

Kvantumos bolyongás és komplex káosz

**mérésekkel befolyásolt érdekes dinamika
kvantuminformaticai protokollokban**

Kiss Tamás

Együttműködés:

I. Jex, M. Štefaňák, S. Vymětal, J. Novotný, V. Potoček (Prága)

G. Alber (Darmstadt)

Gábris A., Kálmán O., Földi P., Darázs Z., Kollár B., Kecskés L.,

Tóth. L. D., Kollár E.

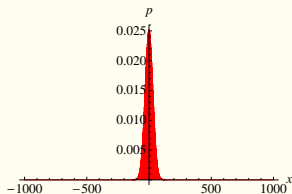
MTA SZFKI

Tihany, 2010

1D diszkrét idejű bolyongás

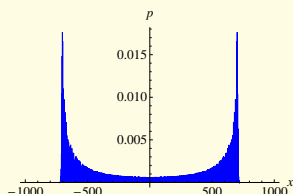
Klasszikus

- Galton-deszka, stat. fiz., járvány, kockajáték, tőzsde, GooglePageRank, etc.
- Binomiális \rightarrow Gauss
- Diffúzió, szélesség $\sim \sqrt{t}$



Kvantum

- Érme: extra Hilbert-tér
- Interferencia, szélesség $\sim t$
- Kvadratikusan gyorsabb terjedés



Kvantumos bolyongás

Háttér:

- Ötlet: Y. Aharonov, L. Davidovich, N. Zagury, PRA 1993
- Kvantumos sejtautomata: D. Meyer, PLA 1996
nincs homogén megoldás → érmeter szükséges
- Keresés **hiperkockán**: N. Shenvi, J. Kempe, K. B. Whaley, PRA 2003
- **Algoritmikus alkalmazások**
összefoglaló cikk: M. Santha, arXiv 2008
- Kvantumoptikai elrendezés:
M. Hillery, J. Bergou, E. Feldman PRA 2003; Bužek, Košík, PRA 2005
- Keresés kvantumoptikai elrendezésben, hibával:
A. Gábris, T. Kiss, I. Jex, PRA 2007
- Megvalósítás: javaslatok egy sor fizikai rendszerben
pl.: Kvantum gyűrűk O. Kálmán, T. Kiss, P. Földi, PRB 2009

Kvantumos bolyongás

Kísérletek

- Bose-Einstein kondenzátummal
[W. D. Phillips *et al.* 2004]
- Optikailag csapdázott atomokkal
[M. Karski *et al.* Science 2009]
- Egy és két csapdázott ionnal
[F. Zähringer *et al.* PRL 2010]
- Lineáris optikai elemekkel
[A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potoček, A. Gábris, P. J. Mosley, E. Andersson, I. Jex, Ch. Silberhorn PRL 2010]

Kvantumos bolyongás

Motiváció

- **1D egész rács:** aszimptotikus fejlődés — részletesen tárgyalták
- **2D egész rács:** egyes esetek: B. Tregenna et al, NJPhysics 2003, N. Inui, Y. Konishi, N. Konno, PRA 2004, Pemantle csoport, arXiv 2008, 2009
 - Grover érme — lokalizáció (cspdázás) az origóban
 - Fourier érme — nincs lokalizáció
- **Elérési idő**
Klasszikusan:
véges egy véges gráfon & a szórással skálázik

Kvantumosan:
 - **Exponenciálisan gyorsabb lehet** (Kempe, 2003)
 - **Végtelen lehet véges gráfon** (Krovi, Brun, 2006)

Kvantumos bolyongás: definíciók

- Pozíció (P) és érme (C , coin)

Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C$

- Diszkrét hely a rácson:

$$\mathcal{H}_P = \ell^2(\mathbb{Z}^d) = \text{Span} \{ |\mathbf{m}\rangle, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \}$$

- Értetér — lehetséges lépések:

$$\{ \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, c \}$$

- Rögzítjük: $c = 2^d$:

$$\mathcal{H}_C = \mathbb{C}^{2^d} = \text{Span} \{ |\mathbf{e}_i\rangle, \mathbf{e}_i \in \{1, -1\}^d \}$$

