne használjak referencia foliációkat.

7.2. Geometriai alapfeltevések

Az alkalmazott érvelés egyszerűsége lehetővé teszi azt, hogy lényegében a gravitáció tetszőleges elméletében érvényes állításokat bizonyíthassunk. Éppen ezért nem szorítjuk meg vizsgálatainkat azáltal, hogy a téridő geometriáját illetően bármiféle specifikus elmélet használatára vonatkozó feltevéssel élünk. Így a geometriát és az anyagmezőket – ha az utóbbiak egyáltalán jelen vannak a vizsgált téridőkben – csak a 2.1.5. definícióban megfogalmazott, általánosított domináns energiafeltétel használatán keresztül korlátoztam.

A fejezet fő eredményének megfogalmazása és bizonyítása előtt áttekintjük a marginálisan csapdázott, illetve a nemcsapdázott felületek irányíthatóságának lehetőségét, majd a szigorú értelemben vett stabilitási feltétel fogalmát vezetjük be.

7.2.1. A marginális és a nemcsapdázott felületek irányítása

Általában egy $(n - 2)$ -dimenziós felület esetében a kifelé-, illetve befelé mutató irányok fogalma nem jól definiált. Azonban, amint ez az alábbi érvelésből kiderül, a nem minimális, vagy nem maximális marginális csapdafelületek, illetve nemcsapdázott felületek esetén mégis lehetőség nyílik egy geometriai fogalomalkotásra.

Tekintsünk egy olyan $(n - 2)$ -dimenziós \mathcal{S} felületet, amely vagy marginálisan csapdázott, vagy pedig nemcsapdázott. A 2.1.4. alfejezetben megfogalmazott definíciónak megfelelően ekkor $\theta^{(\ell)} \geq 0$ és $\theta^{(n)} \geq 0$,¹ ahol ℓ^a és n^a az \mathcal{S} felületen értelmezett sima jövő- és múltirányú fényszerű vektormezők, amelyek eleget tesznek az $n^a \ell_a = 1$ normálási feltételnek, továbbá merőlegesek \mathcal{S} -re.

Tekintsük most azokat a Z^a vektormezőket, amelyeket a $Z^a = A\ell^a + Bn^a$ lineárkombináció segítségével adhatunk meg \mathcal{S} -en. Az ℓ^a és n^a irányítását felhasználva könnyen belátható, hogy bármely ilyen alakban megadott Z^a vektormező mindenütt sima és térszerű \mathcal{S} -en, ha az A és B függvények simák, továbbá vagy mindkettő pozitív, vagy mindkettő negatív \mathcal{S} -en.

Ezek után az alábbi érvelés segítségével belátható, hogy kvázi-lokális értelemben jól definiált kifelé-, illetve befelé mutató térszerű irányokról minden marginálisan csapdázott, illetve nemcsapdázott \mathcal{S} felület esetén tudunk beszélni. Tekintsük most egy tetszőlegesen rögzített A, B függvénypárra azt az \mathcal{S}_z egyparaméteres felületsereget, amelyet az \mathcal{S} felület Z^a vektormező menti Lie-elterjesztésével kapunk.

7.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a fent meghatározott Z^a vektormező \mathcal{S} -en kifelé, illetve befelé mutat, ha az \mathcal{S}_z felületek $\mathcal{A}(\mathcal{S}_z) = \int_{\mathcal{S}_z} \epsilon_q$ „felszínének” első variációja $\delta_Z \mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}(\mathcal{S}_z)}{dz} \Big|_{z=0}$ pozitív, illetve negatív, miközben $\delta_Z \mathcal{A}(\mathcal{S}') \geq 0$, illetve $\delta_Z \mathcal{A}(\mathcal{S}') \leq 0$ bármely $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ részhalmoz esetén.*

Annak belátása érdekében, hogy a fenti eljárásban kiválasztott vektormezők a nem minimális, vagy nem maximális marginális csapdafelületek, illetve nemcsapdázott felületek esetén mindig határozott irányítással rendelkeznek, érdemes felidézni, hogy bármely

¹Ezek az egyenlőtlenségek az általánosság elvesztésének veszélye nélkül feltehetőek, hiszen ha nem teljesednének, akkor az $\ell^a \rightarrow -\ell^a$ és $n^a \rightarrow -n^a$ transzformáció alkalmazása után már biztosan teljesülnek.

$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ részhalmaz esetén

$$\delta_Z \mathcal{A}(\mathcal{S}') = \int_{\mathcal{S}'} \mathcal{L}_{A\ell+Bn} \epsilon_q = \int_{\mathcal{S}'} [A\theta^{(\ell)} + B\theta^{(n)}] \epsilon_q. \quad (7.2.1)$$

Így $\delta_Z \mathcal{A}(\mathcal{S}')$ pontosan az elvart előjellel rendelkezik, amikor az A, B együtthatók egyszerre pozitívak, illetve negatívak \mathcal{S} -en.² Az is nyilvánvaló, hogy amikor mindkét fényszerű irányhoz tartozó $\theta^{(\ell)}$ és $\theta^{(n)}$ expanzió azonosan eltűnik \mathcal{S} -en – ez akkor következik be, ha az \mathcal{S} felület vagy minimális, vagy pedig maximális –, az imént bevezetett kvázilokális kifelé-, illetve befelé mutató térszerű irányok elvesztik jól definiáltságukat.

7.2.2. Szigorú értelemben vett stabilitás

A fejezet legfontosabb eredményének származtatása során szükségünk lesz az alábbi stabilitási feltételre. Mielőtt ezt megfogalmazzunk, vegyük észre, hogy a 2.1.4. alfejezetben az ℓ^a és n^a jövő-, illetve múltirányú fényszerű vektormezőkkel kapcsolatban megfogalmazott elvárások nem teszik a választást egyértelművé, hiszen amikor az ℓ^a és n^a fényszerű vektormezők külön-külön merőlegesek \mathcal{S} -re, továbbá rájuk $\ell^a n_a = 1$ normálási feltétel teljesül, akkor mindazok az ℓ'^a és n'^a fényszerű vektormezők is eleget tesznek ezen elvárásoknak, amelyeket az ℓ^a és n^a vektormezők, valamint a $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sima függvény segítségével a

$$\ell^a \rightarrow \ell'^a = e^{-v} \ell^a, \quad n^a \rightarrow n'^a = e^v n^a \quad (7.2.1)$$

„boost”-transzformáció felhasználásával állíthatunk elő. Ugyanakkor fontos annak hangsúlyozása is, hogy $\theta^{(\ell)}$ és $\theta^{(n)}$ expanziók előjele – és így a csapdázott, nemcsapdázott, vagy marginális felületek fogalma, valamint a kifelé, illetve befelé mutató térszerű irányok előző részben megfogalmazott, kvázilokális meghatározása – egyáltalán nem érzékeny az ℓ^a és n^a vektorok, (7.2.1) transzformációnak megfelelő, pozitív átskálázásaira.

7.2.2. Definíció. *Az $(n-2)$ -dimenziós \mathcal{S} kompakt, irányítható, határnélküli felületet szigorú értelemben stabilnak nevezzük, ha létezik olyan (7.2.1) alakú „boost”-transzformáció, amelynek végrehajtása után kapott ℓ'^a és n'^a vektormezők esetén, \mathcal{S} tetszőleges pontjában a*

$$\mathcal{L}_{n'} \theta^{(\ell')} + \theta^{(\ell')} \theta^{(n')} \geq 0 \quad (7.2.2)$$

egyenlőtlenség teljesül úgy, hogy a bal oldalon álló kifejezés nem azonosan nulla.

²Ugyan a (7.2.1) reláció középső kifejezése feltételezi, hogy az A, B függvények \mathcal{S} környezetében is értelmezettek, mégis – a Lie-deriválás és az integrálás tulajdonságai alapján – látható, hogy a kiterjesztés konkrét alakja a végeredmény szempontjából érdektelen.

Nyilvánvaló, hogy ez a definíció független bármiféle referencia foliáció használatától. A diszkusszió során azt is megmutatom, hogy ez a technikai feltétel egy nagyon egyszerű geometriai követelménnyel egyenértékű. Ott azt is megmutatom, hogy a formai különbségek ellenére a fent megfogalmazott feltételünk a [2, 3] referenciákban alkalmazott szigorú stabilitási feltétellel ekvivalens. Mielőtt továbbsmennénk, fontos annak hangsúlyozása, hogy a fenti definícióban megfogalmazott feltételek nem extrém elvárások. Például a Minkowski-téridő, vagy a Schwarzschild-téridő összes metrikus gömbje szigorú értelemben stabil felület.

7.3. A topológia tétele

A fejezet legfontosabb eredményét a következő tételben foglalhatjuk össze.

7.3.1. Tétel. *Legyen (M, g_{ab}) egy tetszőleges $n \geq 4$ dimenziós téridő. Tegyük fel, hogy az általánosított domináns energiafeltétel teljesül valamely $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény választás mellett, valamint \mathcal{S} egy szigorú értelemben stabil $(n - 2)$ -dimenziós felület. Ekkor,*

- (1) *Ha $f \geq 0$ a \mathcal{S} felületen, akkor \mathcal{S} pozitív Yamabe-típusú, azaz $\mathcal{Y}(\mathcal{S}) > 0$.*
- (2) *Ha $\mathcal{Y}(\mathcal{S}) < 0$ és $f_{\min}^{\mathcal{S}} < 0$, ahol $f_{\min}^{\mathcal{S}}$ az f függvény \mathcal{S} -en felvett minimumát jelöli, akkor az $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \epsilon_q$, of \mathcal{S} felszín eleget tesz a*

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \geq \left(\frac{|\mathcal{Y}(\mathcal{S})|}{2|f_{\min}^{\mathcal{S}}|} \right)^{\frac{s}{2}} \quad (7.3.1)$$

egyenlőtlenségnek, ahol $s = n - 2 = \dim(\mathcal{S})$.

