Térelméletek kvantálása görbült fix háttéren

Rácz István
Wigner FK RMI, Budapest

Szeged
2012. szeptember 28.

A háttérről:

- Nincs olyan végleges elmélet, amit a gravitáció kvantumelméletének nevezhetnénk $\rightarrow$ Mondható-e bármi a gravitáció kvantumos jelenségekre gyakorolt hatásáról?
- Olyan, mint amikor a külső elektromágneses teret klasszikusan kezeljük az atomi gerjesztések vizsgálata során. $\rightarrow$ QED utáni időszakban is hasonló eredmények érvényesek az atomok sugárzása és fényelnyelése kapcsán.
- Fél-klasszikus elmélet, amelyben a gravitációt klasszikus mezőként kezeljük, míg az anyagmezők kvantumos viselkedését ezen – az egyszer, s mindenkorra adott – fix háttéren vizsgáljuk.
  - Az anyagmezőket mindenütt lineárisnak, azaz önkölcsönhatástól mentesnek tekintjük. $\rightarrow$ Most csak a gravitáció hatására koncentrálunk.
- A hetvenes évek elején felismerték a feketelyukak dinamikájára vonatkozó klasszikus törvények és a termodinamika fő tételeinek meglepő hasonlóságát. A megfeleltetés lényegesen megalapozottabbá vált Hawking 1973-as felfedezése után. Hawking eredménye azt mutatta, hogy a klasszikus értelemben zérus hőmérsékletű (mindent elnyelő) feketelyuk a fél-klasszikus elméletben részecskéket kelt, és a kialakuló termikus állapot hőmérséklete éppen – az analógiáknak teljesen megfelelő módon – a hőmérséklet szerepét játszó "felületi gravitáció"-val arányos.

(Az eredeti) Tervek és célok: A részecskekeltési folyamat pontos leírására alkalmas elmélet alapjainak bemutatása, valamint a Hawking-féle eredmény (valamint az Unruh-effektus) minél pontosabb megfogalmazása.

- Globálisan hiperbolikus téridők
- Konstruktív kvantálás görbült háttéren (Irving Segal és mások 60'-as évek vége)
- Kvantumtérelmélet stacionárius téridőkön
- Unitér (in)ekvivalencia
- Unruh-effektus sík és görbült téridőkön
- Hawking-sugárzás (részecskekeltés feketelyuk téridők által)

Az algebrai leírás: Vecsernyés Péter beszél majd az algebrai meg(át)fogalmazásról. (Haag és Kastler, valamint mások 60'-as évek közepe)

Téridő:

Téridőn egy olyan (M, g_{ab}) párt értünk, ahol M összefüggő, négydimenziós, Hausdorff, parakompakt, irányítható C^∞ differenciálható sokaság, g_{ab} pedig egy Lorentz-szignatúrájú metrika M-en. A téridőről feltesszük, hogy időirányítható, és egy időirányítást ki is válaszhtottunk rajta.

- A kozmológiai állandóval bővített Einstein-egyenlet:

$$\boxed{R_{ab} - \tfrac{1}{2}\, g_{ab}\, R + \Lambda\, g_{ab} = 8\pi T_{ab}}$$

anyagmezőkre vonatkozó

$$\mathscr{L}_{\mathcal{A}} = \mathscr{L}_{\mathcal{A}}\left(g^{ab}, \psi_{(1)}{}^{\cdots}{}_{\cdots}, \nabla_e \psi_{(1)}{}^{\cdots}{}_{\cdots}, \ldots, \psi_{(N)}{}^{\cdots}{}_{\cdots}, \nabla_e \psi_{(N)}{}^{\cdots}{}_{\cdots}\right) .$$

Lagrange-függvényből származtatott Euler–Lagrange-egyenletek:

$$\frac{\delta \mathscr{S}_{\mathcal{A}}}{\delta \psi_{(i)}{}^{\cdots}{}_{\cdots}} := \boxed{\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathcal{A}}}{\partial \psi_{(i)}{}^{\cdots}{}_{\cdots}} - \nabla_e \left[\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)}{}^{\cdots}{}_{\cdots}]}\right] = 0}$$

- A továbbiakban a geometria fix és csak a szabad skalármező evolúcióját is leíró

$$\boxed{g^{ab}\nabla_a\nabla_b\psi + A^a\nabla_a\psi + B\psi + C = 0} \tag{1}$$

típusú lineáris hullámegyenletekkel foglalkozunk.

Globálisan hiperbolikus téridők:

- Valamely $\Sigma \subset M$ hiperfelületet "**akronális**"-nak nevezünk, ha $\nexists p, q \in \Sigma$ **:** p és q összeköthető egy mindenütt jövő-, vagy múltirányú időszerű görbével. (Megj.: Az ilyen felületek lokálisan térszerűek, vagy fényszerűek.)

- Legyen $\Sigma \subset M$ akronális hiperfelület. Ekkor a Σ-hoz tartozó "**függőségi tartomány**"-on M azon, $D[M]$-val jelölt részhalmazát értjük, amelyre

$$\boxed{D[\Sigma] := \{p \in M \mid \ \forall\, p\text{-re illeszkedő, múlt-, illetve jövőirányban egyaránt kiterjeszthetetlen kauzális görbe valahol metszi } \Sigma\text{-t } \}}$$

- Az (M, g_{ab}) téridőt "**globálisan hiperbolikus**"-nak nevezzük, ha található hozzá olyan $\Sigma \subset M$ zárt akronális hiperfelület, amelyre $M = D[\Sigma]$. Ekkor Σ-t az (M, g_{ab}) téridő Cauchy-felületének nevezzük.

- R. Geroch (1970), Dickmann (1988): Legyen (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus valamely $\Sigma \subset M$ hiperfelületre vonatkozóan. Ekkor M topológiailag szorzat, azaz $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, továbbá megadható M-en olyan sehol el nem tűnő gradiensű ($\nabla_a t \neq 0$) $t : M \to \mathbb{R}$ sima (C^∞) globális időfüggvény, amelyhez tartozó $t = $*állandó* szintfelületek mind Cauchy-felületei az (M, g_{ab}) téridőnek.