Egy qubit minden térdimenzióra

- Unitér fejlődés:

$$U = S \cdot (I_P \otimes C)$$

$$|\psi(t)\rangle \equiv \sum_{\mathbf{m}, i} \psi_i(\mathbf{m}, t) |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{e}_i\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$$

- Feltételes lépés operátor:

$$S = \sum_i |\mathbf{m} + \mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i|$$

- Érmedobás operátora

$$C \in U(c)$$

$$\text{Szimmetrikus érme: } |C_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Kvantumos bolyongás: definíciók

- Pozíció (P) és érme (C , coin)

Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C$

- Diszkrét hely a rácson:

$$\mathcal{H}_P = \ell^2(\mathbb{Z}^d) = \text{Span} \{ |\mathbf{m}\rangle, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \}$$

- Érmeter — lehetséges lépések:
 $\{\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, c\}$

- Rögzítjük: $c = 2^d$:

$$\mathcal{H}_C = \mathbb{C}^{2^d} = \text{Span} \{ |\mathbf{e}_i\rangle, \mathbf{e}_i \in \{1, -1\}^d \}$$

Egy qubit minden térdimenzióra

- Unitér fejlődés:

$$U = S \cdot (I_P \otimes C)$$

$$|\psi(t)\rangle \equiv \sum_{\mathbf{m}, i} \psi_i(\mathbf{m}, t) |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{e}_i\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$$

- Feltételes lépés operátor:

$$S = \sum_i |\mathbf{m} + \mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i|$$

- Érmedobás operátora

$$C \in U(c)$$

$$\text{Szimmetrikus érme: } |C_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Klasszikus bolyongás Pólya-féle száma

Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz.

Von

Georg Pólya in Zürich.

1. Ich beziehe den d -dimensionalen Raum auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Ich betrachte diejenigen Punkte, deren Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_d sämtlich ganzzahlig sind, und solche Verbindungsgeraden dieser Punkte, die einer der d Koordinatenachsen parallel sind. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet das d -dimensionale *Geradennetz*, und die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die man gewöhnlich als Gitterpunkte bezeichnet, sollen die *Knotenpunkte* des Netzes heißen. In jedem Knotenpunkte kreuzen sich d zueinander rechtwinklige Geraden des Netzes, und

G. Pólya, *Mathematische Annalen* 84, 149 (1921)

Klasszikus bolyongás Pólya-féle száma

Definíció

- Bolyongás \mathbb{Z}^d rácson, kezdőpont: $\mathbf{0}$
- Pólya-féle szám P : az origóba valaha visszatérés valószínűsége
- Visszatérő ha $P = 1$
- Elszökő ha $P < 1$
- $p_o(t)$ — visszatérés valószínűsége t időpontban

NB: Páratlan t esetén $p_o(t) = 0 \implies$ csak páros t -t tekintünk

Univerzális viselkedés

P csak a dimenziótól függ:

$d \leq 2$ visszatérő ($P = 1$)

$d > 2$ elszökő ($P_d = \text{const} < 1$)

Diszkrét kvantumos bolyongás Pólya-féle száma

Mérés problémája

Mérés \rightarrow megváltozik a kvantumállapot

Visszatérési valószínűség — függ a mérés módjától

Helymérés minden lépésben \rightarrow klasszikus bolyongás

T. Kiss, L. Kecskés, M. Štefaňák, I. Jex, 2009

Javasolt mérési eljárás

- Azonos állapotú sokaság
- Egy méréssorozat: az n -edik rendszert n lépés után mérjük
- Pólya-féle szám:

$$P = 1 - \prod_{t=1}^{+\infty} (1 - p_o(t))$$

- Visszatérés feltétele $\sum_{t=0}^{+\infty} p_o(t) = +\infty \iff p_o(t) \sim \frac{1}{t}$ or slower