Bizonyítás: A fenti állítás bizonyítása során ismét központi szerepet játszik egy Gauss-féle fényszerű koordinátarendszer, melynek legfontosabb elemeit a következők szerint határozhatjuk meg: Először is idézzük fel, hogy az $(n - 2)$ -dimenziós \mathcal{S} felületen értelmezett ℓ^a és n^a jövő-, illetve múltirányú fényszerű vektormezőök külön-külön merőlegesek \mathcal{S} -re, továbbá rájuk $\ell^a n_a = 1$ normálási feltétel teljesül. Legyen \mathcal{N} az a fényszerű hiperfelület, melyet az \mathcal{S} pontjaiból n^a érintővektorral indított geodetikusok feszítenek ki. Ekkor az \mathcal{N} felület \mathcal{S} egy elegendően kicsiny környezetében sima. Jelölje u az \mathcal{N} felület generátorainak azon szinkronizált paraméterét, amelyre $u = 0$ az $(n - 2)$ -dimenziós \mathcal{S} felület pontjaiban. Jelölje k^a az \mathcal{N} fényszerű hiperfelületet érintő $(\partial/\partial u)^a$ múltirányú, fényszerű vektormezőt, valamint ℓ^a az \mathcal{N} felület $u = \text{állandó}$ \mathcal{S}_u szeléseire merőleges, a $g_{ab}k^a \ell^b = 1$ feltétel által egyértelműen meghatározott, jövőirányú, fényszerű vektormezőt \mathcal{N} -en. Ezek

után a 2.1.3. alfejezetben leírtakat követve, \mathcal{S} egy elegendően kicsiny \mathcal{O} környezetében értelmezhetjük az (u, r, x^3, \dots, x^n) lokális koordinátákat. Az \mathcal{O} környezetben – melynek az $u = \text{állandó}$, $r = \text{állandó}$ feltételekkel meghatározott $(n-2)$ -dimenziós $\mathcal{S}_{u,r}$ felületek egy sima, kétparaméteres foliációját adják – a metrikát (2.1.3)-nek megfelelően a

$$g_{ab} = 2 \left(\nabla_{(a} r - r \alpha \nabla_{(a} u - r \beta_{(a)} \right) \nabla_{b)} u + \gamma_{ab} \quad (7.3.2)$$

alakban írhatjuk fel, továbbá a k^a és ℓ^a vektormezők a $k^a = (\partial/\partial u)^a$ és $\ell^a = (\partial/\partial r)^a$ alakban adhatók meg, és így kommutálnak \mathcal{O} felett.

A 2.1.3. alfejezetben azt is említettük, hogy γ_{ab} , valamint az $(n-2)$ -dimenziós $\mathcal{S}_{u,r}$ felületeken indukált q_{ab} pozitív definit metrika a

$$q_{ab} = r^2 \beta^c \beta_c \ell_a \ell_b - 2 r \beta_{(a} \ell_{b)} + \gamma_{ab} \quad (7.3.3)$$

reláción keresztül kapcsolódnak egymáshoz.

Mivel k^a és ℓ^a az \mathcal{N} felület \mathcal{S}_u szeléseire merőlegesek, az általuk meghatározott fény-szerű kongruenciák expanzióját a

$$\theta^{(k)}|_{\mathcal{S}_u} = \frac{1}{2} q^{ef} (\mathcal{L}_k q_{ef}) = \frac{1}{2} \gamma^{ef} (\mathcal{L}_k \gamma_{ef}) \quad (7.3.4)$$

és a

$$\theta^{(\ell)}|_{\mathcal{S}_u} = \frac{1}{2} q^{ef} (\mathcal{L}_\ell q_{ef}) = \frac{1}{2} \gamma^{ef} (\mathcal{L}_\ell \gamma_{ef}) \quad (7.3.5)$$

egyenletekkel adhatjuk meg, ahol \mathcal{L}_k és \mathcal{L}_ℓ a k^a és ℓ^a vektormezők menti Lie-deriváltat jelölik, és (itt és a fejezet hátralévő részében mindenütt) az indexek mozgatása mindig a g_{ab} téridőmetrikával történik. Érdeemes megjegyezni, hogy az utóbbi két egyenletben a második lépésben kapott egyenlőségek helyessége abból következik, hogy β_a és γ_{ab} merőlegesek a k^a és ℓ^a vektorokra, továbbá k^a és ℓ^a kommutálnak \mathcal{O} felett.

A (7.3.2) metrika által meghatározott Einstein-tenzor felhasználásával azonnal adódik, hogy

$$G_{ab} k^a \ell^b = R_{ab} k^a \ell^b - \frac{1}{2} R_{ef} [2 k^{(e} \ell^{f)} + \gamma^{ef}] = -\frac{1}{2} \gamma^{ef} R_{ef} \quad (7.3.6)$$

teljesül az \mathcal{N} felületen. Ezek után a [56]-as hivatkozás (82)-es egyenletét felhasználva, valamint a q^a_b , γ^a_b és p^a_b merőleges vetítő operátoroknak³ az \mathcal{N} felületen való egybeesését

³A p^a_b operátor definícióját a [56]-as hivatkozás (76)-os egyenlete adja.

kihasználva azt kapjuk, hogy az \mathcal{N} felületen

$$G_{ab}k^a\ell^b = -\frac{1}{2} \left[-\gamma^{ab} (\mathcal{L}_\ell \mathcal{L}_k \gamma_{ab}) - \alpha \gamma^{ab} (\mathcal{L}_\ell \gamma_{ab}) + R_q + D^a \beta_a - \frac{1}{2} \beta^a \beta_a \right. \\ \left. + \gamma^{ab} \gamma^{cd} (\mathcal{L}_\ell \gamma_{ac}) (\mathcal{L}_k \gamma_{bd}) - \frac{1}{2} \gamma^{ab} (\mathcal{L}_\ell \gamma_{ab}) \gamma^{cd} (\mathcal{L}_k \gamma_{cd}) \right], \quad (7.3.7)$$

ahol D_a és R_q az $(n-2)$ -dimenziós $\mathcal{S}_u \subset \mathcal{N}$ felületeken indukált $q_{ab} = \gamma_{ab}$ metrika által meghatározott kovariáns deriváló operátort és a görbületi skalárt jelölik. Ismét kihasználva, hogy a k^a és ℓ^a vektormezők kommutálnak \mathcal{O} felett, továbbá merőlegesek γ_{ab} -re, direkt számolással ellenőrizhető, hogy

$$-\gamma^{ab} (\mathcal{L}_\ell \mathcal{L}_k \gamma_{ab}) = -\mathcal{L}_\ell (\gamma^{ab} \mathcal{L}_k \gamma_{ab}) - \gamma^{ab} \gamma^{cd} (\mathcal{L}_\ell \gamma_{ac}) (\mathcal{L}_k \gamma_{bd}). \quad (7.3.8)$$

A k^a és ℓ^a vektormezők kommutálásából az is azonnal adódik, hogy \mathcal{O} felett

$$\mathcal{L}_\ell \theta^{(k)} = \mathcal{L}_k \theta^{(\ell)}, \quad (7.3.9)$$

ahol a $\theta^{(k)}$ expanzió az $\mathcal{S}_{u,r}$ felületeken indukált q_{ab} metrika ϵ_q térfogatelemére hivatkozva, valamint a (7.3.4) reláció első egyenlőségét felhasználva \mathcal{O} felett mindenütt értelmezhető.

Terjesszük ki most az n^a vektormezőt \mathcal{S} -ről \mathcal{O} -ra úgy, hogy n^a legyen mindenütt merőleges az $\mathcal{S}_{u,r}$ felületekre, továbbá teljesítse az $n^a \ell_a = 1$ normálási feltételt. Az n^a vektormezőt a

$$n^a = k^a + \left(r\alpha + \frac{1}{2} r^2 \beta^e \beta_e \right) \ell^a + r\beta^a \quad (7.3.10)$$

alakban adhatjuk meg. Direkt számolással az is ellenőrizhető, hogy \mathcal{N} -en, azaz az $r=0$ helyen, és speciálisan az \mathcal{S} felületen is

$$\mathcal{L}_n \theta^{(\ell)} = \mathcal{L}_k \theta^{(\ell)}. \quad (7.3.11)$$

Ezek után – felhasználva a (7.3.7) – (7.3.11) egyenleteket – azt kapjuk, hogy \mathcal{S} -en a

$$\mathcal{L}_n \theta^{(\ell)} = G_{ab} n^a \ell^b - \alpha \theta^{(\ell)} - \theta^{(\ell)} \theta^{(n)} + \frac{1}{2} \left[R_q + D^a \beta_a - \frac{1}{2} \beta^a \beta_a \right] \quad (7.3.12)$$

reláció teljesül.

