Gravitáció mint entropikus erő

Takács Gábor

MTA-BME „Lendület" Statisztikus Térelméleti Kutatócsoport

ELFT Elméleti Fizikai Iskola
Szeged, Fizikai Intézet
2012. augusztus 28.

Vázlat

1. Entropikus erő: elemi példák
2. Bekenstein és a fekete lyukak entrópiája
3. Geometria és hőmérséklet
4. Newtoni gravitáció mint entropikus erő
5. Einstein-féle áltrel mint a téridő termodinamikája
6. Diszkusszió
7. Kitekintés

E. Verlinde: *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*, arXiv:1001.0785

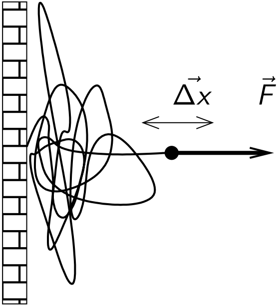
T. Jacobson: *Thermodinamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*
Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1260-1263, arXiv:gr-qc/9504004

T.Padmanabhan: *Thermodynamical Aspects of Gravity: New Insights*
Rep. Prog. Phys. **73** (2010) 046901, arXiv:0911.5004

Mi fán terem az entropikus erő?

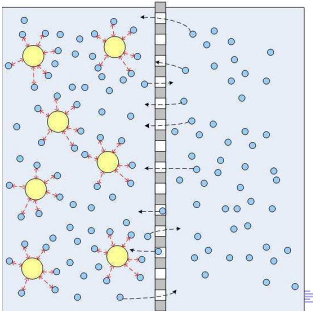
Polimer: $\Delta E_{\mathrm{conf}} \approx 0$

$$
\begin{aligned}
S(E,x) &= k_B \log \Omega(E,x) \\
Z(T,F) &= \int dE dx \Omega(E,x) \mathrm{e}^{-\frac{E+Fx}{k_B T}} \\
1/T = \partial_E S & \qquad F/T = \partial_x S \\
\mu\text{kanonikus:} & \qquad \partial_x S(E+Fx, x) = 0 \\
\Rightarrow & \qquad F \sim -\mathrm{const} \cdot k_B T \langle x \rangle
\end{aligned}
$$



Ozmózis: $\chi_s < 1$ oldószer aránya

$$
\begin{aligned}
\mu_s^0(I,p) &= \mu_s(I, \chi_s, p+\Pi) \\
&= \mu_s^0(I, p+\Pi) + RT \log \chi_s \\
\Rightarrow \Pi_{1,2} &= M_{1,2} RT \quad \Pi = \Pi_1 - \Pi_2
\end{aligned}
$$



$M_{1,2}$: molaritás, Π: ozmózis nyomás

Bekenstein gondolatkísérlete

Engedjünk le egy részecskét a fekete lyukba egy fonálon és a horizonthoz nagyon közel beejtjük.

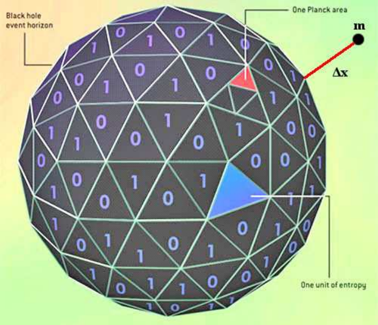
Vöröseltolódás miatt: a fekete lyuk tömeg (és felszín) változása akármilyen kicsi lehet, klasszikusan!

Megoldás: ha a részecske már a „méreténél” közelebb van a fekete lyukhoz, akkor annak a részének tekinthető.
$\Rightarrow$
a lyuk tömege és felszíne nő egy egységnyit, ami egy bit információ
$\Rightarrow$
a fekete lyuk entrópiája arányos a felszínnel.

Gyorsulás és hőmérséklet

Ötlet: részecske mérete a Compton hullámhossz

$$\Delta S = 2\pi k_B \text{ amikor } \Delta x = \frac{\hbar}{mc}$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar}\Delta x$$



Unruh hőmérséklet:

$$k_B T = \frac{\hbar a}{2\pi c}$$

Értelmezés: ez a hőmérséklet „okoz" a gyorsulást!