Fourier analízis

- Eltolási invariancia

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) \equiv \sum_{\mathbf{m}} \psi(\mathbf{m}, t) e^{i(\mathbf{m} \cdot \mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in (-\pi, \pi]^d$$

Propagátor: $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \tilde{U}^t \tilde{\psi}(\mathbf{k}, 0)$

Propagátor sajátértékei: $\lambda_j = e^{i\omega_j(\mathbf{k})}$

- Kezdetben origóban lokalizált

$$\psi(\mathbf{m}, t) = 0 \quad \text{for} \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \implies \tilde{\psi}(\mathbf{k}, 0) = \psi(\mathbf{0}, 0)$$

- Hullámfüggvény az origóban

$$\psi(\mathbf{0}, t) = \sum_j \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_d}{2\pi} e^{i\omega_j(\mathbf{k})t} \cdot (\psi(\mathbf{0}, 0), \mathbf{v}_j(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_j(\mathbf{k}) \right]$$

Aszimptotikus lecsengés vizsgálata

$$\psi(\mathbf{0}, t) = \sum_j \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_d}{2\pi} e^{i\omega_j(\mathbf{k})t} \cdot (\psi(\mathbf{0}, 0), \mathbf{v}_j(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{v}_j(\mathbf{k}) \right]$$

stacionárius fázis közelítés

Stacionárius fázisú pontok \mathbf{k}_0 : $\nabla\omega(\mathbf{k}_0) = 0$

A pontok degenerációja határozza meg a lecsengés ütemét

A kezdőállapot hatása:

Zéró átfedés egy sajátvektorral:

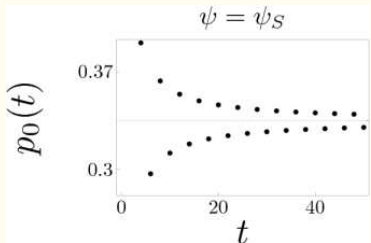
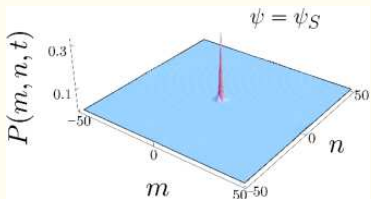
$$(\psi(\mathbf{0}, 0), \mathbf{v}_j(\mathbf{k}_0)) = 0$$

\implies a vonatkozó **stac. fázisú pont kiesik**

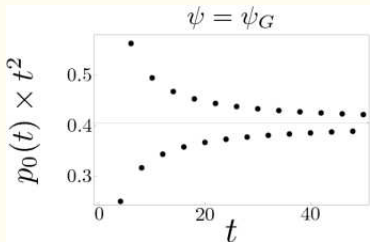
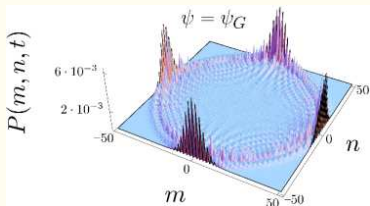
$\implies p_o(t)$ lecsengése gyorsabb lehet

2D bolyongás Grover érmével

Visszatérő



Elszökő



2D Grover érme

$$G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $G(k_1, k_2)$ sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4}(k_1, k_2) = e^{\pm i\omega(k_1, k_2)}$$

- Lokalizáció (csapdázódás) kivéve egy kezdőállapotot:

$$\psi_G = \frac{1}{2} (1, -1, -1, 1)^T$$

amely ortogonális $v_{1,2}(k_1, k_2)$ sajátvektorokra

Visszatérés tetszőleges dimenzióban

Páros: $2d$ dim

- d Grover érme tenzorszorzata

$$C^{(2d)} = G \otimes \dots \otimes G$$

- 2^{2d-1} konstans sajátérték
 $\lambda_i = \pm 1$
 \implies **localizáció**
 \implies **visszatérés**
- Kivéve egy 4^{d-1} dim alterét a kezdőállapotoknak:

$$\psi_n = \psi_{1\dots 2n} \otimes \psi_G \otimes \psi_{2n+3\dots 2d}$$

Páratlan: $2d + 1$ dim

- Tetszőleges 1D érme az extra dimenzióban ($C \in U(2)$):