A bizonyítás következő lépésében megmutatom, hogy a (7.3.12) jobb oldalán álló második kifejezés értéke nulla. Pontosabban fogalmazva igaz a következő:

7.3.1. Lemma. *A metrikában szereplő α függvény értéke zérus az \mathcal{N} felületen.*

Bizonyítás: A metrikát meghatározó (7.3.2) összefüggés alapján

$$k^a k_a = -2r\alpha, \quad (7.3.13)$$

amiből speciálisan az is következik, hogy \mathcal{N} -en, azaz amikor $r = 0$

$$\ell^e \nabla_e (k^a k_a) = \partial_r (-2r\alpha) = -2\alpha. \quad (7.3.14)$$

Ezek után a lemma állítása az \mathcal{N} felületen fennálló

$$\ell^e \nabla_e (k^a k_a) = 2k_a \ell^e \nabla_e k^a = 2k_a k^e \nabla_e \ell^a = -2\ell_a k^e \nabla_e k^a = 0 \quad (7.3.15)$$

összefüggés következménye, melynek levezetése során a $[k, \ell]^a = 0$ és $k_a \ell^a = 1$ egyenlőségek mellett azt használtuk ki, hogy jelen esetben az u -koordináta affin paraméter is, az \mathcal{N} felület k^a érintővektorú generátorai mentén. \square

Felidézve ezek után azt, hogy \mathcal{S} -en mind $-n^a$, mind pedig ℓ^a jövőirányú fényszerű vektormezők, továbbá, hogy a feltételünk szerint teljesül az általánosított domináns energiefeltétel, azt kapjuk, hogy a

$$G_{ab} n^a \ell^b + f \leq 0 \quad (7.3.16)$$

egyenlőtlenség teljesül \mathcal{S} -en. Mindezekhez hozzávéve azt, hogy \mathcal{S} szigorú értelemben véve stabil felület, minden esetben található olyan, az \mathcal{S} felületre merőleges ℓ^a és n^a jövő-, illetve múltirányú fényszerű vektormezők, melyekre az

$$(\mathcal{L}_n \theta^{(\ell)} + \theta^{(\ell)} \theta^{(n)})|_{\mathcal{S}} \geq 0 \quad (7.3.17)$$

egyenlőtlenség teljesül, továbbá \mathcal{S} -nek van olyan pontja, ahol $\mathcal{L}_n \theta^{(\ell)} + \theta^{(\ell)} \theta^{(n)} > 0$.

Következésképpen, ha \mathcal{S} szigorú értelemben véve stabil felület és az általánosított domináns energiefeltétel is teljesül, akkor (7.3.12) figyelembevételével az adódik, hogy \mathcal{S} -en

$$R_q + D^a \beta_a - \frac{1}{2} \beta^a \beta_a \geq 2f \quad (7.3.18)$$

úgy, hogy \mathcal{S} valamely pontjában az egyenlőtlenség szigorú értelemben teljesül.

Mivel a q_{ab} metrika pozitív definit, a Schwartz-egyenlőtlenség alkalmazásával megmutatható, hogy bármely az \mathcal{S} felületen sima u függvényre

$$u^2 D^a \beta_a = D^a (u^2 \beta_a) - 2u (D^a u) \beta_a \leq D^a (u^2 \beta_a) + 2(D^a u)(D_a u) + \frac{1}{2} u^2 \beta^a \beta_a. \quad (7.3.19)$$

Legyen most $u > 0$ tetszőleges sima függvény \mathcal{S} -en. Ekkor (7.3.18)-at u^2 -el megszorozva, valamint a (7.3.19) összefüggést figyelembe véve, azt kapjuk, hogy

$$2(D^a u)(D_a u) + R_q u^2 + D^a(u^2 \beta_a) \geq 2 f u^2 \quad (7.3.20)$$

úgy, hogy \mathcal{S} valamely pontjában az egyenlőtlenség szigorú értelemben teljesül.

Ezek után a tétel állításának első része az alábbiak szerint igazolható. Tegyük fel, hogy $f \geq 0$ mindenütt az \mathcal{S} felületen. Ekkor a $4 \frac{s-1}{s-2} > 2$ egyenlőtlenséget – mely tetszőleges $s \geq 3$ értékre teljesül – és a (7.3.20) egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\int_{\mathcal{S}} \left[4 \frac{s-1}{s-2} (D^a u)(D_a u) + R_q u^2 \right] \epsilon_q}{\left(\int_{\mathcal{S}} u^{\frac{2s}{s-2}} \epsilon_q \right)^{\frac{s-2}{s}}} > 0, \quad (7.3.21)$$

bármely $u > 0$ sima függvény esetén, azaz $Y(\mathcal{S}, [q]) > 0$, melyből azonnal következik, hogy az \mathcal{S} felület szükségképpen pozitív Yamabe-típussal rendelkezik.

Tételünk második állításának bizonyításához tegyük most fel, hogy az f függvény \mathcal{S} -en felvett $f_{min}^{\mathcal{S}}$ minimuma negatív. Ekkor egyrészt igaz, hogy

$$2 \int_{\mathcal{S}} f u^2 \epsilon_q \geq -2 |f_{min}^{\mathcal{S}}| \int_{\mathcal{S}} u^2 \epsilon_q, \quad (7.3.22)$$

másrészt az

$$\int_{\mathcal{S}} \phi_1 \phi_2 \epsilon_q \leq \left(\int_{\mathcal{S}} |\phi_1|^a \epsilon_q \right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_{\mathcal{S}} |\phi_2|^b \epsilon_q \right)^{\frac{1}{b}}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (7.3.23)$$

Hölder-egyenlőtlenséget a $\phi_1 = u^2$ és $\phi_2 = 1$ függvényekre és az $a = \frac{s}{s-2}$, $b = \frac{s}{2}$ értékekre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathcal{S}} u^2 \epsilon_q \leq \left(\int_{\mathcal{S}} u^{\frac{2s}{s-2}} \epsilon_q \right)^{\frac{s-2}{s}} [\mathcal{A}(\mathcal{S})]^{\frac{2}{s}}. \quad (7.3.24)$$

A (7.3.22), (7.3.24) és a (7.3.20) összefüggések alapján az is belátható, hogy

$$\frac{\int_{\mathcal{S}} \left[4 \frac{s-1}{s-2} (D^a u)(D_a u) + R_q u^2 \right] \epsilon_q}{\left(\int_{\mathcal{S}} u^{\frac{2s}{s-2}} \epsilon_q \right)^{\frac{s-2}{s}}} \geq -2 |f_{min}^{\mathcal{S}}| [\mathcal{A}(\mathcal{S})]^{\frac{2}{s}}. \quad (7.3.25)$$

Végül a $\mathcal{Y}(\mathcal{S}) < 0$ feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy a Yamabe-állandóra a $Y(\mathcal{S}, [q]) \leq \mathcal{Y}(\mathcal{S}) < 0$ egyenlőtlenség teljesül bármely $[q]$ konformis osztály esetén.

Mindez, (7.3.25) figyelembevételével, azt jelenti, hogy

$$|\mathcal{Y}(\mathcal{S})| \leq |Y(\mathcal{S}, [q])| = -Y(\mathcal{S}, [q]) \leq 2|f_{min}^{\mathcal{S}}| [\mathcal{A}(\mathcal{S})]^{\frac{2}{5}}, \quad (7.3.26)$$

ami igazolja (7.3.1) helyességét. \square

7.4. Még egyszer a stabilitási feltételről

Térjünk most vissza a fenti bizonyítás során oly fontos szerepet játszó stabilitási feltétel korábban ígért geometriai megfogalmazásához. Először tegyük fel, hogy az $(n-2)$ -dimenziós \mathcal{S} felület \mathcal{O} nyílt környezetében a Gauss-féle fényszerű koordinátarendszer bevezetése során értelmezett, k^a és ℓ^a , múlt- és jövőirányú fényszerű vektormezők teljesen általánosak. Ekkor az \mathcal{S} felület \mathcal{A} felszínének a k^a és ℓ^a fényszerű vektormezők szerinti második variációján az $\delta_k \delta_\ell \mathcal{A} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}(\mathcal{S}_{u,r})}{\partial u \partial r} \Big|_{u=0, r=0}$ kifejezést értjük. A Lie-deriváltak alapvető tulajdonságait felhasználva a $\delta_k \delta_\ell \mathcal{A}$ második variációjára a

$$\delta_k \delta_\ell \mathcal{A} = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}_k \mathcal{L}_\ell \epsilon_q = \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{L}_k \theta^{(\ell)} + \theta^{(\ell)} \theta^{(k)}] \epsilon_q \quad (7.4.1)$$

összefüggés teljesül. Fontos kiemelni, hogy a felszín második variációja rendelkezik a $\delta_k \delta_\ell \mathcal{A} = \delta_{-k} \delta_{-\ell} \mathcal{A}$ és a $\delta_k \delta_\ell \mathcal{A} = \delta_\ell \delta_k \mathcal{A}$ tulajdonságokkal. Az első reláció a definíció következménye, míg a második a k^a és ℓ^a vektormezők kommutálásából következik.

Érdemes azt is megjegyezni, hogy a (7.3.4), (7.3.9), (7.3.10) és a (7.3.11) egyenletek lehetővé teszik, hogy az \mathcal{S} felület \mathcal{A} felszínének második variációját egyszerűen az \mathcal{S} felületen értelmezett n^a és ℓ^a múlt- és jövőirányú fényszerű vektormezőkkel kapcsoljuk össze. Megmutatható, hogy ekkor a $\delta_n \delta_\ell \mathcal{A} = \delta_{-n} \delta_{-\ell} \mathcal{A}$ és $\delta_n \delta_\ell \mathcal{A} = \delta_\ell \delta_n \mathcal{A}$ tulajdonságok is biztosítottak.

Így a 7.2.2. definícióban alkalmazott feltételek következtében az alábbiak teljesülnek:

7.4.1. Tétel. *Az \mathcal{S} felület pontosan akkor tesz eleget a 7.2.2. definícióban értelmezett szigorú stabilitási feltételnek, ha \mathcal{S} -en – amennyiben szükséges, akkor valamely alkalmazott választott v függvény által indukált (7.2.1) alakú boost-transzformáció végrehajtását követően – található olyan n^a és ℓ^a múlt-, illetve jövőirányú fényszerű vektormezők, amelyekre a $\delta_n \delta_\ell \mathcal{A}$ második variáció pozitív, ugyanakkor tetszőleges $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ felületdarabra a $\delta_n \delta_\ell \mathcal{A}(\mathcal{S}') \geq 0$ feltétel teljesül.*

Most – amellet, hogy a stabilitási feltétel egy újabb értelmezését is bemutatjuk – megmutatjuk azt, hogy a [2, 3, 100] munkákban alkalmazott szigorú stabilitási feltétel pontosan az imént megfogalmazott tétel egyszerű geometriai követelményeivel egyenér-

tékű. Ennek belátása érdekében jegyezzük meg, hogy amikor az \mathcal{S} felületen értelmezett n^a és ℓ^a fényszerű vektormezőkre alkalmazzuk a (7.2.1) „boost”-transzformációt, akkor a (7.3.2) metrikában szereplő α és β_a kifejezések az $\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha e^v$ és $\beta_a \rightarrow \beta'_a = \beta_a + D_a v$ szabály szerint transzformálódnak.