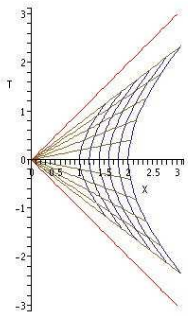
Entropikus erő: $\quad F\Delta x = T\Delta S$

$$\Rightarrow \quad F = ma \ !!!$$

Hőmérséklet és geometria

Gyorsulás esetén lokálisan: Rindler koordináták

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -dT^2 + dX^2 \\
& \kappa T = \sqrt{2\kappa l}\,\sinh \kappa t \\
& \kappa X = \pm\sqrt{2\kappa l}\,\cosh \kappa t \\
ds^2 &= -2\kappa l dt^2 + \frac{dl^2}{2\kappa l}
\end{aligned}
$$



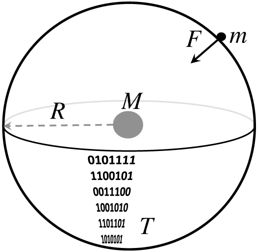
Euklidészi koordináták: $t = it_E$ és $T = iT_E$

$$\Rightarrow \quad t_E \simeq t_E + \frac{2\pi}{\kappa}$$

$$\text{QFT} \quad : \quad T = \frac{\kappa}{2\pi}$$

Gravitációs erő

Bitek száma a gömb felszínén:



$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar}$$

Ekvipartíció:

$$E = \frac{1}{2} N k_B T$$

Másrészt

$$E = Mc^2 \qquad A = 4\pi R^2$$

Teszttömeg eloszlás: m tömegű homogén gömbhéj R sugárnál

$$\begin{aligned} F\Delta x &= T\Delta S \\ &\Downarrow \quad \Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar}\Delta x \\ F &= \frac{GmM}{R^2} \quad !!! \end{aligned}$$

Alapvető feltevések

1. ΔS a holografikus felületre merőleges (emergens) irányban
2. A mikroszkopikus szabadsági fokok az ernyőn lokalizáltak ($S \propto A$)
3. Ekvipartíció
   Ez utóbbi nem is kell (eleve csak szabad – kvadratikus Hamiltoni – rendszerekre érvényes)
   Elég ha az „elveszett" bitek véletlenszerűen kerülnek ki a többek közül, ekkor
   $$\Delta S \propto \frac{E}{A}$$

Próbáljuk meg ezt kevésbé heurisztikusan összerakni! Miért így csináljuk:

$$\begin{aligned} \Delta S &\propto \Delta x \\ T &\propto a \end{aligned}$$

hiszen ΔS, T skalár viszont Δx, a vektor?!
(Visser, arXiv: 1108.5204: ez elég „barokkos" felépítést eredményez)

A newtoni potenciál és a holográfia

Tömegpont próbatest $\equiv$ n bit a holografikus ernyőn

$$mc^2 = \frac{1}{2} n k_B T$$

Ha elmozdul

$$\Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \Delta x \quad \text{de ugyanakkor} \quad k_B T = \frac{\hbar a}{2\pi c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta S}{n} = k_B \frac{a \Delta x}{2c^2} \ \Rightarrow \ a \propto \frac{\Delta S}{\Delta x} \quad \text{!!! ez már vektor-vektor!}$$

Newton:

$$\vec{a} = -\text{grad } \Phi$$

azaz

$$\frac{\Delta S}{n} = -k_B \frac{\Delta \Phi}{c^2} \ \Rightarrow \ \Delta \Phi = \text{entrópiacsökkenés/bit!}$$

Tehát a newtoni potenciál egy „coarse-graining" változó!
($\sim$ AdS/CFT RG skála!!!)

Visser észrevétele

$$T = |\vec{a}| \propto |\vec{\nabla}\Phi|$$

de egyben

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi \propto \vec{\nabla} S$$

és

$$\vec{F}\Delta\vec{x} = T\Delta S$$

Ebből:

$$\vec{\nabla} S \propto \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|}$$

Ez csak nagyon speciális esetekben működhet (gömb vagy henger szimmetria), különben nem!
(Visser, arXiv: 1108.5204) Vagy lehet egy nagyon „barokkos” felépítést adni, amiben éppen az intuitív szépség vész el...