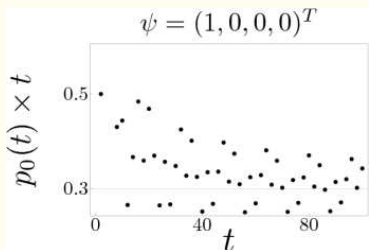
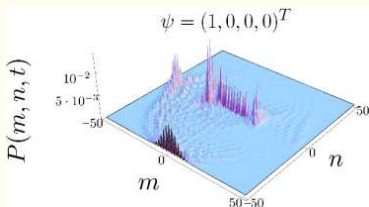
$$C^{(2d+1)} = C^{(2d)} \otimes C$$

- 2^{2d} speciális sajátérték
- $p_o(t) \sim \frac{1}{t}$
 \implies **visszatérés**
 \implies **de nincs lokalizáció**
- Kivéve egy $2 \cdot 4^{d-1}$ dim alterét a kezdőállapotoknak:

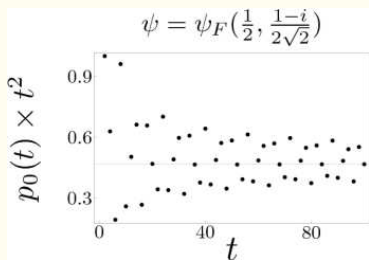
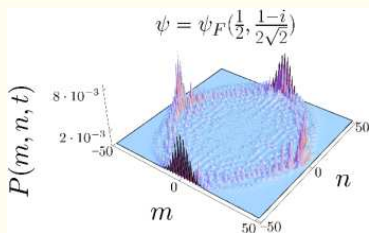
$$\psi_n = \psi_{1\dots 2n} \otimes \psi_G \otimes \psi_{2n+3\dots 2d+1}$$

Probability density of a 2D walk with Fourier coin

Recurrent



Transient



2-D Fourier bolyongás

- Fourier érme

$$F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

- Két fázisnak van **vonal menti stacionárius fázis** \implies járulék $\sim t^{-1}$
- Origóbeli valószínűség $p_0(t)$ lecsngése t^{-1} kivéve

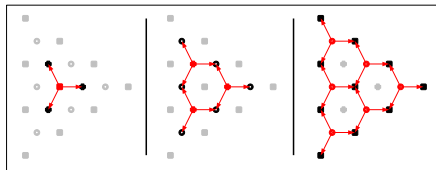
$$\psi \in \psi_F(a, b) = (a, b, a, -b)^T$$

amelyek ortogonálisak a $v_{1,2}(\mathbf{k})$ vektorokra ha \mathbf{k} a st. f. vonalon

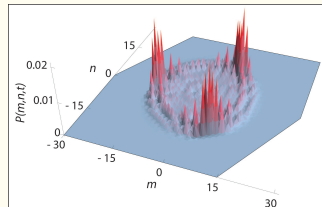
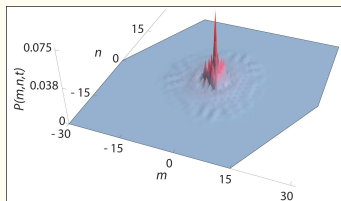
Szimmetrikus esetek \mathbb{Z}^d rácson

Eset	$p_o(t)$	Pólya szám	Klasszikus
1-D	t^{-1} tetszőleges ψ_0	1	1
d -D független	t^{-d} tetszőleges ψ_0	< 1 ($d > 1$)	< 1 ($d > 2$)
2-D Grover	const. ha $\psi_0 \neq \psi_G$	1	1
	t^{-2} ha $\psi_0 = \psi_G$	< 1	
d -D Grover-alapú ($d > 2$)	<i>ptlan</i> D : const. <i>páros</i> D : t^{-1} if $\psi_0 \notin \{\psi_G\}$	1	< 1
	t^{-2} if $\psi_0 \in \{\psi_G\}$	< 1	
2-D Fourier	t^{-1} ha $\psi_0 \notin \{\psi_F\}$	1	1
	t^{-2} ha $\psi_0 \in \{\psi_F\}$	< 1	