Ezek után a $\psi = e^{-2v}$ és az $s_a = \frac{1}{2}\beta_a$ jelöléseket alkalmazva azt kapjuk [100], hogy (7.3.12) a

$$\begin{aligned} ([\mathcal{L}_{n'}\theta^{(\ell')} + \theta^{(\ell')} \theta^{(n')}] \psi)|_{\mathcal{S}} = & -D^a D_a \psi + 2s^a D_a \psi \\ & + \left[\frac{1}{2} R_q + G_{ab} n^a \ell^b + D^a s_a - s^a s_a \right] \psi \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

alakban írható fel, ahol kihasználtuk azt, hogy α értéke zérus az \mathcal{S} felületen. Összevetve (7.4.2) jobb oldalát a [3]-as hivatkozás (5)-ös egyenletétben definiált L_v stabilitási operátorral látható, hogy (7.4.2) jobb oldalán éppen az L_v operátor ψ függvényen felvett értéke jelenik meg, amennyiben az abban szereplő „ v^a variációs vektormezőt” n^a -val helyettesítjük. Érdeemes megemlíteni, hogy (7.4.2) jobb oldalára, mint a [3] referencia (10)-es egyenlete által meghatározott típusú, lineáris, elliptikus operátorra is gondolhatunk. Emiatt a [3] hivatkozás 4. és 5. fejezetében ismertetett eredmények az általunk vizsgált esetben is közvetlenül alkalmazhatók. Ennek fényében azt mondhatjuk, hogy \mathcal{S} pontosan akkor teljesíti a szigorú értelemben vett stabilitási feltételünket, amikor \mathcal{S} -en létezik olyan $\psi \geq 0$, $\psi \not\equiv 0$ függvény, amelyre $L_v \psi \geq 0$, $L_v \psi \not\equiv 0$ az \mathcal{S} felületen, vagy – ami ezzel ekvivalens – az L_v operátor principális sajátértéke pozitív.⁴ Mivel a [2, 3, 15, 43, 44, 45, 100] munkákban alkalmazott szigorú stabilitási feltétel pontosan az L_v operátor principális sajátértékének pozitivitásával egyenértékű, az is látható, hogy az [101] munkában leírt és a 7.4.1. tételben megfogalmazott geometriai leírásunk ekvivalens az irodalomban használt stabilitási feltétellel.

7.5. Záró megjegyzések

Először is, mivel figyelemre méltó, szeretném kiemelni, hogy a 7.3.1. tétel értelmében az összes szigorú értelemben stabil $(n - 2)$ -dimenziós felület rendelkezik azon topológiai tulajdonságokkal, amelyeket eredetileg (lásd például a [100] referencia 4.1. tételét) csak a feketelyukak határát megjelenítő, szigorú értelemben stabil $(n - 2)$ -dimenziós felületekkel kapcsolatban véltünk igaznak.

Érdeemes azt is megemlíteni, hogy a fejezet fő tételének bizonyítása lényegesen lerövi-

⁴Bár az L_v operátor nem önadjungált, megmutatható, hogy a legkisebb valós résszel rendelkező sajátértéke valós – ezt nevezzük principális sajátértéknek –, így beszélhetünk ennek pozitivitásáról.

díti Hawking, Gibbons és Woolgar eredményeinek eredeti igazolását is. Annak belátása érdekében, hogy ezen korábbi eredmények bizonyítása a 7.3.1. tétel speciális eseteként kapható, vegyük észre, hogy amikor \mathcal{S} egy $s = 2$ -dimenziós felület, a (7.0.1), (7.1.2) és (7.1.3) egyenletek következtében

$$\mathcal{Y}(\mathcal{S}) = 4\pi\chi_{\mathcal{S}}. \quad (7.5.1)$$

Ha még azt is feltesszük, hogy a Λ kozmológiai állandóval kibővített Einstein-elméleten belül olyan anyagmezőket tekintünk, amelyek eleget tesznek a domináns energiafeltételnek, akkor a 7.3.1. tétel első részének speciális eseteként azonnal kapjuk, hogy

$$\chi_{\mathcal{S}} > 0, \quad (7.5.2)$$

amikor $\Lambda \geq 0$, míg a második részből következően

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \geq \frac{4\pi(g_{\mathcal{S}} - 1)}{|\Lambda|}, \quad (7.5.3)$$

amikor mind $\chi_{\mathcal{S}}$, mind pedig Λ negatív.

A bizonyításból azonnal látszik, hogy a 7.3.1. tételben megfogalmazott eredmény független mindenféle referencia foliázástól. Az is figyelemre méltó, hogy amikor egyetlen szigorú értelemben stabil $(n - 2)$ -dimenziós \mathcal{S} felület topológiai tulajdonságaira vagyunk kíváncsiak, akkor az $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek csak a kvázi-lokális tulajdonságai számítanak, hiszen a 7.3.1. tétel feltételei f -nek csak a \mathcal{S} felületen felvett értékeire vonatkoznak. Így az f függvénynek nem feltétlenül kell korlátosnak, vagy M teljes egészén azonos előjelűnek lennie. Hasonlóan az is belátható, hogy elegendő, ha az általánosított domináns energiafeltétel csak az \mathcal{S} felületen teljesül.

Érdekes annak a kérdésnek a végiggondolása is, hogy milyen kapcsolatban lehet a 7.3.1. tétel a topológiai cenzor tételekkel, hiszen a feketelyuk-téridők külső kommunikációs tartománya feltehetőleg olyan nemcsapdázott felületekkel foliázható, amelyekre tételünk alkalmazható. Ebben a vonatkozásban érdemes megemlíteni, hogy a topológiai cenzor tételek az aszimptotikusan sík, vagy aszimptotikusan anti-de Sitter téridők topológiai jellemzését adják (lásd a [32, 42] referenciákat). A topológiai cenzor tételek – melyek szintén tetszőleges $n \geq 3$ dimenzióban érvényesek [42] – minden szempontból globálisak. Állításaik értelmében a feketelyuk-téridők külső kommunikációs tartománya topológiai értelemben „egyszerű”, ha az aszimptotikus tartomány topológiája egyszerű. Ezzel szemben a 7.3.1. tétel teljesen kvázi-lokális, azaz alkalmazható minden szigorú értelemben stabil felületre függetlenül attól, hogy az adott téridőhöz tartozik-e aszimptotikus tartomány, vagy sem.

Végül szeretném ismételtten hangsúlyozni, hogy a 7.3.1. tétel lényegesen kibővíti azoknak az elméleteknek a tárházát, amelyekben Hawking feketelyuk-topológiai tétele, illetve Gibbons és Woolgar eredményei érvényesek. Mivel a tétel bizonyítása során sehol nem használtunk elméletfüggő téregyenleteket, a tétel következtetései érvényesek a gravitáció olyan tetszőleges metrikus elméleteiben, ahol a téridő metrikáját és az esetlegesen jelen lévő anyagmezőket egyedül az általánosított domináns energiafeltétel használata korlátozza. Ennek megfelelően a 7.3.1. tétel alkalmazható a húrelméletben, vagy az általános relativitáselmélet tetszőleges, $n \geq 4$ dimenziós általánosításaiban.

8. fejezet

Összefoglalás

Jelen dolgozat a bemutatott fogalmak és eredmények szerteágazó volta ellenére sem nyújthatja a feketelyuk-fizika teljes áttekintését. Megírása közben leginkább arra törekedtem, hogy a feketelyukhoz kapcsolódó alapismeretek tömör összefoglalása után azokat a részterületeket mutassam be – részletekbe menő vizsgálatok szintjén is –, amelyek kutatásában magam is aktívan vettem részt. Mivel az elért új eredmények felsorolása megtalálható a mellékelt téziszüzetben, azok itteni megisméltése helyett néhány kiegészítő, remélhetőleg az eredmények jobb megértését elősegítő megjegyzéssel zárom a dolgozatot.

A dolgozatot felépítő fejezetek többféle szempontból is kettéoszthatók. Először is, ahogy azt már többször jeleztem, a bemutatott új eredmények többsége olyan – például a 2–4., valamint a 7. fejezetekben ismertetett eredmények –, amelyek származtatása során egyáltalán nem használtam konkrét téregyenleteket, ezért azok a gravitáció bármely lehetséges geometrizált elméletében alakíthatók. Hasonló módon az ezekben a fejezetekben ismertetett eredmények többsége a téridő dimenziószámának tekintetében is általános, tehát azok nemcsak négy-, de lényegében véve akárhány dimenziós elméletekre alkalmazhatóak.

Más szempontok alapján is különbséget tehetünk a dolgozatot felépítő fejezetek között, mégpeddig abban az értelemben, hogy az ismertetett új eredményeket tartalmazó fejezetek között vannak olyanok, amelyek a kutatás szintjén lezártnak tekinthetők – ilyenek például a 2–4. és a 6. fejezetek –, míg például az 5. és a 7. fejezetekben bemutatott eredmények a megkezdett kutatás természetes folytatását kínálják fel, hiszen ezen eredmények már a jelen dolgozatban is a korábban publikáltnál általánosabb alakban kerültek megfogalmazásra. Az általánosíthatóság, illetve a folytathatóság lehetőségének egyfajta tükröződése az is, hogy e két fejezet végén részletekbe menő diszkusszió található, mely számos olyan nyitott kérdést fogalmaz meg, melyek a jelen pillanatban fontosnak gondolt, jövőbeni kutatási irányokat jelölik ki. Ehhez hasonló általánosságra való törekvés veze-

tett a 2. fejezetben bemutatott eredményeim – sokszor még a fogalomalkotáshoz tartozó definíciók – megfogalmazása során is.