Ellenvetések I

Első ellenvetés: a termodinamika irreverzibilis (S nő), de a newtoni gravitáció konzervatív!
Feloldás: egy entropikus erő lehet konzervatív! Pl. polimer esetén Hook törvény.
Feltétel: hőtartály mérete végtelenhez kell tartson, de hiszen:

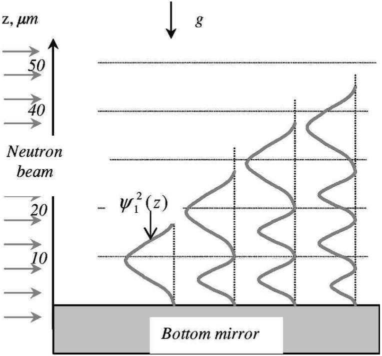
$$E = Mc^2$$

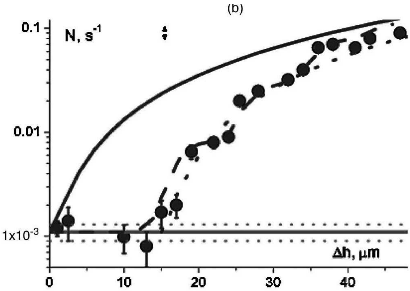
nemrelativisztikus határesetben pont $E \to \infty$!
Relativisztikusan ne is legyen reverzibilis (gravitációs sugárzás!).

Ellenvetések IIa

Második ellenvetés alapja: hideg neutronos kísérlet gravitációs térben (Nesvizhevsky et al.)

Neutron állapotok lineáris potenciálban (alul tükör)





Első átviteli lépcsőt itt látják

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -r_1 l \qquad r_1 = -2.338 \\
l &= \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 g}\right) \approx 5.9\mu m
\end{aligned}
$$

Ellenvetések IIb

Ellenvetés lényege (A. Kobakhidze): ha a neutron z magasságban van, akkor az ernyő állapota $z+dz$-ben

$$\rho_{\mathcal{S}}(z+dz)=\rho_{\mathcal{N}}(z+dz)\otimes\rho_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}(z)$$

Mivel a horizont tologatásával tiszta állapotból $\rightarrow$ kevert, ezért P_z nem hermitikus:

$$P_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}+2i\beta$$

Mivel $\Delta S_{\mathcal{S}}=2\pi k_B\frac{\Delta z}{\lambda}$ $\qquad \lambda=\frac{\hbar}{m_n c}\approx 1.3\times 10^{-9}\mu m$, ebből $\beta=-\pi m_n c\Rightarrow$ neutron hullámfüggvénye

$$\Psi\propto \mathrm{e}^{-z/\lambda}$$

Az ellenvetés kivédése:
(i) helytelen a kiinduló feltevés, miszerint

$$\rho_{\mathcal{S}}(z+dz)=\rho_{\mathcal{N}}(z+dz)\otimes\rho_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}(z)$$

(ii) A ΔS-Δz reláció csak klasszikusnak tekinthető testekre igaz (dekoherencia)!

Holografikus szcenárió

Kiindulás: a világ hologram egy 2D ernyőn

$\Downarrow$

a maradék térdimenzió a coarse-graining foka

entrópia=μdof ami láthatatlan makroszkopikusan

$\Downarrow$

anyag pozíciójától függő entrópia $\Rightarrow$ entropikus erő

$\Downarrow$

Newtoni potenciál: a coarse-graining „könyvelési eszköze”

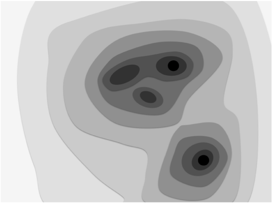
holografikus irány: $\vec{\nabla}\Phi$, az ernyők az ekvipotenciális felületek

a coarse-graning mértéke

$$0 < -\frac{\Phi}{c^2} < 1$$

$= 1$: fekete lyuk horizonton

itt van a fóliázás természetes határa!



Gravitációs téregyenlet

Statikus $\rho(\vec{r})$ anyageloszlás. Vegyünk egy ezt körbevevő $\mathcal{S}$ ernyőt (ekvipotenciális felület).
Tesztrészecskék gyorsulásából az ernyőn a hőmérséklet

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar \nabla_n \Phi}{c}$$

(most helyfüggő!)
Másrészt

$$\begin{aligned} E &= Mc^2 = \frac{1}{2} k_B \int_{\mathcal{S}} T dN \\ dN &= \frac{c^3}{G\hbar} dA \end{aligned}$$

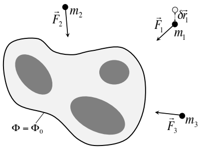
Ebből

$$M = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{A} \qquad \text{Gauss törvénye!!!}$$

Ez minden ernyőre igaz, ebből

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

Gravitációs erőtörvény levezetése



$$\begin{aligned} \delta S &= k_B \frac{\delta\Phi}{2c^2} dN \\ \nabla^2 \delta\Phi(\vec{r}) &= 4\pi G \sum_i m_i \delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \end{aligned}$$

Entropikus erő:

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \int_{\mathcal{S}} T\delta S$$