- Miért érdekesek a globálisan hiperbolikus téridők? Mert a

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\psi + A^a\nabla_a\psi + B\psi + C = 0$$

típusú egyenletekre vonatkozó Cauchy-probléma jól kezelhető.

Időfejlődés:

- Az összes lehetséges megfigyelő által regisztrált változást szeretnénk megjeleníteni.
  - Legyen $t^a \in TM$ **:** $t^a\nabla_a t = 1$ különben tetszőleges evolúciós vektormező M-en. Ekkor a $t : M \to \mathbb{R}$ globális időfüggvénnyel vannak paraméterezve t^a integrálgörbéi.
  - Bontsuk fel t^a-t a t=*állandó* Σ_t-szint(Cauchy)felületekre merőleges, n^a, és azzal párhuzamos, N^a, komponensekre.

$$\boxed{t^a = Nn^a + N^a}$$

$N \to$ 'laps', $N^a \to$ 'shift' és például

$$\boxed{g_{ab} = h_{ab} - \tfrac{1}{N^2}\left(t_a - N_a\right)\left(t_b - N_b\right)} \qquad \boxed{\dot\Phi := \mathscr{L}_t\Phi = t^a\nabla_a\Phi = N\left(n^a\nabla_a\Phi\right) + \mathscr{L}_N\Phi}$$

- A Φ valós Klein–Gordon-mezőre vonatkozó hatást – a korrespondencia elv alapján – az

$$\boxed{\mathscr{S} = \tfrac{1}{2}\int_{t_\circ}^{t}\left\{\int_{\Sigma_t}\left[\left(n^a\nabla_a\Phi\right)^2 - h^{ab}\left(\nabla_a\Phi\right)\left(\nabla_b\Phi\right) - m^2\phi^2\right]N\sqrt{h}dx^3\right\}dt}$$

alakban írhatjuk fel $N\sqrt{h} = \sqrt{g}$, amiből adódik, hogy a $\phi = \Phi|_{\Sigma_t}$ konfigurációs változóhoz a Σ_t felületen kanonikusan konjugált π impulzussűrűség

$$\boxed{\pi = \tfrac{\delta\mathscr{S}}{\delta\dot\Phi} = \left(n^a\nabla_a\Phi\right)\sqrt{h}}$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 7 of 39

Go Back

Full Screen

Close

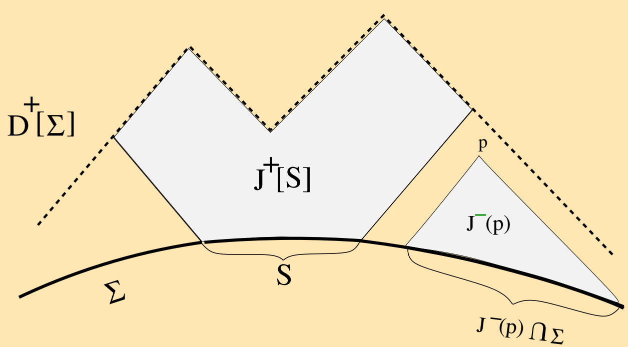
Quit

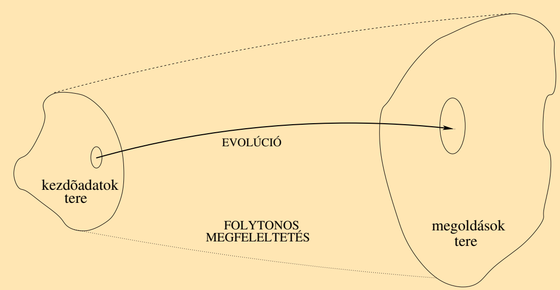
A Cauchy-probléma jól kezelhető:

- Legyen (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus téridő, $\Sigma \subset M$ pedig egy C^∞ térszerű Cauchy-felület. Legyen, továbbá a $[\phi, \dot\phi]$ kompakt tartójú $C^\infty_\circ(\Sigma)$ függvénypár Σ-n. Ekkor:
  - Az (1) egyenletnek létezik olyan M egészén értelmezett olyan Φ megoldása, amelyre

$$\boxed{\Phi|_\Sigma = \phi \quad \& \quad (n^a \nabla_a \Phi)|_\Sigma = \dot\phi\,,}$$

    ahol n^a a Σ felület jövőirányú egységnormálisát jelöli.
  - Bármely $S \subset \Sigma$ zárt részhalmaz esetén Φ-nek a $D[S]$ halmazra vett megszorítása csak a $[\phi, \dot\phi]$ kompakt tartójú függvénypáros S-re vett megszorításától függ, azaz a megoldás kauzális.
  - A $[\phi, \dot\phi] \mapsto \Phi$ hozzárendelés folytonos a kezdőértékek és megoldások terén alkalmasan választott Sobolev-térbeli normákra nézve.





Home Page
Title Page
Contents
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 8 of 39
Go Back
Full Screen
Close
Quit

- Konfigurációs tér: $\boxed{\mathfrak{Q} := \{\phi(\vec{x}) \,|\, \phi : \Sigma_0 \to \mathbb{R} \quad (\in C^\infty_\circ(\Sigma_0))\}}$

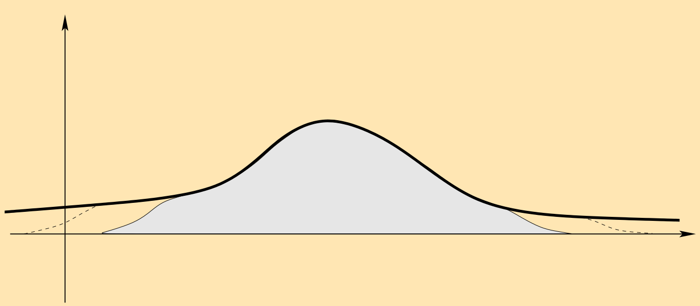
- Impulzus fázistér: $\boxed{\mathfrak{M} := \{[\phi, \pi] \,|\, \phi, \pi : \Sigma_0 \to \mathbb{R} \quad (\in C^\infty_\circ(\Sigma_0))\}}$