Azt is szeretném kiemelni, hogy például a 6. fejezetben – a négydimenziós, stacionárius, aszimptotikusan sík feketelyuk-téridőkben a horizonttal kompatibilis téridőszimmetria létezésének problémája, illetve az annak kapcsán elért eredményeim áttekintése során – az egyszerűség kedvéért vizsgálataimat az elektrovákuum esetre korlátoztam. Ugyanakkor a szakirodalomban publikált eredményeim az anyagmezők tekintetében sokkal általánosabbak. Így például nemcsak az elektrovákuum esetben [37], de a gravitáció és anyag különféle rendszereit tekintve is – úgy, mint Einstein–Klein–Gordon, Einstein–[non-Abelian] Higgs, Einstein–[Maxwell]–Yang–Mills–dilatón és Einstein–Yang–Mills–Higgs rendszerekre – megmutattam, hogy a stacionárius Killing-vektormező mellett mindig létezik egy olyan másik, az eseményhorizonttal kompatibilis Killing-vektormező, mely sima esetben a feketelyuk-tartományban, analitikus esetben a külső kommunikációs tartományban is értelmezhető, és amely által indukált izometria-transzformációkra nézve az eseményhorizont egy Killing-horizont, továbbá a kérdéses izometria-transzformációk hatására nézve az anyagmezők is invariánsak [95].

Egy másik fontos észrevétel ugyanezen fejezet kapcsán az, hogy lényegében ugyanazok az új technikák, melyek Hawking feketelyuk-topológiai tételeinek általánosításához a [37, 95] munkákban kerültek megfogalmazásra – ezek segítségével bizonyítható, hogy amikor egy stacionárius feketelyuk nem sztatikus, akkor a kérdéses feketelyuk stacionárius és tengelyszimmetrikus –, kis, értelemszerű változtatásokkal alkalmazhatóak a kozmikus cenzor hipotézis kozmológiai kontextusban történő indirekt bizonyításának során is. Konkrétan ismert számos olyan téridő, amelyben olyan kompakt Cauchy-horizont található, amelyet zárt fényszerű geodetikusok generálnak. Ezek a téridők azonban mind speciálisak abban az értelemben, hogy bennük egy olyan Killing-vektormező létezik, amelyre nézve a Cauchy-horizont egy Killing-horizont.

Egy Cauchy-horizont létezése általában azt jelenti, hogy a tartomány, ahol egy adott elmélet a jövőben lejátszódó történéseket legalább elvileg képes megjósolni, behatároltnak tekintendő. Éppen az ilyen típusú behatároltság Einstein-elméleten belüli, nem általános jellegével kapcsolatos várakozásainkat fogalmazza meg Penrose „erős kozmikus cenzor” hipotézise [88, 89].

Mint ahogy minden ismert, kompakt Cauchy-horizontot tartalmazó téridő esetében létezik az említett téridőszimmetria, természetes módon merül fel az a kérdés, hogy milyen mértékben képesek az Einstein-egyenletek a vonatkozó, horizonttal kompatibilis Killing-vektormező létezését garantálni. Másként fogalmazva: Létezhet-e egyáltalán kompakt Cauchy-horizontot tartalmazó téridő a fent említett szimmetria nélkül? Amennyiben az utóbbi kérdésre adható válasz nemleges, úgy a kapcsolódó érvelésünk meggyőző indirekt

támogatását adja Penrose erős kozmikus cenzor hipotézisének. Nyilvánvaló ugyanis, hogy bármely szimmetria létezése ellentmond az adott téridő általánosságára vonatkozó elvárásainknak.

Moncrief és Isenberg a [75, 57] munkákban olyan *analitikus* elektrovákuum-téridőket vizsgált, amelyekben zárt, fényszerű geodetikusok által generált kompakt Cauchy-horizont található. Ezek után megmutatták, hogy minden ilyen téridőben létezik a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező. A [37, 95] dolgozataimban (lásd a [98] munkát is) a 6. fejezetben leírt technikai elemeket felhasználva azt is megmutattam, hogy az analicitásra vonatkozó feltétel nélkül – és az összes fentebb említett, és a [95] dolgozatunkban vizsgált gravitáció és anyag csatolt rendszerei esetén – is megmutatható a horizonttal kompatibilis Killing-vektormező létezése. Ezen felül, a kozmológiai kontextusban az egyoldali környezet – ez az, ahol sima esetben a Killing-vektormező létezését garantálni tudjuk – éppen a horizont Cauchy-függőségi tartomány felőli oldala. Így az adott téridőosztály elemeire sikerült Moncrief és Isenberg eredményeit általánosítani, tehát ezek a téridők nem lehetnek általánosak a sima esetben sem.

Hasonlóan, azt is érdemes megemlíteni, hogy a 6.5. alfejezetben bemutatott eredmények, melyek a kezdőérték-problémák és téridőszimmetriák kapcsolatának vizsgálatát idézik fel, sem a lehető legáltalánosabbak. A kérdéses alfejezetben arra törekedtem, hogy egyrészt az általánosítások lehetőségét érzékeltessem, másrészt a 6. fejezet tárgyát képező elektrovákuum eset vizsgálatához szükséges eredményeket igyekeztem minél egyszerűbb módon megfogalmazni. Az érdeklődő olvasó sokkal általánosabban, lényegében a gravitáció és anyag összes lehetséges ismert rendszerére – melyekben (esetleg csak egy hiperbolikus redukció után) a téregyenletek elsőrendű, szimmetrikus hiperbolikus fejlődési egyenletek alakjában írhatók fel – alkalmazható eredményeket talál a [96, 97] munkáimban.

9. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Szakmai fejlődésem meghatározó alakja Robert Manuel Wald. Elsősorban neki tartozom köszönettel azért, hogy közös munkáink során az általános relativitáselmélet technikai ismeretei magas szintű alkalmazásának igénye mellett a kutatásaiért felelős ember példamutató viselkedését is módomban volt megtapasztalni. Különösen nagy érték számomra a szakmai munkakapcsolatunkból kialakult barátság.

Szakmai fejlődésemmre nagy hatással volt Robert Geroch, Helmut Friedrich és Hideo Kodama munkássága is, akikkel szerencsém volt együtt dolgozni, illetve tőlük tanulni.

Köszönettel tartozom az MTA KFKI RMKI minden olyan munkatársának is, akitől a közös munka, beszélgetések során sokat tanulhattam. Így hálával emlékezem többek között volt témavezetőmre, Perjés Zoltánra és volt szobatársamra, Dolinszky Tamásra, továbbá hálával tartozom Hraskó Péternek, Frenkel Andornak és Sebestyén Ákosnak.

Diákjaimnak és fiatalabb kollégáimnak a közös munkák során tanúsított érdeklődésükért és szorgalmukért szintén köszönettel tartozom. Külön köszönet illeti Kánnár Jánost, Zsigrai Józsefet, Fodor Gyulát, Csizmadia Pétert és László Andrást.

Végül, de nem utolsó sorban, köszönettel tartozom gyermekeimnek, Zsoltnak, Orsolyának és Zoltánnak, akiktől folyamatosan nagyon sok támogatást kaptam, ugyanakkor nem elhanyagolható életrevalóságról tettek tanúbizonyságot pusztán azáltal, hogy egy fizikus apa mellett váltak kiváló egyéniségekké és külön-külön sikeressé az általuk választott életpályán.

10. fejezet

Appendix

Ez a függelék a Newman-Penrose-formalizmus alapvető mennyiségeinek, illetve a rájuk vonatkozó egyenletek felidézésére szolgál. A metrika kontravariáns alakja

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & g^{rr} & g^{rB} \\ 0 & g^{Ar} & g^{AB} \end{pmatrix}, \quad (\text{M.1})$$

ahol az U , X^A valósértékű, és az ω , ξ^A komplexértékű függvényekkel

$$g^{rr} = 2(U - \omega\bar{\omega}), \quad g^{rA} = X^A - (\bar{\omega}\xi^A + \omega\bar{\xi}^A), \quad g^{AB} = -(\xi^A\bar{\xi}^B + \bar{\xi}^A\xi^B). \quad (\text{M.2})$$

Az $\{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ komplex fényszerű tetrad és az elemeihez tartozó $D = \ell^a\partial_a$, $\Delta = n^a\partial_a$, $\delta = m^a\partial_a$ és $\bar{\delta} = \bar{m}^a\partial_a$ iránymenti deriváltak

$$\ell^\mu = \delta^\mu_r, \quad n^\mu = \delta^\mu_u + U\delta^\mu_r + X^A\delta^\mu_A, \quad m^\mu = \omega\delta^\mu_r + \xi^A\delta^\mu_A \quad (\text{M.3})$$

$$D = \partial/\partial r, \quad \Delta = \partial/\partial u + U \cdot \partial/\partial r + X^A \cdot \partial/\partial x^A, \quad \delta = \omega \cdot \partial/\partial r + \xi^A \cdot \partial/\partial x^A. \quad (\text{M.4})$$