Kvantumos bolyongás háromszögrácson



Grover érme



Nincs sem lokalizáció, sem visszatérés

Megtalálási valószínűség az origóban: $t^{-4/3}$ illetve $t^{-8/3}$

Összefoglalás

- Dimenzió és kezdőállapot szerepe: visszatérő lehet tetszőleges dimenzióban
- 2D: elszökő/visszatérő/lokalizáló bolyongások — érme és kezdőállapot-függő
- Folytonos idejű bolyongás: csak a rácstól (gráftól) függ
Z. Darázs, T. Kiss, PRA 81, 062319 (2010)

Áttekintő cikk:

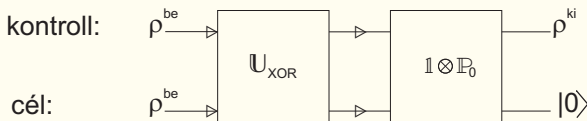
N. Konno: Quantum walks, U. Franz and M. Schurmann (Eds):
Quantum Potential Theory, Lect. Notes in Math., Vol. 1954, Springer, pp.309-452
(2008).

Káosz és kvantummechanika

- Általában: nincs káosz a kvantummechanikában, az unitér időfejlődés miatt. Egzotikus ellenpéldák léteznek.
- Kvantumkáosz: egy klasszikusan kaotikus rendszer kvantumos verziója
 - A kvantumkáosznak vannak tipikus jegyei
 - **De:** nincs exponenciális érzékenység
[P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum*, ChaosBook.org (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2005)]
- Kvantum \rightarrow klasszikus: Hogyan keletkezik a káosz?
 - A környezet hatására nem-unitér fejlődés
[R. Schack *et al.* J. Phys. A 1995, G.G. Carlo *et al.* PRL 2005]
 - Modellezhetjük pl. folytonos méréssel
[T. Bhattacharya *et al.* PRL 2000; A.J. Scott and G.J. Milburn PRA 2001]

Nemlinearitás mérés és kiválasztás által

Elemenkénti négyzetreemelés



2. ábra. Az \mathcal{S} transzformáció lépései. Két másolata ugyanazon qubitállapotnak először egy unitér kapun megy keresztül (egyéb kapukat is választhatunk, mint az U_{XOR}), majd egy szűrőn. A szűrő kapu tartalmazza a mérést. A kontroll bit $\rho_{kontroll}^{be}$ a folyamat végén az új $\rho_{kontroll}^{ki}$ állapotban lesz, míg a cél bit mindig a $|0\rangle$ állapotban.

$$\rho_{ij} \xrightarrow{\mathcal{S}} N\rho_{ij}^2, \quad \text{Bázisfüggő fogalom!}$$

H. Bechmann-Pasquinucci *et al.* PRA 1998; D.R. Terno PRA 1999;
G. Alber *et al.* J. Phys. A 2001; P. Horodecki PRA 2003

Nemlinearitás mérés és kiválasztás által

Megvalósítás

- 1 $\rho^{in} \otimes \rho^{in}$ kell!
- 2 XOR-kapu (unitér):
 $U_{XOR}|i\rangle_1|j\rangle_2 = |i\rangle_1|i \oplus j\rangle$
- 3 Szűrjük a target $|0\rangle$ állapotára

Tulajdonságok & alkalmazások

- Működik $i, j = 0, \dots, D - 1$ esetén is
- Működik összetett rendszerekre is
- Példa: két qubites rendszer ($D = 4$): tisztítási protokoll

Iteráció

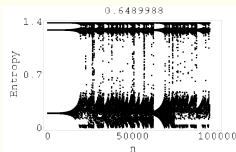
$$\rho_{ij} \xrightarrow{S} N\rho_{ij}^2$$

$$\mathcal{R}\rho = U\rho U^\dagger$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x e^{i\phi} \\ -\sin x e^{-i\phi} & \cos x \end{pmatrix}$$

Egy lépés: $\rho' = \mathcal{F}\rho = \mathcal{R}S\rho$

Numerikus hiba?