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k_B c} \nabla_n \Phi \qquad \delta S = k_B \frac{\delta\Phi}{2c^2} dN \qquad dN = \frac{c^3}{G\hbar} dA$$

$$\Downarrow$$

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{S}} \delta\Phi \nabla_n \Phi dA = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{S}} \left(\delta\Phi \nabla_n \Phi - \Phi \nabla_n \delta\Phi\right) dA$$

ugyanis $\int_{\mathcal{S}} \Phi \nabla_n \delta\Phi dA = \Phi_0 \int_{\mathcal{S}} \nabla_n \delta\Phi dA = 0 \quad$ ($\delta\Phi$ forrásai kívül!)

A newtoni erőtörvény

$$\sum_i \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{S}} (\delta\Phi \nabla_n \Phi - \Phi \nabla_n \delta\Phi)\, dA$$

Green 2. azonossága

$$\int (f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{A} = -\int (f \Delta g - g \Delta f) dV$$

$-$előjel: a térfogati integrálás $\mathcal{S}$ külsejére megy.

$$f = \delta\Phi \qquad g = \Phi$$

Kívül: $\Delta\Phi = 0$

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \delta \vec{r}_i &= -\frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{S}} \Phi \Delta \delta \Phi dA \\ &= -\sum_i m_i \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}_i) \delta \vec{r}_i \end{aligned}$$

ahonnan

$$\vec{F}_i = -m_i \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}_i)$$

Statikus relativisztikus téridő

Tegyük fel, hogy a mikroszkopikus elméletnek a Poincaré csoport globális szimmetriája $\Rightarrow$ az emergens téridő lokálisan Poincaré szimmetrikus lesz.
Statikus téridő: van időszerű Killing vektormező

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$$

Newton potenciál általánosítása

$$\Phi = \frac{1}{2} \log(-\xi^a \xi_a)$$

Fizikai értelme: e^Φ a vöröseltolódás faktor, végtelenben $\Phi = 0$.
Φ megad egy fóliázást, holografikus ernyők: konstans vöröseltolódás felületek

Gravitációs erő

Erő definíciója: vegyük egy szabadon eső (pl. „álló”) m tömegű kis test sebességmezőjét

$$\begin{aligned} u^a &= \mathrm{e}^{-\Phi}\xi \\ a^b &= u^a\nabla_a u^b = \mathrm{e}^{-2\Phi}\xi^a\nabla_a\xi^b \end{aligned}$$

Killing egyenlet + Φ definíciója

$$a^b = -\nabla^b\Phi$$

Hőmérséklet (N^b: felület normálisa)

$$T = \frac{\hbar}{2\pi}\mathrm{e}^{\Phi}N^b\nabla_b\Phi \qquad \Delta S \propto \Delta x : \quad \nabla_a S = -\frac{2\pi m}{\hbar}N_a$$

$$\Rightarrow F_a = T\nabla_a S = -m\mathrm{e}^{\Phi}\nabla_a\Phi$$

(vöröseltolódás faktor: a távoli megfigyelő által kifejtett erő, ami a részecskét egyhelyben tartja). Ugyanezt adja az entrópia maximum elve:

$$\partial_a S(E + \mathrm{e}^{\Phi(x)}m, x) = 0$$

Einstein egyenlet levezetése I

$$\begin{aligned} dN &= \frac{dA}{G\hbar} \qquad \text{egy bit tömege: } \frac{1}{2}T \\ \Rightarrow M &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} T dN = \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{S}} \mathrm{e}^{\Phi}\nabla_n \Phi dA \\ &= \frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{S}} dx^a \wedge dx^b \varepsilon_{abcd}\nabla^c \xi^d \end{aligned}$$

ez a Komar tömegformula. Killing egyenletből

$$\nabla^a \nabla_a \xi^b = -R^b_c \xi^c$$

vegyük a holografikus ernyő határolta 3-térfogatot $\partial\mathcal{S} = \Sigma$

$$2\int_{\Sigma} \Theta_{ab} n^a \xi^b dV = \frac{1}{4\pi G}\int_{\Sigma} R_{ab} n^a \xi^b dV$$

ami lényegében az Einstein egyenlet (??).

Einstein egyenlet levezetése II

Mi kell? Lokálisan statikus közelítés: ez az egyenlet minden pont elég kis környezetében leszármaztatható.

De: lyuk az érvelésben!