- Megoldástér: $(\nabla^e \nabla_e \Phi - m^2 \Phi = 0$ [esetleg "$+\alpha R$"] egyenlet megoldásainak tere)

$$\boxed{\mathfrak{S} := \left\{ \Phi \,|\, \Phi|_\Sigma = \phi \ \& \ (n^a \nabla_a \Phi)|_\Sigma = \dot{\phi} \, (= \tfrac{\pi}{\sqrt{h}}) \right\}}$$

- Az alaptereink kiválasztása során a Σ-án értelmezett $C^\infty_\circ(\Sigma)$ kompakt tartójú sima függvényeket választottuk, mert a Minkowski-téridővel ellentétben (Schwartz-függvények) általában nem lehet az összes lehetséges aszimptotikus viselkedést (feltéve, hogy van aszimptotika) figyelembe venni a függvényterek kiválasztásában.

- Megfelelő Cauchy-kompaktifikáció alkalmazása esetén nem lényeges a $C^\infty_\circ(\Sigma)$ függvények alkalmazásából adódó megszorítása. Fontos! A későbbiekben alkalmazott integrálkifejezések értelmezhetősége.



Home Page

Title Page

Contents

Page 9 of 39

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A lineáris dinamikai rendszerek esetén a $(\mathfrak{M},\Omega)$ és $(\mathfrak{S},\Omega)$ párosok szimplektikus vektortér jellege alapvető szerepet játszik ezen rendszerek kvantumelméletének megalkotása során.

- Szimplektikus sokaság: $\boxed{(\mathfrak{M},\Omega,\mathcal{H}),\ \text{ahol}\ \Omega : T\mathfrak{M}\times T\mathfrak{M}\to\mathbb{R}}$

$$\boxed{\Omega_{[\phi,\pi]}([\dot\phi_1,\dot\pi_1],[\dot\phi_2,\dot\pi_2]) = \int_{\Sigma_\circ}\left[\dot\pi_1\dot\phi_2-\dot\pi_2\dot\phi_1\right]dx^3\,,}$$

  - A $[\dot\phi,\dot\pi]$ páros elemei is $\Sigma_\circ$-on értelmezett kompakt tartójú függvények, mivel $\mathfrak{M}$ pontjait is ilyen párosokból építjük fel, $\forall$ rögzített $[\phi,\pi]\in\mathfrak{M}$ esetén $\exists$ egy természetes megfeleltetés $T_{[\phi,\pi]}\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}$ pontjai között $\cdots$ emiatt $\mathfrak{M}$ szimplektikus vektortér szerkezetet nyer.

- Szimplektikus vektortér: $\boxed{(\mathfrak{M},\Omega),\ \text{ahol}\ \Omega : \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}}$

- Mik legyenek az $\mathscr{O}$ klasszikus megfigyelhetőink??? Például az

$$\boxed{\Omega([\phi_1,\pi_1],.) : \mathfrak{M}\to\mathbb{R} \quad : \quad \Omega([\phi_1,\pi_1],[\phi,\pi]) = \int_{\Sigma_\circ}[\pi_1\phi-\pi\phi_1]\,dx^3}$$

  relációval értelmezett valós függvények az impulzus fázistéren.

- Speciálisan $\boxed{\Omega([0,f_1(\vec x)],.) = \int_{\Sigma_\circ} f_1\phi}$, illetve (a feltételeink miatt kizárt) extrém specializáció mellett $\boxed{\Omega([0,\delta(\vec x-\vec x_1)],.) = \phi(\vec x_1)}$.

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A Poisson-zárójelek:

- $\boxed{\{.,.\} : \mathscr{O} \times \mathscr{O} \to \mathscr{O}}$

$$\boxed{\{f,g\} = -\Omega(h_f, h_g) = \int_{\Sigma_\circ} \left[\frac{\delta f}{\phi} \frac{\delta g}{\delta \pi} - \frac{\delta g}{\delta \phi} \frac{\delta f}{\delta \pi} \right] dx^3 \,,}$$

ahol h_f az $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ függvényhez tartozó $h_f = [\frac{\delta f}{\delta \pi}, -\frac{\delta f}{\phi}]$ Hamiltoni-vektormezőt jelöli.

- Az $\Omega([\phi_1, \pi_1], .) : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ választás mellett $\boxed{h_{\Omega([\phi_1,\pi_1],.)} = [-\phi_1, -\pi_1]}$ és így

$$\boxed{\{\Omega([\phi_1, \pi_1], .), \Omega([\phi_2, \pi_2], .)\} = -\Omega([\phi_1, \pi_1], [\phi_2, \pi_2])}$$

  – Speciálisan, amikor $[\phi_1 \equiv 0, \pi_1 = f_1(\vec{x})]$ és $[\phi_2 = -f_2(\vec{x}), \pi_2 \equiv 0]$

$$\boxed{\{\Omega([\phi_1, \pi_1], .), \Omega([\phi_2, \pi_2], .)\} = \left\{ \int_{\Sigma_\circ} f_1 \phi, \int_{\Sigma_\circ} f_2 \pi \right\} = \int_{\Sigma_\circ} f_1 f_2}$$

  – Az $f_k = \delta(x - x_k)$ extrém specializáltság mellett

$$\boxed{\{\phi(x_1), \pi(x_2)\} = \delta(x_1 - x_2)}$$

Az $(\mathfrak{S}, \Omega)$ páros szimplektikus vektortér jellege:

- Szimplektikus vektortér: $\boxed{(\mathfrak{M}, \Omega), \text{ ahol } \Omega : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}}$

- Mivel globálisan hiperbolikus téridőkben a kezdőértékprobléma jól kezelhető, az $\mathfrak{M}$ fázistér pontjait kölcsönösen egyértelmű módon meg tudjuk feleltetni az $\mathfrak{S}$ megoldástér pontjainak.