Valódi káosz?

Ljapunov exponens: általában numerikusan nehéz számolni

Legegyszerűbb eset: 1 qubit tiszta állapotban

$$|\varphi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle \rightarrow |\varphi'\rangle = c'_1|0\rangle + c'_2|1\rangle$$

Normálás + globális fázis \rightarrow elég 1 komplex amplitúdó

$$|\varphi\rangle = N(z)(z|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow |\varphi'\rangle = N(z')(z'|0\rangle + |1\rangle)$$

Norma: $N(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$

Leképezés \mathbb{C} fölött

\mathcal{F} -t egy $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés, F_p , reprezentálja:

$$z \mapsto F_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^*z^2} \quad p = \tan x e^{i\phi}$$

$p \in \mathbb{C}$ az unitér forgatás paramétere

Komplex racionális leképezések

Legyenek S és S' Riemann felületek, S' kompakt. Legyen F holomorf leképezések egy családja $f_\alpha : S \rightarrow S'$. Azt mondjuk F **normális**, ha minden végtelen sorozat F -ből tartalmaz egy részsorozatot, amely lokálisan egyenletesen tart egy határfüggvényhez.

S legyen egy Riemann felület, $f : S \rightarrow S$ egy nem konstans holomorf leképezés, $f^{\circ n} : S \rightarrow S$ pedig n -szeres iteráltja.

Rögzítsük a $z_0 \in S$ pontot, ekkor vagy

- 1 \exists egy U környezete z_0 -nak úgy, hogy $\{f^{\circ n}\}|U$ egy normális családot alkot $\Rightarrow z_0$ egy **normális** pont és z_0 a **Fatou halmazba** tartozik
- 2 nincs ilyen környezet $\Rightarrow z_0$ a **Julia halmazba** tartozik $J = J(f)$

J zárt halmaz, $F = S \setminus J$ nyílt halmaz.

J.W. Milnor *Dynamics in One Complex Variable*, (Vieweg, 2000)

Valódi káosz bizonyítása

Tétel a racionális függvényekről

Ha $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ egy másod, vagy magasabb fokú racionális függvény, akkor a $J(f)$ Julia halmaz **nem üres**.

Milnor, Chapter 4.

Másodfokú racionális függvény

$$z \mapsto F_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^* z^2}, \quad p = \tan x e^{i\phi}$$

A Riemann-gömbön:

$$\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty, \quad z \in \{0, \infty\} \leftrightarrow \{|1\rangle, |0\rangle\}$$

A triviális eset: nincs forgatás

Négyzetre emelő leképezés

$$z \mapsto F_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^* z^2}, \quad p = \tan x e^{i\phi} = 0$$

$$z \mapsto F_0(z) = z^2$$

Viselkedése

$$|z| < 1 \quad F^{\circ n}(z) \rightarrow 0$$

$$|z| > 1 \quad F^{\circ n}(z) \rightarrow \infty \quad \text{Két stabil fixpont: } \{0, \infty\}$$

$$|z| = 1 \quad \text{nem konvergál}$$

Triviális Julia halmaz: az **egységkör**

Ljapunov exponens a körön

A Ljapunov exponens definíciója

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta_z(0) \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta_z(n)}{\Delta_z(0)}.$$

A távolság az átfedésből:

$$\Delta_z(0) = 1 - |\langle z_1 | z_0 \rangle|^2$$

Nem mindig egyértelmű.

- Az egységkörön: $z_0 = 1, z_1 = \exp(i\varphi)$
- Távolság: $\Delta_z(n) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2^n \varphi)$
- **A Ljapunov exponens pozitív:**

$$\lambda_\varphi = 2 \ln 2$$

Hogyan bánjunk a komplex káosszal?