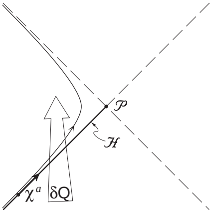
Van jobb: Ted Jacobson, 1995: hasonló jellegű levezetés, de: fényszerű felületekkel + a null geodetikus kongruenciákra vonatkozó Raychaudhuri egyenlettel.

Jacobson: GR mint a téridő termodinamikája I

Horizont: megfigyelőfüggő (igen, még BH esetén is!!!)

Lokális κ Rindler megfigyelő horizontja:
jobbra futó fényszerű vonal
Mögé beeső anyag: hő

$$\delta Q = T\delta S = \int_{\mathcal{H}} \Theta_{ab}\chi^a d\Sigma^b$$



χ^a: lokális boost mező (közelítő Killing). A horizonton

$$\chi^a = -\kappa\lambda k^a \qquad d\Sigma^a = k d\lambda dA \qquad T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}$$

ahol λ a horizontot generáló geodetikusok affin paramétere.

$$\delta Q = -\kappa \int_{\mathcal{H}} \Theta_{ab}\lambda k^a k^b d\lambda dA$$

Jacobson: GR mint a téridő termodinamikája II

Másfelől $\delta S = \eta \delta A$, ahol η egy állandó (mikroszkopikus elméletből kell számolni) és

$$\delta A = \int_{\mathcal{H}} \theta d\lambda dA$$

ahol θ a horizontot generáló fényszerű geodetikusok expanziója. Raychaudhuri egyenlet:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \underbrace{-\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2}_{\mathcal{P}\text{-től vett eltérésben másodrendű korrekció}} - R_{ab}k^a k^b$$

$$\delta Q = T\delta S = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}\eta\delta A \Rightarrow \Theta_{ab}k^a k^b = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}R_{ab}k^a k^b$$

amiből

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G\Theta_{ab}$$

$$G = \frac{1}{4\hbar\eta}$$

Kvantumgravitáció

Einstein egyenlet: a lokális termodinamikai egyensúly feltevésével következő, hidrodinamikai mérlegegyenlet.

Gravitációs hullámok a közegben terjedő hang analógjai.

$\Rightarrow$ a klasszikus elméletet nincs értelme megkvantálni!

Verlinde: A kvantum szabadsági fokok eggyel kisebb dimenzióban, a holografikus ernyőn élnek.

$\hbar$ ezen a szinten nem játszik szerepet, mindenből kiesik

$\hbar \to \hbar f(\Phi_0)$: $\quad T \to T f(\Phi_0) \quad S \to S/f(\Phi_0) \quad TdS$ invariáns!

G, Λ: a mikroszkopikus elméletből számolandó „anyagi állandók”, amik a makroszkopikus közeget jellemzik.

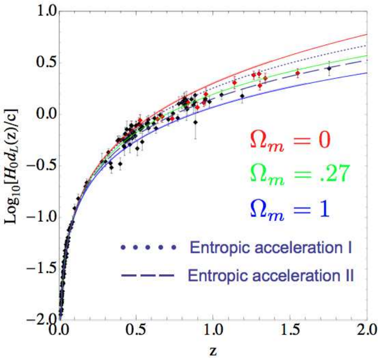
Holografikus Világegyetem

Ötlet: Hubble horizont = holografikus ernyő (G.F. Smoot et al.)
Eredmény: az ebből adódó entropikus erő megmagyarázza a gyorsuló tágulást!

$$(I)\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + H^2$$

$$(II)\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{3}{2\pi}H^2 + \frac{3}{4\pi}\dot{H}$$

(I): egyszerű dimenziós analízis
(II): Einstein egyenlet felületi tagjából számolt korrekció



Van javaslatuk entropikus erő hajtotta inflációs modellre is...
(Update: most már megszorítások is vannak a lehetséges paraméterekre)

Módosított Friedmann egyenlet

Húrelmélet/LQG:

$$S(A) = k_B \frac{Ac^3}{G\hbar} + \ldots \log A + \ldots A^{-1} +$$

Vegyünk egy

$$s(A) \propto A^n$$

korrekciót, ekkor a Newton törvény módosított alakja:

$$-\frac{GmM}{R}\left(1 + 4 l_{Planck}^2 \frac{\partial s}{\partial A}\right)$$

és ebből a Friedmann egyenlet

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \left[1 + \sigma \frac{1+3\omega_i}{1+3\omega_i - 2n}\left(\frac{1}{l_{Planck}^2\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)}\right)^{n-1}\right] \rho_i$$

És akkor rengeteg paraméterrel lehet játszadozni...