- Értelmezhető a megoldások $\mathbb{S}(t) := \Omega(\Phi_1, \Phi_2)$ szimplektikus szorzata is

$$\boxed{\mathbb{S}(t) := \int_{\Sigma_t} [\pi_1(t)\phi_2(t) - \pi_2(t)\phi_1(t)]\, dx^3 = \int_{\Sigma_t} [(n^a\nabla_a\phi_1)(t)\phi_2(t) - (n^a\nabla_a\phi_2)(t)\phi_1(t)]\sqrt{h}dx^3\,,}$$

  mely – feltéve, hogy a téregyenletek teljesülnek – állandó, azaz $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\cancel{t})$.

- Az $\mathfrak{S}$ megoldástér is szimplektikus vektortérré válik

$$\boxed{(\mathfrak{S}, \Omega), \text{ ahol } \Omega : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}}$$

- Sokszor felváltva hivatkozunk majd $(\mathfrak{M}, \Omega)$ és $(\mathfrak{S}, \Omega)$ szimplektikus vektortér jellegére.

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A kvantálás:

A klasszikus elmélet:

Állapotok:

$\mathfrak{M}$ impulzus fázistér pontjai

Megfigyelhető mennyiségek:

$\mathscr{O} := \{f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \ \ (C^\infty)\}$ függvények

Dinamika:

Kanonikus transzformációk egy egyparaméteres családja $\mathfrak{M}$-en, amelyet a rendszert jellemző kitüntetett $\mathcal{H} : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvény által meghatározott $h^a = \Omega^{ab}\nabla_b\mathcal{H}$ Hamiltoni-vektormező jelenít meg.

A kvantumelmélet:

Valamely $\mathscr{F}$ Hilbert-tér pontjai

önadjungált lineáris operátorok $\mathscr{F}$-en
$\widehat{\mathscr{O}} := \{\widehat{f} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}\}$

A $\widehat{H}$ Hamilton-operátor által generált, $\mathscr{F}$-en ható egyparaméteres unitér transzformációk jelenítik meg.

Leegyszerűsítve: Valamely klasszikus dinamikai rendszert kvantálni annyit tesz mint megadni az $\mathscr{F}$ Hilbert-teret és egy $\widehat{\ }: \mathscr{O} \to \widehat{\mathscr{O}}$ megfeleltetést. A "*hogyan?*" a kvantálás alapproblémája.

- Chernoff (1981), Gotay (1980): Ha valamely véges dimenziós dinamikai rendszer esetén a szokásos hely és impulzus operatorokat használjuk, akkor ez a megfeleltetés nem terjeszthető ki az összes megfigyelhető mennyiségre.
- A klasszikus megfigyelhetők Poisson-algebrájából kiválasztunk egy "elegendően gazdag" részalgebrát, míg a megfelelő kvantum-megfigyelhetőink kommutátoraira kirójuk a

$$\boxed{[\widehat{f}, \widehat{g}] = i\,\widehat{\{f, g\}}}$$

relációkat ($\bar{h} = 1$).

A kinematikai keret:

- A szimmetrikus Fock-tér

$$\boxed{\mathscr{F} = \mathscr{F}_s(\mathscr{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty}(\otimes_s^n \mathscr{H}) = \mathscr{C} \oplus \mathscr{H} \oplus (\mathscr{H} \otimes_s \mathscr{H}) \oplus \dots}$$

$$\boxed{\Psi = (\psi, \psi^a, \psi^{a_1a_2}, \dots, \psi^{a_1\dots a_n}, \dots) \in \mathscr{F}_s(\mathscr{H})\,, \quad \text{ha} \quad \psi^{a_1\dots a_n} = \psi^{(a_1\dots a_n)} \ \forall n\text{-re}}$$

- Legyen $\chi^a \in \mathscr{H}$, jelölje $\overline{\chi}^a$ a χ^a-nek megfelelő $\overline{\mathscr{H}}$ komplex konjugált térbeli elemet.
- A $\overline{\chi}^a \in \overline{\mathscr{H}}$ által meghatározott $\mathbb{a}(\overline{\chi}) : \mathscr{F}_s(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ *eltüntető operátor* hatása:

$$\boxed{\mathbb{a}(\overline{\chi})\Psi = (\overline{\chi}_e\psi^e, \sqrt{2}\cdot\overline{\chi}_e\psi^{ea_1}, \dots, \sqrt{n}\cdot\overline{\chi}_e\psi^{ea_2\dots a_n}, \dots)}$$

- A $\chi^a \in \mathscr{H}$ által meghatározott $\mathbb{a}^+(\chi) : \mathscr{F}_s(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ *keltő operátor* hatása:

$$\boxed{\mathbb{a}^+(\chi)\Psi = (0, \chi^a\psi, \sqrt{2}\cdot\chi^{(a_1}\psi^{a_2)}, \dots, \sqrt{n}\cdot\chi^{(a_1}\psi^{a_2\dots a_n)}, \dots)}$$

- Jelölje $\mathscr{F}_\circ \subset \mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ azt a mindenütt sűrű alterét $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$-nak, amelynek elemei olyanok, hogy csak véges sok komponensük nem tűnik el azonosan. Ekkor

$$\boxed{\mathbb{a}(\overline{\chi}) : \mathscr{F}_\circ \to \mathscr{F}_\circ \quad \text{adjungáltja} \quad \mathbb{a}^+(\chi) : \mathscr{F}_\circ \to \mathscr{F}_\circ}\,,$$

$$\boxed{[\mathbb{a}(\overline{\chi}), \mathbb{a}(\overline{\chi})] = 0} \quad \& \quad \boxed{\left[\mathbb{a}(\overline{\chi}), \mathbb{a}^+(\eta)\right] = (\overline{\chi}_e\eta^e)\,\mathbb{I}}$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 14 of 39

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A Weyl-relációk:

- Ismert, hogy a nem korlátos önadjungált operátorok kompozíciója és így kommutátora nem szükségképpen jól definiált – mivel esetleg mindketten csak egy-egy, mindenütt sűrű lineáris altéren értelmezettek – ezért az $\{\Omega(\psi, .) \,|\, \psi \in \mathfrak{S}\}$ klasszikus megfigyelhetők helyett a nekik megfelelő exponencializált kifejezéseket érdemes használni.