A metrikára vonatkozó egyenletek:

$$D(\xi^A) = \rho\xi^A + \sigma\bar{\xi}^A \quad (\text{M.5})$$

$$D(\omega) = \rho\omega + \sigma\bar{\omega} - \tau \quad (\text{M.6})$$

$$D(X^A) = \tau\bar{\xi}^A + \bar{\tau}\xi^A \quad (\text{M.7})$$

$$D(U) = \tau\bar{\omega} + \bar{\tau}\omega - (\gamma + \bar{\gamma}) \quad (\text{M.8})$$

$$\delta(X^A) - \Delta(\xi^A) = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)\xi^A + \bar{\lambda}\bar{\xi}^A \quad (\text{M.9})$$

$$\delta(\bar{\xi}^A) - \bar{\delta}(\xi^A) = (\bar{\beta} - \alpha)\xi^A + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\xi}^A \quad (\text{M.10})$$

$$\delta(\bar{\omega}) - \bar{\delta}(\omega) = (\bar{\beta} - \alpha)\omega + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\omega} + (\mu - \bar{\mu}) \quad (\text{M.11})$$

$$\delta(U) - \Delta(\omega) = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)\omega + \bar{\lambda}\bar{\omega} - \bar{\nu} \quad (\text{M.12})$$

Spin-együtthatók

$\kappa = \ell^a m^b \nabla_a \ell_b$	$\varepsilon = \frac{1}{2} \ell^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b)$	$\pi = -\ell^a \bar{m}^b \nabla_a n_b$
$\rho = \bar{m}^a m^b \nabla_a \ell_b$	$\alpha = \frac{1}{2} \bar{m}^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b)$	$\lambda = -\bar{m}^a \bar{m}^b \nabla_a n_b$
$\sigma = m^a m^b \nabla_a \ell_b$	$\beta = \frac{1}{2} m^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b)$	$\mu = -m^a \bar{m}^b \nabla_a n_b$
$\tau = n^a m^b \nabla_a \ell_b$	$\gamma = \frac{1}{2} n^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b)$	$\nu = -n^a \bar{m}^b \nabla_a n_b$

Weyl-spinor komponensek

$\Psi_0 = -C_{abcd} \ell^a m^b \ell^c m^d$
$\Psi_1 = -C_{abcd} \ell^a n^b \ell^c m^d$
$\Psi_2 = -\frac{1}{2} C_{abcd} (\ell^a n^b \ell^c n^d - \ell^a n^b m^c \bar{m}^d)$
$\Psi_3 = -C_{abcd} n^a \ell^b n^c \bar{m}^d$
$\Psi_4 = -C_{abcd} n^a \bar{m}^b n^c \bar{m}^d$

Ricci-spinor komponensek

$\Phi_{00} = -\frac{1}{2} R_{ab} \ell^a \ell^b$	$\Phi_{01} = -\frac{1}{2} R_{ab} \ell^a m^b$
$\Phi_{22} = -\frac{1}{2} R_{ab} n^a n^b$	$\Phi_{12} = -\frac{1}{2} R_{ab} n^a m^b$
$\Phi_{11} = -\frac{1}{4} R_{ab} (\ell^a n^b + m^a \bar{m}^b)$	$\Lambda = \frac{1}{12} R_{ab} (\ell^a n^b - m^a \bar{m}^b)$
$\Phi_{02} = -\frac{1}{2} R_{ab} m^a m^b$	$\Phi_{\beta\alpha} = \bar{\Phi}_{\alpha\beta}$

A $D = \ell^a \partial_a$, $\Delta = n^a \partial_a$, $\delta = m^a \partial_a$ és $\bar{\delta} = \bar{m}^a \partial_a$ differenciáloperátorok kommutátorainak hatása egy ψ skalárfüggvényen:

$$\Delta(D(\psi)) - D(\Delta(\psi)) = (\gamma + \bar{\gamma}) D(\psi) - \bar{\tau} \delta(\psi) - \tau \bar{\delta}(\psi) \quad (\text{C.1})$$

$$\delta(D(\psi)) - D(\delta(\psi)) = \tau D(\psi) - \rho \delta(\psi) - \sigma \bar{\delta}(\psi) \quad (\text{C.2})$$

$$\delta(\Delta(\psi)) - \Delta(\delta(\psi)) = -\bar{\nu} D(\psi) + (\mu - \gamma + \bar{\gamma}) \delta(\psi) - \bar{\lambda} \bar{\delta}(\psi) \quad (\text{C.3})$$

$$\bar{\delta}(\delta(\psi)) - \delta(\bar{\delta}(\psi)) = (-\mu + \bar{\mu}) D(\psi) + (\alpha - \bar{\beta}) \delta(\psi) + (-\bar{\alpha} + \beta) \bar{\delta}(\psi) \quad (\text{C.4})$$

A Newman-Penrose-egyenletek:

$$D(\rho) = \rho^2 + \sigma \bar{\sigma} + \Phi_{00} \quad (\text{NP.1})$$

$$D(\sigma) = 2\rho\sigma + \Psi_0 \quad (\text{NP.2})$$

$$D(\tau) = \tau\rho + \bar{\tau}\sigma + \Psi_1 + \Phi_{01} \quad (\text{NP.3})$$

$$D(\alpha) = \rho\alpha + \beta\bar{\sigma} + \Phi_{10} \quad (\text{NP.4})$$

$$D(\beta) = \alpha\sigma + \rho\beta + \Psi_1 \quad (\text{NP.5})$$

$$D(\gamma) = \tau\alpha + \bar{\tau}\beta + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11} \quad (\text{NP.6})$$

$$D(\lambda) = \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \Phi_{20} \quad (\text{NP.7})$$

$$D(\mu) = \rho\mu + \sigma\lambda + \Psi_2 + 2\Lambda \quad (\text{NP.8})$$

$$D(\nu) = \bar{\tau}\mu + \tau\lambda + \Psi_3 + \Phi_{21} \quad (\text{NP.9})$$

$$\Delta(\lambda) - \bar{\delta}(\nu) = (\bar{\gamma} - 3\gamma - \mu - \bar{\mu})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\nu - \Psi_4 \quad (\text{NP.10})$$

$$\delta(\rho) - \bar{\delta}(\sigma) = (\bar{\alpha} + \beta)\rho - (3\alpha - \bar{\beta})\sigma - \Psi_1 + \Phi_{01} \quad (\text{NP.11})$$

$$\delta(\alpha) - \bar{\delta}(\beta) = \rho\mu - \sigma\lambda + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta - \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11} \quad (\text{NP.12})$$

$$\delta(\lambda) - \bar{\delta}(\mu) = (\alpha + \bar{\beta})\mu + (\bar{\alpha} - 3\beta)\lambda - \Psi_3 + \Phi_{21} \quad (\text{NP.13})$$

$$\delta(\nu) - \Delta(\mu) = \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + (\gamma + \bar{\gamma})\mu + (\tau - \bar{\alpha} - 3\beta)\nu + \Phi_{22} \quad (\text{NP.14})$$

$$\delta(\gamma) - \Delta(\beta) = \mu\tau - \sigma\nu - (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\beta + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12} \quad (\text{NP.15})$$

$$\delta(\tau) - \Delta(\sigma) = \mu\sigma + \bar{\lambda}\rho + (\tau - \bar{\alpha} + \beta)\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma + \Phi_{02} \quad (\text{NP.16})$$

$$\Delta(\rho) - \bar{\delta}(\tau) = -\rho\bar{\mu} - \sigma\lambda + (\gamma + \bar{\gamma})\rho - (\bar{\tau} + \alpha - \bar{\beta})\tau - \Psi_2 - 2\Lambda \quad (\text{NP.17})$$

$$\Delta(\alpha) - \bar{\delta}(\gamma) = \rho\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \Psi_3 \quad (\text{NP.18})$$

A Bianchi-azonosságok:

$$D(\Psi_1 - \Phi_{01}) - \bar{\delta}(\Psi_0) + \delta(\Phi_{00}) = -4\alpha\Psi_0 + 4\rho\Psi_1 + 2\tau\Phi_{00} - 2\rho\Phi_{01} - 2\sigma\Phi_{10} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_0) - \delta(\Psi_1 + \Phi_{01}) + D(\Phi_{02}) &= (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 \\ &\quad - \bar{\lambda}\Phi_{00} - 2\beta\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{11} + \rho\Phi_{02} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} D(\Psi_2 + 2\Lambda) - \bar{\delta}(\Psi_1 + \Phi_{01}) + \Delta(\Phi_{00}) &= -\lambda\Psi_0 - 2\alpha\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 + (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\Phi_{00} \\ &\quad - 2(\alpha + \bar{\tau})\Phi_{01} - 2\tau\Phi_{10} + 2\rho\Phi_{11} + \bar{\sigma}\Phi_{02} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_1 - \Phi_{01}) - \delta(\Psi_2 + 2\Lambda) + \bar{\delta}(\Phi_{02}) &= \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 - \bar{\nu}\Phi_{00} \\ &\quad + 2(\bar{\mu} - \gamma)\Phi_{01} + (3\alpha - \bar{\beta})\Phi_{02} + 2\tau\Phi_{11} - 2\rho\Phi_{12} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} D(\Psi_3 - \Phi_{21}) - \bar{\delta}(\Psi_2 + 2\Lambda) + \delta(\Phi_{20}) &= -2\lambda\Psi_1 + 2\rho\Psi_3 + 2\mu\Phi_{10} - 2(\beta - \bar{\alpha})\Phi_{20} \\ &\quad - 2\rho\Phi_{21} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_2 + 2\Lambda) - \delta(\Psi_3 + \Phi_{21}) + D(\Phi_{22}) &= 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 - 2\bar{\alpha}\Psi_3 + \sigma\Psi_4 \\ &\quad - 2\mu\Phi_{11} - \bar{\lambda}\Phi_{20} + 2\beta\Phi_{21} + \rho\Phi_{22} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} D(\Psi_4) - \bar{\delta}(\Psi_3 + \Phi_{21}) + \Delta(\Phi_{20}) &= -3\lambda\Psi_2 + 2\alpha\Psi_3 + \rho\Psi_4 + 2\nu\Phi_{10} - 2\lambda\Phi_{11} \\ &\quad - (2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\Phi_{20} - 2(\bar{\tau} - \alpha)\Phi_{21} + \bar{\sigma}\Phi_{22} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_3 - \Phi_{21}) - \delta(\Psi_4) + \bar{\delta}(\Phi_{22}) &= 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4 \\ &\quad - 2\nu\Phi_{11} - \bar{\nu}\Phi_{20} + 2\lambda\Phi_{12} + 2(\gamma + \bar{\mu})\Phi_{21} - \bar{\tau}\Phi_{22} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} D(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \delta(\Phi_{10}) + \Delta(\Phi_{00}) - \bar{\delta}(\Phi_{01}) &= (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \mu - \bar{\mu})\Phi_{00} - 2(\alpha + \bar{\tau})\Phi_{01} \\ &\quad - 2(\bar{\alpha} + \tau)\Phi_{10} + 4\rho\Phi_{11} + \bar{\sigma}\Phi_{02} + \sigma\Phi_{20} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} D(\Phi_{12}) - \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) + \Delta(\Phi_{01}) - \bar{\delta}(\Phi_{02}) &= (2\gamma - \mu - 2\bar{\mu})\Phi_{01} + \bar{\nu}\Phi_{00} - \bar{\lambda}\Phi_{10} - 2\tau\Phi_{11} \\ &\quad + (2\bar{\beta} - 2\alpha - \bar{\tau})\Phi_{02} + 3\rho\Phi_{12} + \sigma\Phi_{21} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} D(\Phi_{22}) - \delta(\Phi_{21}) + \Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \bar{\delta}(\Phi_{12}) &= \nu\Phi_{01} + \bar{\nu}\Phi_{10} - 2(\mu + \bar{\mu})\Phi_{11} - \lambda\Phi_{02} \\ &\quad - \bar{\lambda}\Phi_{20} + (2\bar{\beta} - \bar{\tau})\Phi_{12} + (2\beta - \tau)\Phi_{21} + 2\rho\Phi_{22} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Irodalomjegyzék