- Periodikus ciklusok: $f^{\circ n}(z_1) = z_1$
- Számoljunk multiplikátort: $\lambda = (f^{\circ n})'(z_1)$

$|\lambda| < 1$ vonzó

$|\lambda| > 1$ taszító

$|\lambda| = 1$ semleges

$\lambda = +1$ de $f^{\circ n} \neq 1$: parabolikus

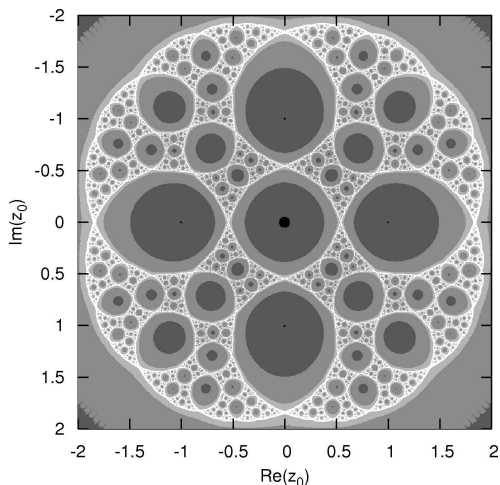
Fatou halmazban: vonzó ciklusok & és a vonzás körzete Ω

Julia halmazban: taszító ciklusok & a lezárás $\partial\Omega$

- Keressük meg a kritikus pontokat: $f'(z_{\text{crit}}) = 0$
 - Lemma 1:** Egy $d \geq 2$ -ed fokú racionális leképezésnek max. $2d - 2$ ciklusa, amely vonzó/parabolikus.
 - Lemma 2:** A kritikus pontok pályája vonzó vagy parabolikus ciklushoz tart, vagy sehova.
- Kövessük a kritikus pontok pályáját: konvergálnak-e.

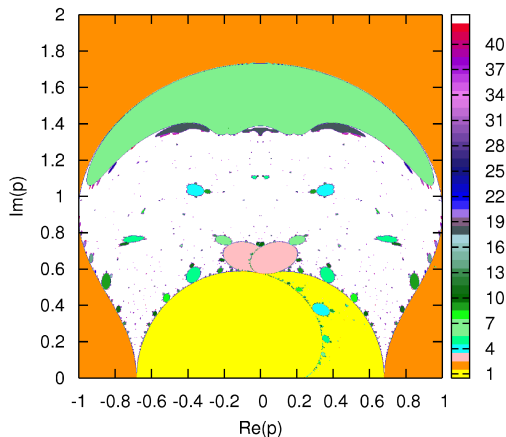
Nemtriviális Julia halmaz, $\rho = 1$

Egy vonzó periodikus ciklus: $\{-1, \infty\}$



Sötét - gyors, Szürke - lassú, Fehér - nincs konvergencia

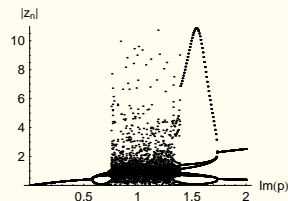
Vonzó periodikus ciklusok hossza, $z_0 = 0$



Tulajdonságok

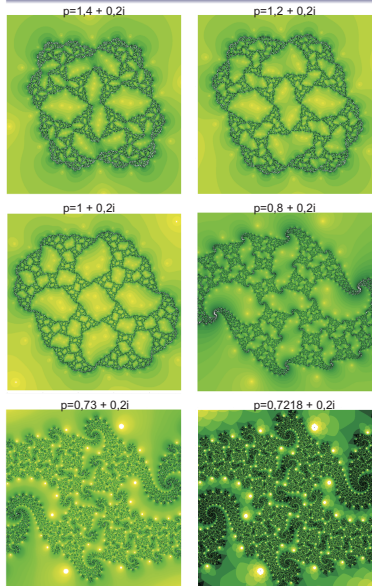
- Tükörszimmetria a Re tengelyre
- Szimmetria Im -re, ha $z_0 \leftrightarrow z_\infty$