- Legyen $\boxed{W(\psi) := \exp\left[\, i\, \Omega(\psi, .)\right]}$ és keressük azt a

$$\boxed{W(\psi) \mapsto \widehat{W}(\psi)}$$

megfeleltetési szabályt, amelyre nézve $\widehat{W}(\psi)$ unitér, valamint az erős operátortopológiára nézve folytonosan függ ψ megválasztásától, azaz bármely ψ és ψ-hez tartó $\{\psi_k\} \to \psi$ sorozat választása esetén $\|\widehat{W}(\psi) - \widehat{W}(\psi_k)\| \to 0$, továbbá teljesülnek a "*Weyl-relációk*":

$$\boxed{\widehat{W}(\psi_1)\widehat{W}(\psi_2) = \exp\left(\tfrac{i}{2}\, \Omega(\psi_1, \psi_2)\right) \widehat{W}(\psi_1 + \psi_2)}$$

$$\boxed{\widehat{W}^{+}(\psi) = \widehat{W}(-\psi)}$$

- Weyl-relációk kirovása, a Stone-Neumann-tétel értelmében, véges dimenziós esetben, unitér ekvivalencia erejéig egyértelműen meghatározza a kvantumelméletünket.

A KG-mező kvantumelmélete sík Minkowski-téridő felett:

- Olyan irreducibilis ábrázolást keresünk, amelyre

$$\boxed{(\mathfrak{S}, \{\Omega(\Phi, .)\}) \to (\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\})} \qquad \boxed{\left[\widehat{\Omega(\Phi_1, .)}, \widehat{\Omega(\Phi_2, .)}\right] = -\,i\,\Omega(\Phi_1, \Phi_2)\mathbb{I}\,,}$$

$(\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\})$ elkészítése a megoldástér "+"-frekvenciás részére alapozva:

1° $\Phi \to \widetilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\,i\,\omega t}\, \Phi(t, \vec{x}) \to \Phi = \Phi^+ + \Phi^- \ : \ \Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\,i\,\omega t}\, \widetilde{\Phi}(\omega, \vec{x})$

2° $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ & $\boxed{(\Phi_1^+, \Phi_2^+)_{KG} := -\,i\,\Omega(\overline{\Phi_1^+}, \Phi_2^+)}$

3° $\mathscr{H} = \overline{\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}}^{(.,.)_{KG}}$, jól definiált, de (!) $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+} \not\subset \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$, hiszen $\mathfrak{S}$ elemei kompakt tartójú kezdőadatokhoz tartoznak.

$(\,.\,,\,.\,)_{KG}$ pozitív definit $\mathscr{H}$-n, $\overline{\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}}^{(.,.)_{KG}} = \mathscr{H} \oplus \overline{\mathscr{H}}$, $(\Phi, \overline{\Phi})_{KG} = 0 \ \forall\ \Phi \in \mathscr{H}, \overline{\Phi} \in \overline{\mathscr{H}}$-re.

4° A $K : \mathfrak{S} \to \mathscr{H}$, amelyre $K\Phi := \Phi^+$ kölcsönösen egyértelmű beleképezés úgy, hogy $K[\mathfrak{S}] \subset \mathscr{H}$ mindenütt sűrű $\mathscr{H}$-ban.

5° $(\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\})$: $\boxed{\mathscr{F} = \mathscr{F}_s(\mathscr{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty}(\otimes_s^n \mathscr{H})}$

6° $\boxed{\widehat{\Omega(\Phi, .)} := i\,\mathfrak{a}(\overline{K\Phi}) - i\,\mathfrak{a}^+(K\Phi)}$ vagy $\boxed{\Omega_H\widehat{(\Phi, .)} := i\,\mathfrak{a}(\overline{K\Phi_t}) - i\,\mathfrak{a}^+(K\Phi_t)}$

Φ_t : Φ "t"-vel vett időeltoltja, azaz Φ_t kezdőadatai a "t" időpillanatban ugyanazok, mint a Φ megoldásé a "$t = 0$" időpillanatban.

A KG-mező kvantumelmélete görbült téridő felett

A klasszikus megfigyelhetőink Poisson-algebrájának egy

$$\boxed{(\mathfrak{S}, \{\Omega(\Phi, .)\}) \to (\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\}}\qquad \boxed{\left[\widehat{\Omega(\Phi_1, .)}, \widehat{\Omega(\Phi_2, .)}\right] = -i\,\Omega(\Phi_1, \Phi_2)\mathbb{I}}$$

irreducibilis ábrázolást keresünk egy $\boxed{\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}}$ valós belsőszorzatra alapozva.

1° Legyen $\boxed{\mu \ : \ \mu(\Phi_1, \Phi_1) = \frac{1}{4} \sup_{\Phi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Phi_1, \Phi_2)]^2}{\mu(\Phi_2, \Phi_2)}\ , \ \forall \Phi_1 \in \mathfrak{S} \qquad (*)}$

2° $\mathfrak{S}_\mu := \overline{\mathfrak{S}}^\mu$

3° $\exists$ komplex struktúra $\mathfrak{S}_\mu$-en. $\boxed{\mathbb{j} : \mathfrak{S}_\mu \to \mathfrak{S}_\mu \text{ lineáris leképezés : } \ \mathbb{j}^+ = -\mathbb{j} \ \ \& \ \ \mathbb{j}^2 = -\mathbb{I}}$

– $(*) \Rightarrow$ $\boxed{[\Omega(\Phi_1, \Phi_2)]^2 \leq 4\|\Phi_1\|_\mu \, \|\Phi_2\|_\mu}$, azaz $\Omega : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ korlátos a μ-höz tartozó normára nézve. $\Rightarrow$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}_\mu$-re és ott $\Omega : \mathfrak{S}_\mu \times \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris leképezés.