- [1] A.J. Amsel, G.T. Horowitz, D. Marolf and M.M. Roberts: *Uniqueness of extremal Kerr and Kerr-Newman black holes*, arXiv:0906.2367 (2009)
- [2] L. Andersson, M. Mars, and W. Simon: *Local existence of dynamical and trapping horizons*, Phys. Rev. Lett. **95**, 111102 (2005)
- [3] L. Andersson, M. Mars, and W. Simon: *Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes*, arXiv:0704.2889
- [4] A. Ashtekar, C. Beetle and J. Lewandowski: *Mechanics of Rotating Isolated Horizons*, Phys. Rev. D. **64** 044016 (2001)
- [5] A. Ashtekar, C. Beetle and J. Lewandowski: *Geometry of Generic Isolated Horizons*, Class. and Quant. Grav., **19**, 1195-1225 (2002)
- [6] A. Ashtekar and B. Krishnan: *Isolated and dynamical horizons and their applications*, Living Reviews in Relativity, no 10, 1-77 (2004); <http://www.livingreviews.org/lrr-2004-10>
- [7] A. Ashtekar, J. Engle and C.V.D. Broeck: *Quantum horizons and black-hole entropy: inclusion of distortion and rotation*, Class. Quant. Grav. **22**, L27-L34 (2005)
- [8] I. Bengtsson, J.M.M. Senovilla: *A Note on trapped Surfaces in the Vaidya Solution*, Phys. Rev. D **79** 024027 (2009)
- [9] G.D. Birkhoff: *Relativity and Modern Physics* Cambridge, MA: Harvard University Press. LCCN 23008297 (1923)
- [10] D. Birmingham: *Topological black holes in anti-de Sitter space*, Class. Quant. Grav. **16**, 1197-1205 (1999)
- [11] R.H. Boyer and R.W. Lindquist: *Maximal analytic extension of the Kerr metric*, J. Math. Phys. **8**, 265-281 (1967)
- [12] D.R. Brill, J. Louko and P. Peldán: *Thermodynamics of (3+1)-dimensional black holes with toroidal or higher genus horizons*, Phys. Rev. D **56**, 3600-3610 (1997)
- [13] G.L. Bunting: *Proof of the uniqueness conjecture for black holes*, Ph.D. Thesis, University of New England, Admirale (1987)
- [14] F. Cagnac: *Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi-linéaires*, Annali Mat. pura appl. **129**, 12-41 (1980)
- [15] M. Cai and G. J. Galloway: *On the topology and area of higher-dimensional black holes*, Class. Quant. Grav. **18**, 2707-2718 (2001)
- [16] S. Carlip, *Entropy from conformal field theory at Killing horizons*, Class. Quant. Grav. **16**, 3327 (1999)

- [17] S. Carlip: *Near-horizon conformal symmetry and black hole entropy*, Phys. Rev. Lett. **88**, 241301 (2002)
- [18] B. Carter: *Global structure of the Kerr family of gravitational field*, Phys. Rev. **174**, 1559-1571 (1968)
- [19] B. Carter: *Killing Horizons and Orthogonally Transitive Groups in Space-Time*, J. Math. Phys. **10**, 70-81 (1969)
- [20] B. Carter: *An Axisymmetric Black Hole has only Two Degrees of Freedom*, Phys. Rev. Lett. **26**, 331-333 (1971)
- [21] B. Carter: in *Black holes*, ed. C. DeWitt and B.S. Dewitt (New York: Gordon & Breach, 1973)
- [22] B. Carter: *The Bunting Identity and Mazur Identity for non-linear Elliptic Systems including the Black Hole Equilibrium Problem*, Commun. Math. Phys. **99**, 563-91 (1985)
- [23] S. Chandrasekhar: *The Mathematical Theory of Black Holes*, New York: Oxford University Press (1998)
- [24] D. Christodoulou: *The Formation of Black Holes in General Relativity*, Monographs in Mathematics, European Mathematical Soc. 2009
- [25] P.T. Chruściel and R.M. Wald: *Maximal hypersurfaces in asymptotically flat spacetimes*, Commun. Math. Phys. **163**, 561-604 (1994)
- [26] P.T. Chruściel E. Delay, G.J. Galloway, R. Howard: *Regularity of horizons and the area theorem*, Annales Henri Poincare **2**, 109-178 (2001)
- [27] C.M. Claudel and K.P Newman: *The Cauchy problem for quasi-linear hyperbolic evolution problems with a singularity in the time*, Proc. R. Soc. London **A 454**, 1073-1107 (1998)
- [28] R. Courant and D. Hilbert: *Methods of mathematical physics Vol. II.*, New York, Interscience Publishers (1962)
- [29] S. Fairhurst and B. Krishnan: *Distorted black holes with charge*, Int. J. Mod. Phys. **D 10**, 691-709 (2001)
- [30] J. Foster: *Asymptotic symmetry and the global structure of future null infinity*, Int. J. Theor. Phys. **26**, 1107-1124 (1987)
- [31] F.G. Friedlander: *The wave equation on curved space-time*, Cambridge Univ. Press. (1975)
- [32] J.L. Friedman, K. Schleich and D.M. Witt: *Topological Censorship*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1486-1489 (1993); Erratum-ibid. **75** 1872 (1995)
- [33] H. Friedrich: *On the regular and asymptotic characteristic initial value problem for Einstein's vacuum field equations*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **375**, 169-184 (1981)
- [34] H. Friedrich: *Cauchy problems for the conformal vacuum field equations in general relativity*, Commun. Math. Phys. **91**, 445-472 (1983)
- [35] H. Friedrich: *On the hyperbolicity of Einstein's and other gauge field equations*, Commun. Math. Phys. **100**, 525-543 (1985)
- [36] H. Friedrich: *Hyperbolic reductions for Einstein's equations*, Class. Quant. Grav. **13**, 1451-1469 (1996)
- [37] H. Friedrich, I. Rácz and R.M. Wald: *On rigidity of spacetimes with stationary event- or compact Cauchy horizons*, Commun. Math. Phys. **204** 691-707 (1999)

- [38] V.P. Frolov and N. Sanchez: *Vacuum energy density near static distorted black holes*, Phys. Rev. D **33**, 1604-1610 (1986)
- [39] A.V. Frolov and V.P. Frolov: *Black holes in a compactified spacetime*, Phys. Rev. D **67**, 124025 (2003)
- [40] V.P. Frolov and A.A. Shoom: *Interior of Distorted Black Holes*, arXiv:0705.1570 (2007)
- [41] G.J. Galloway: *Maximum Principles for Null Hypersurfaces and Null Splitting Theorems*, Annales Poincare Phys. Theor. **1** 543-567 (2000)
- [42] G.J. Galloway, K. Schleich, D.M. Witt and E. Woolgar: *The AdS/CFT correspondence conjecture and topological censorship*, Phys. Lett. B **505**, 255-262 (2001)
- [43] G.J. Galloway and R. Schoen: *A generalisation of Hawking's black hole topology theorem to higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **266**, 571-576 (2006)
- [44] G.J. Galloway: *Rigidity of outer horizons and the topology of black holes*, arXiv:gr-qc/0608118
- [45] G.J. Galloway and N. O'Murchadha: *Some remarks on the size of bodies and black holes*, Class. Quant. Grav. **25**, 105009 (2008)
- [46] R. Geroch: *Topology in General Relativity*, J. Math. Phys. **8**, 782-786 (1967)
- [47] R. Geroch: *Domain of dependence*, J. Math. Phys. **11**, 437-449 (1970)
- [48] R. Geroch, A. Held and R. Penrose: *A space-time calculus based on pairs of null directions*, J. Math. Phys. **14**, 874-881 (1973)
- [49] R. Geroch and J. B. Hartle: *Distorted black holes*, J. Math. Phys. **23**, 680-692 (1982)
- [50] G.W. Gibbons: *Some Comments on Gravitational Entropy and the Inverse Mean Curvature Flow*, Class. Quant. Grav., **16**, 1677-1687 (1999)
- [51] M. Gromov and H.B. Lawson: *Positive Scalar Curvature and the Dirac Operator on Complete Riemannian Manifolds*, Publ. Math. IHES **58**, 83-196 (1983);
- [52] T. Harmark and N.A. Obers: *Black holes on cylinders*, JHEP **05**, 032 (2002)
- [53] S.W. Hawking and G.R.F. Ellis: *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge, (1973)
- [54] S.W. Hawking: *Black holes in general relativity*, Commun. Math. Phys. **25**, 152-66 (1972)
- [55] M. Heusler: *Black Hole Uniqueness Theorems*, Cambridge Lecture Notes in Physics (Cambridge, in press)
- [56] S. Hollands, A. Ishibashi and R.M. Wald: *A higher dimensional stationary rotating black hole must be axisymmetric*, Commun. Math. Phys. **271**, 699-722 (2007)
- [57] J. Isenberg and V. Moncrief: *Symmetries of cosmological Cauchy horizons with exceptional orbits*, J. Math. Phys. **26**, 1024-1027 (1985)
- [58] W. Israel: *Event horizons in static vacuum space-times*, Phys. Rev. **164**, 1776-1779 (1967)
- [59] W. Israel: *Event horizons in static electrovac space-times*, Commun. Math. Phys. **8**, 245-260 (1968)
- [60] W. Israel and K. A. Khan: *Collinear particles and Bondi dipoles in general relativity*, Nuovo Cimento **33**, 331-344 (1964)