Imaginárius ρ

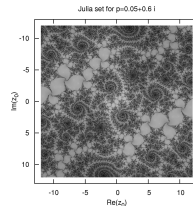
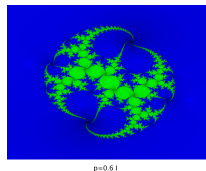
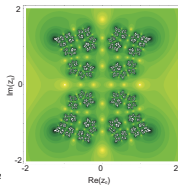
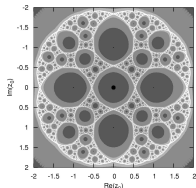
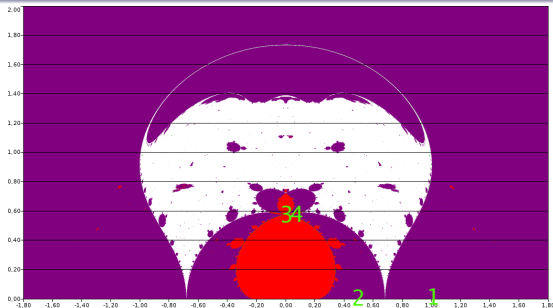


Sárga - 1 elemű vonzó ciklus, Narancs - 2 elemű, ..., Fehér - káosz

Julia halmazok



Julia halmazok és a paraméterter

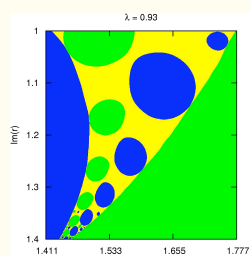
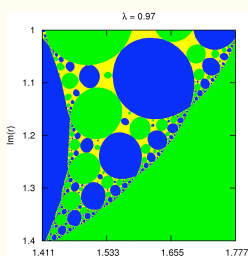
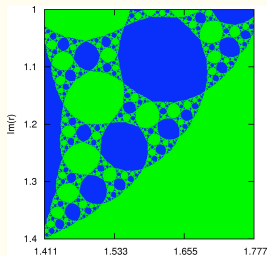
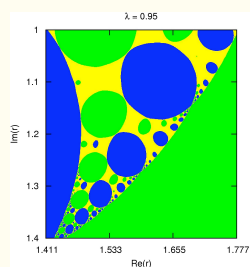
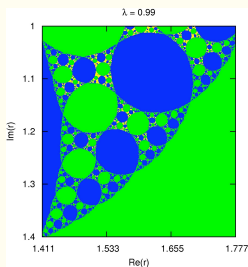
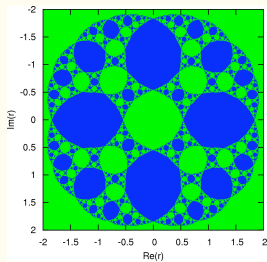


T. Kiss, I. Jex, G. Alber, E. Kollár, Int. J. Quant. Inf. (2008)

2 qubit: kaotikus összefonódás

$$|\psi_{12}(r)\rangle = N(|00\rangle + r|11\rangle)$$

$$\rho(\lambda, r) = \lambda |\psi_{12}(r)\rangle\langle\psi_{12}(r)| + (1 - \lambda)/4 \mathbb{1}$$



Összefoglalás

- Egy qubit:
 - gazdag kvantumrendszer!
 - komplex káosz
 - klasszikus megfelelő nélkül
- Két qubit:
kaotikusan fejlődő összefonódottság
- Hosszútávú viselkedés:
csak elméletileg
exponenciálisan nagy sokaság szükséges

Történeti megjegyzések

- Káosz a fizikában - Poincaréig nyúlik vissza
[H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (Gauthier-Villars, Paris, 1892)]
- Egy évszázada beszélnek komplex káoszlól - a matematikában:
 - 1906** Ekkor adta az első különös példát P. Fatou:
 $z \mapsto z^2 / (z^2 + 2)$
[P. Fatou, *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris 143 (1906) 546-548]
 - 1920-as évek** G. Julia, S. Lattés, J. F. Ritt
 - 1970-es évek** Számítógépek - képek: Mandelbrot & ...
- Más fizikai rendszerek megvalósítanak komplex káoszt?