– $\forall\ \Phi_2 \in \mathfrak{S}_\mu$-re $\boxed{\Omega(., \Phi_2) : \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}\ (\in \mathfrak{S}^*_\mu)}$ korlátos lineáris leképezés.

– Riesz-lemmája értelmében $\Omega(.,\Phi_2)$-höz, és így magához Φ_2-höz is, egyértelműen $\exists$ $\mathfrak{j}\Phi_2 \in \mathfrak{S}_\mu$ úgy, hogy

$$\boxed{\Omega(\,.\,,\Phi_2) = 2\mu(\,.\,,\mathfrak{j}\Phi_2)\,.}$$

– Mivel μ, Ω bilineárisak a $\mathfrak{j}\Phi_2 \in \mathfrak{S}_\mu$ leképezés lineáris, $\forall\ \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{S}_\mu$

$$\boxed{\Omega(\Phi_1,\Phi_2) = 2\mu(\Phi_1,\mathfrak{j}\Phi_2) \qquad (**)}$$

– $\boxed{\mathfrak{j}^+ = -\mathfrak{j}:}$ Ω antiszimmetrikus, μ szimmetrikus

$$2\mu(\Phi_1,\mathfrak{j}\Phi_2) = -2\mu(\Phi_2,\mathfrak{j}\Phi_1) = -2\mu(\mathfrak{j}\Phi_1,\Phi_2)$$

– $\boxed{\mathfrak{j}^2 = -\mathbb{I}}$ $\Longleftrightarrow \mathfrak{j}^+\mathfrak{j} = \mathbb{I} \Longleftrightarrow \|\mathfrak{j}\Phi\|_\mu = \|\Phi\|_\mu$ norma, (*)

$$\|\mathfrak{j}\Phi\|_\mu = \sup_{\Phi'\neq 0}\frac{[\mu(\Phi',\mathfrak{j}\Phi)]^2}{\mu(\Phi',\Phi')} = \sup_{\Phi'\neq 0}\frac{\left[\frac{1}{2}\Omega(\Phi',\Phi)\right]^2}{\mu(\Phi',\Phi')} = \|\Phi\|_\mu$$

- $\exists$ komplex struktúra $\mathfrak{S}_\mu$-en. $\boxed{\mathfrak{j} : \mathfrak{S}_\mu \to \mathfrak{S}_\mu \text{ lineáris leképezés : } \quad \mathfrak{j}^+ = -\mathfrak{j} \ \ \& \ \ \mathfrak{j}^2 = -\mathbb{I}}$

- Fordítva: Ha adott egy $\mathfrak{j} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ komplex struktúra $\boxed{\mathfrak{S}\text{-en(!)}}$ úgy, hogy $-\Omega(\Phi_1,\mathfrak{j}\Phi_2)$ egy pozitív definit belsőszorzást határoz meg $\mathfrak{S}$-en, akkor a (**) relációval definiált $\mu : \mathfrak{S}\times\mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ belsőszorzat eleget tesz az (*) követelménynek. Kevesebben vannak!

3° ∃ komplex struktúra $\mathfrak{S}_\mu$-en. $\boxed{\mathbb{j} : \mathfrak{S}_\mu \to \mathfrak{S}_\mu \text{ lineáris leképezés} : \quad \mathbb{j}^+ = -\mathbb{j} \quad \& \quad \mathbb{j}^2 = -\mathbb{I}}$

4° $\mu, \Omega : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ természetes módon kiterjeszthetők $\mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C}$-re és így $\mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C}$ komplex Hilbert-térré válik a $\mu : \mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C} \times \mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ belsőszorzatra nézve.

5° ∃ az $i\mathbb{j} : \mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C} \to \mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C}$ önadjungált operátor & spektrál tétel

$$\boxed{\mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C} = \mathscr{H} \oplus \overline{\mathscr{H}} \quad : \quad \mathscr{H} \text{ az } i\mathbb{j} : \mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C} \to \mathfrak{S}_\mu^\mathbb{C} \text{ operátor "}+1\text{" sajátértékhez tartozó altere}}$$

(!) μ pozitív definit $\mathscr{H}$-n, $\mu(\Phi, \overline{\Phi}) = 0 \ \forall \ \Phi \in \mathscr{H}, \overline{\Phi} \in \overline{\mathscr{H}}$-re.

6° ∃ kölcsönösen egyértelmű $K : \mathfrak{S} \to \mathscr{H}$ leképezés : $K[\mathfrak{S}] \subset \mathscr{H}$ mindenütt sűrű $\mathscr{H}$-ban.

7° $(\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\})$: $\boxed{\mathscr{F} = \mathscr{F}_s(\mathscr{H}) = \oplus_{n=0}^\infty (\otimes_s^n \mathscr{H}) = \mathscr{C} \oplus \mathscr{H} \oplus (\mathscr{H} \otimes_s \mathscr{H}) \oplus \ldots}$

8° $\boxed{\widehat{\Omega(\Phi, .)} = i\,\mathbb{a}(\overline{K\Phi}) - i\,\mathbb{a}^+(K\Phi)}$ vagy $\boxed{\widehat{\Omega_H(\Phi, .)} := i\,\mathbb{a}(\overline{K\Phi_t}) - i\,\mathbb{a}^+(K\Phi_t)}$

- Az $\widehat{\Omega_H(\Phi, .)}$ operátorok ismerete ekvivalens magának a Heisenberg-operátornak egy konstans szorzó erejéig vett ismeretével, hiszen amennyiben $\widehat{H}$ és $\widehat{H}'$ ugyanazt az időfejlődést eredményezi, a "$\frac{d\widehat{\Psi}}{dt} = i[\widehat{H}, \widehat{\Psi}]$" összefüggés és Schur-lemmája alapján $\widehat{H}' = \widehat{H} + \alpha\mathbb{I}$ teljesül, valamely valós α-ra.