- [61] T. Jacobson and S. Venkataramani: *Topology of event horizons and topological censorship*, Class. Quant. Grav. **12**, 1055-1062 (1995)
- [62] T. Jacobson and G. Kang: *Increase of black hole entropy in higher curvature gravity*, Phys. Rev. D. **52**, 3518-3528 (1995)
- [63] T. Jacobson and R. Parentani: *Horizon entropy*, Found. Phys. **33**, 323-348 (2003)
- [64] B.S. Kay and R.M. Wald: *Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on space-times with a bifurcate Killing horizon*, Phys. Rep. **207**, 49-136 (1991)
- [65] P.R. Kerr: *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**, 237-238 (1963)
- [66] S. Kichenassamy and A.D. Rendall: *Analytic description of singularities in Gowdy space-times*, Class. Quant. Grav. **15**, 1339-1355 (1998)
- [67] J. K ann ar and I. R acz: *On the strength of spacetime singularities*, J. Math. Phys. **33**, 2842-2848 (1992)
- [68] S. Klainerman, I. Rodnianski: *On the formation of trapped surfaces*, arXiv:0912.5097 (2009)
- [69] S. Kobayashi  s K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1*. Interscience (Wiley), New York (1963)
- [70] M.D. Kruskal: *Maximal Extension Of Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960)
- [71] H.K. Kunduri, J. Lucietti and H.S. Reall: *Near-horizon symmetries of extremal black holes*, Class. Quant. Grav. **24**, 4169-4189 (2007)
- [72] P.O. Mazur: *Proof of uniqueness of the Kerr-Newman black hole solution*, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 3173-80 (1982)
- [73] A.J.M. Medved, D. Martin and M. Visser: *Dirty black holes: Spacetime geometry and near-horizon symmetries*, Class. Quant. Grav. **21**, 3111-3126 (2004)
- [74] A.J.M. Medved, D. Martin and M. Visser: *Dirty black holes: Symmetries at stationary non-static horizons*, Phys. Rev. D **70** 024009 (2004)
- [75] V. Moncrief and J. Isenberg: *Symmetries of cosmological Cauchy horizons*, Commun. Math. Phys. **98**, 387-413 (1983)
- [76] H. M ller zum Hagen and H.-J. Seifert: *On characteristic initial-value and mixed problems*, Gen. Rel. Grav. **8**, 259-301 (1977)
- [77] H. M ller zum Hagen: *Characteristic initial value problem for hyperbolic systems of second order differential systems*, Ann. Inst. Henri Poincaré **53**, 159 - 216 (1990)
- [78] R.C. Myers: *Higher-dimensional black holes in compactified space-times*, Phys. Rev. D **35**, 455-466 (1987)
- [79] L.A. Mysak and G. Szekeres: *Behaviour of the Schwarzschild singularity in superimposed gravitational field*, Can. J. Phys. **44**, 617-627 (1966)
- [80] E. Newman and A. Janis: *Note on the Kerr Spinning-Particle Metric*, J. Math. Phys., **6**, 915-917 (1965)
- [81] E.T. Newman and T.W.J. Unti: *Behaviour of Asymptotically Flat Empty Spaces*, J. Math. Phys. **3**, 891-901 (1962)

- [82] T.W. Noonan: *Huygens' principle in conformally flat spacetimes*, Class. Quant. Grav. **12**, 1087-1092 (1995)
- [83] E.T. Newman, R. Penrose: *An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin coefficients.*, J. Math. Phys. **3** 566-578 (1962), **4**, 998 (1963)
- [84] E.T. Newman and R. Penrose: *Note on the Bondi-Metzner-Sachs group*, J. Math. Phys., **7** 863-879 (1966)
- [85] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff: *On Massive Neutron Cores*, Physical Review **55**, 374-381 (1939)
- [86] R. Penrose: *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** 54-59 (1965)
- [87] R. Penrose: *Techniques of differential topology in relativity*, SIAM, No. 7., Philadelphia (1972)
- [88] R. Penrose: *Singularities and time-asymmetry*, in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, eds. Hawking and Israel, Cambridge University Press (1979)
- [89] R. Penrose: *The Question of Cosmic Censorship*, in *Black Holes and Relativistic Stars*, ed. Robert Wald, University Of Chicago Press (1994)
- [90] P.C. Peters: *Toroidal black holes?*, J. Math. Phys. **20**, 1481-1485 (1979)
- [91] I. Rácz and R.M. Wald: *Extension of spacetimes with Killing horizon*, Class. Quant. Grav. **9**, 2643-2656 (1992)
- [92] I. Rácz and R.M. Wald: *Global extensions of spacetimes describing asymptotic final states of black holes*, Class. Quant. Grav. **13**, 539-553 (1996)
- [93] I. Rácz: *Spacetime extensions I.*, J. Math. Phys. **34**, 2448 - 2464 (1993)
- [94] I. Rácz: *Space-time extensions II*, arXiv:0803.0648 (2008)
- [95] I. Rácz: *On further generalisation of the rigidity theorem for spacetimes with a stationary event horizon or a compact Cauchy horizon*, Class. Quant. Grav. **17** 153-178 (2000)
- [96] I. Rácz: *On the existence of Killing vector fields*, Class. Quant. Grav. **16**, 1695-1703 (1999)
- [97] I. Rácz: *Symmetries of spacetime and their relation to initial value problems*, Class. Quant. Grav. **18**, 5103-5113 (2001)
- [98] I. Rácz: *Létezik-e a kozmikus cenzor?*, Fizikai Szemle, **LV**, 382-387 (2005)
- [99] I. Rácz: *Stationary black holes as holographs*, Class. Quant. Grav. **24**, 5541-5571 (2007)
- [100] I. Rácz: *A Simple proof of the recent generalisations of Hawking's black hole topology theorem*, Class. Quant. Grav. **25**, 162001 (2008)
- [101] I. Rácz: *On the topology of untrapped surfaces*, Class. Quant. Grav. **26**, 055017 (2009)
- [102] T. Regge and J.A. Wheeler: *Stability of a Schwarzschild singularity*, Phys. Rev. **108**, 1063-1069 (1957)
- [103] A.D. Rendall: *Reduction of the characteristic initial value problem to the Cauchy problem and its applications to the Einstein equations*, Proc. R. Soc. Lond. A **427**, 221-239 (1990)
- [104] A.D. Rendall: *Fuchsian analysis of singularities in Gowdy spacetimes beyond analyticity*, Class. Quant. Grav. **17**, 3305-3316 (2000)

- [105] A.D. Rendall: *Fuchsian methods and spacetime singularities*, Class. Quant. Grav. **21**, S295-S304 (2004)
- [106] D.C. Robinson: *Uniqueness of the Kerr Black Hole*, Phys. Rev. Lett. **34**, 905-6 (1975)
- [107] R. Schoen and S.-T. Yau: *The existence of a black hole due to condensation of matter*, Commun. Math. Phys. **90**, 575-579 (1983)
- [108] B.G. Schmidt: *Vacuum spacetimes with toroidal null infinities*, Class. Quant. Grav. **13**, 2811-2816 (1996)
- [109] K. Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **1**, 189-196 (1916)
- [110] N. Steenrod: *Topology of Fiber Bundles*, Princeton: Princeton Univ. Press (1951)
- [111] G. Szekeres: *On the singularities of a Riemannian manifold*, Publ. Mat. Debrecen **7**, 285 (1960)
- [112] R.C. Tolman: *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, Phys. Rev. **55**, 364-373 (1939)
- [113] A. Tomimatsu: *Distortion of Schwarzschild-anti-de Sitter black holes to black strings*, Phys. Rev. D **71**, 124044 (2005)
- [114] C.V. Vishveshwara: *Stability Of The Schwarzschild Metric*, Phys.Rev.D **1**, 2870-2879 (1970)
- [115] R.M. Wald: *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984)
- [116] R.M. Wald and V. Iyer: *Trapped surfaces in the Schwarzschild geometry and cosmic censorship*, Phys. Rev. D **44**, R3719 - R3722 (1991)
- [117] R.M. Wald: *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, Chicago (1994)
- [118] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons Inc (1972)
- [119] E. Woolgar: *Bounded area theorems for higher-genus black holes*, Class. Quant. Grav. **16**, 3005-3012 (1999)
- [120] C. von Westenholz, *Differential forms in mathematical physics*, North-Holland, Amsterdam, (1981)
- [121] F.J. Zerilli: *Effective potential for even parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations*, Phys. Rev. Lett. **24**, 737-738 (1970)