- Fontos: A különböző μ belsőszorzatokhoz, különböző $\mathscr{H}_\mu$ Hilbert-terek tartoznak. Nincs kitüntetett μ belsőszorzat ezért általában nincs részecskeinterpretáció sem.

Home Page
Title Page
Contents
Page 19 of 39
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Mit ábrázolnak a $\{\widehat{\Omega(\Phi,.)}\}$ operátorok?

- Tesztfüggvények tere: $\boxed{\mathcal{T} := C^\infty_\circ(M)}$, míg $\boxed{\Phi \longleftrightarrow [\phi,\pi] \in \mathfrak{M}, \text{ ahol } \phi,\pi \in C^\infty_\circ(\Sigma_\circ)}$.

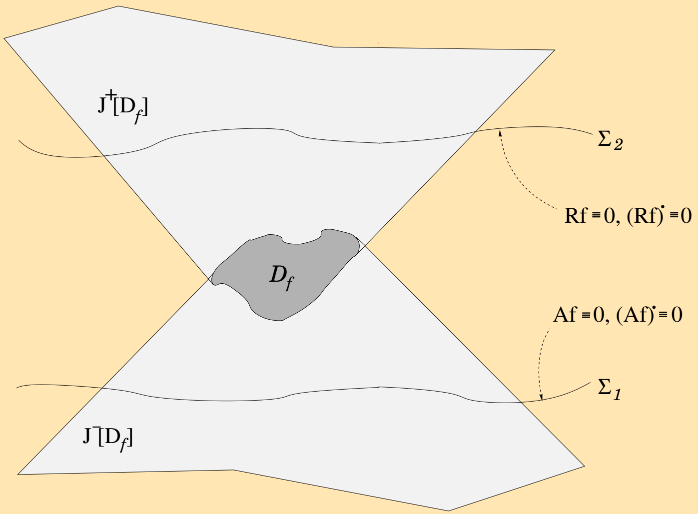
- Legyen $f \in \mathcal{T}$ és jelölje Af, valamint Rf a

$$\nabla^e\nabla_e\phi - m^2\phi = 0\,,$$

KG-egyenletnek az f függvénnyel, mint forrással vett "avanzsált" és "retardált" megoldásait, azaz

$$(i) \quad \left(\nabla^e\nabla_e - m^2\right)\left\{\begin{array}{c} Af \\ Rf \end{array}\right\} = f\,,$$

$$(ii) \quad \begin{array}{ll} Af \equiv 0, & M \setminus J^-[\mathcal{D}_f] \\ Rf \equiv 0, & M \setminus J^+[\mathcal{D}_f] \end{array}\,,$$



- $Ef := Af - Rf$ megoldása a KG-egyenletnek, továbbá $\mathcal{D}_{Ef} \cap \Sigma_t$ kompakt $\Longrightarrow Ef \in \mathfrak{S}$, azaz $\exists$

$$\boxed{E : \mathcal{T} \to \mathfrak{S} \text{ lineáris leképezés, amelyre}}$$

Mit ábrázolnak a $\{\widehat{\Omega(\Phi,.)}\}$ operátorok?

- $\boxed{E : \mathcal{T} \to \mathfrak{S} \text{ lineáris leképezés tulajdonságai:}}$ $Ef := Af - Rf$

(1) $E[\mathcal{T}] = \mathfrak{S}$, azaz $\forall\ \Phi \in \mathfrak{S}\ \exists\ f \in \mathcal{T} : Ef = \Phi$.

(2) $Ef \equiv 0 \iff \exists\ g \in \mathcal{T} : f = \left(\nabla^e\nabla_e - m^2\right) g$

(3) $\forall\ \Phi \in \mathfrak{S}\ \&\ f \in \mathcal{T}$

$$\boxed{\int \Phi f = \Omega(Ef, \Phi)}$$

(1) $\Rightarrow$ A klasszikus megfigyelhetőink: $\{\Omega(\Phi,.)\,|\,\Phi \in \mathfrak{S}\} = \{\Omega(Ef,.)\,|\,f \in \mathcal{T}\}$

(3) $\Rightarrow$ Formálisan $\boxed{\widehat{\Phi}(f) = \Omega(E(f), \widehat{\Phi(t,\vec{x})}) = \int f \cdot \widehat{\Phi(t,\vec{x})} \in \widehat{\mathscr{O}}\,,}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\widehat{\Phi(t,\vec{x})} : \mathcal{T} \to \widehat{\mathscr{O}}}$ operátor értékű disztribúció.

$\widehat{\Phi(t,\vec{x})}$ nem, de $\widehat{\Phi}(f)$ már jól definiált operátor $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$-n(!), melyre úgy gondolhatunk mint a $\widehat{\Phi(t,\vec{x})}$ kifejezés f súlyfüggvénnyel vett téridőátlagára.

(2) $\Rightarrow$ $\widehat{\Phi}(f)$ disztribúcionális értelemben eleget tesz a KG egyenletnek

$$\boxed{\left(\nabla^e\nabla_e - m^2\right)\widehat{\Phi}(g) = \widehat{\Phi}(\left(\nabla^e\nabla_e - m^2\right) g) = \Omega((\nabla^e\widehat{\nabla_e - m^2)\, g,.)} = 0}$$

- Az (1) tulajdonság igazolása: Legyen $\Phi \in \mathfrak{S}$, továbbá ....
- A fundamentális megfigyelhetőinkre vonatkozó kommutációs relációk új alakja

$$\left[\widehat{\Omega(\Phi_1, .)}, \widehat{\Omega(\Phi_2, .)}\right] = -\,i\,\Omega(\Phi_1, \Phi_2)\mathbb{1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left[\widehat{\Phi(f)}, \widehat{\Phi(g)}\right] = -\,i\,\Omega(Ef, Eg)\mathbb{1}\,,}$$

- A $\widehat{\Phi(g)}$ és $\widehat{\Phi(f)}$ operátorokat, valamint $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ Hilbert-tér $|\,0\rangle$-val jelölt vákuumállapotát felhasználva megmutatható:

$$\boxed{\langle\, 0\,|\,\widehat{\Phi(f)}\,\widehat{\Phi(g)}\,|\,0\rangle = (KEf, KEg)_{\mathscr{H}} = \mu(Ef, Eg) - \tfrac{i}{2}\Omega(Ef, Eg)\,,}$$

azaz a kvantumelméletünk megalkotása során alkalmazott $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ valós belsőszorzat és az $\Omega : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ szimplektikus forma direkt módon kapcsolódnak a $\langle\, 0\,|\,\widehat{\Phi(\vec{x})}\,\widehat{\Phi(\vec{x}')}\,|\,0\rangle$ kétpont-függvény valós és képzetes részéhez.

A KG-mező kvantumelmélete görbült téridő felett:

$$\boxed{(\mathfrak{S}, \{\Omega(\Phi, .)\}) \to (\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\}}$$

$\{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\}$ elkészítése egy $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ valós belsőszorzatra alapozva:

1° Legyen $\boxed{\mu \ : \ \mu(\Phi_1, \Phi_1) = \frac{1}{4} \sup_{\Phi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Phi_1, \Phi_2)]^2}{\mu(\Phi_2, \Phi_2)} \ , \ \forall \Phi_1 \in \mathfrak{S}}$

2° $\mathfrak{S}_\mu := \overline{\mathfrak{S}}^\mu$

3° $\exists$ komplex struktúra $\mathfrak{S}_\mu$-en, azaz $\boxed{j : \mathfrak{S}_\mu \to \mathfrak{S}_\mu \text{ lineáris leképezés : } \ j^+ = -j \ \ \& \ \ j^2 = -\mathbb{I}}$

4° $\mu, \Omega : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ természetes módon kiterjeszthető $\mu, \Omega : \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

5° $J : \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ & spektrál tétel

$$\boxed{\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} = \mathscr{H} \oplus \overline{\mathscr{H}} \ \ : \ \ \mathscr{H} \mapsto J : \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \text{ operátor "} +i \text{" sajátértékhez tartozó altere}}$$

6° $\exists$ kölcsönösen egyértelmű $K : \mathfrak{S} \to \mathscr{H}$ leképezés : $K[\mathfrak{S}] \subset \mathscr{H}$ mindenütt sűrű $\mathscr{H}$-ban.

7° $(\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\})$: $\boxed{\mathscr{F} = \mathscr{F}_s(\mathscr{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty}(\otimes_s^n \mathscr{H}) = \mathscr{C} \oplus \mathscr{H} \oplus (\mathscr{H} \otimes_s \mathscr{H}) \oplus \ldots}$

8° $\boxed{\widehat{\Omega(\Phi, .)} = i\,\mathbb{a}(\overline{K\Phi}) - i\,\mathbb{a}^+(K\Phi)}$ vagy $\boxed{\widehat{\Omega_H(\Phi, .)} := i\,\mathbb{a}(\overline{K\Phi_t}) - i\,\mathbb{a}^+(K\Phi_t)}$

A KG-mező kvantumelmélete stacionárius téridők felett:

- Láttuk, hogy tetszőleges globálisan hiperbolikus téridők esetén felépíthető a KVTE konstrukciónk, ha $\mathfrak{S}$-en $\exists$ egy $\mu\ :\ \mu(\Phi_1, \Phi_1) = \frac{1}{4}\sup_{\Phi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Phi_1,\Phi_2)]^2}{\mu(\Phi_2,\Phi_2)}$, $\forall \Phi_1 \in \mathfrak{S}$ belsőszorzat.

- Létezik-e ilyen egyáltalán? Amikor a téridő még stacionárius is, akkor biztosan. (M, g_{ab}) **stacionárius**, ha létezik egy ξ^a mindenütt időszerű Killing vektormező (KVM) M-en úgy, hogy

$$\boxed{\mathscr{L}_\xi g_{ab} = 2\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0}$$

Ekkor a ξ^a-hoz tartozó egyparaméteres $\alpha_t : M \to M$ diffeomorfizmusok minden egyes $t = \bar{t}$-ra, izometriatranszformációk is, azaz

$$\boxed{\alpha^*_{\bar{t}} g_{ab} = g_{ab}}$$

- Természetesnek tűnne a klasszikus megoldások t-paraméter szerinti Fourier-transzformáltjait tekinteni, és a "+" és "−"-frekvenciás részekkel építkezni.

- Ehhez szükségünk lenne a pontos aszimptotikus viselkedések ismeretére és szeretnénk akkor is használni a KVTE-ket, amikor nem csengenek le a mezők, vagy nincs is aszimptotika, mert pl. kompaktak a Cauchy-felületeink.

Bernard Kay konstrukciója (1978):

- Felt.: $\exists\ \Sigma_\circ$ Cauchy-felület, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ $\boxed{m > \varepsilon_1}$ & $\boxed{-\xi^a \xi_a \leq -\varepsilon_2 \cdot n^a \xi_a > \varepsilon_2 \varepsilon_3}$

Konstrukció:

1° $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$

2° Energia-belsőszorzat $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$-n: $\boxed{\langle\, \Phi_1, \Phi_2 \,\rangle := \int_{\Sigma_t} T_{ab} n^a \xi^b\,,}$ ahol $\Sigma_t := \alpha_t[\Sigma_\circ]$ &

$$\boxed{T_{ab}(\Phi_1, \Phi_2) := \left(\nabla_{(a} \overline{\Phi_1}\right) \left(\nabla_{b)} \Phi_2\right) - \tfrac{1}{2} g_{ab} \left[g^{ef} \left(\nabla_e \overline{\Phi_1}\right) \left(\nabla_f \Phi_2\right) + m^2 \overline{\Phi_1} \Phi_2 \right]}$$

3° $\langle\, \Phi_1, \Phi_2 \,\rangle$ értéke független a t-paraméter értékétől. $\Longleftarrow \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$ & $\nabla^a T_{ab} = 0$

4° A $\boxed{\mathscr{T}_t : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{S}^{\mathbb{C}} \ \ \mathbf{:}\ \mathscr{T}_t(\Phi) := \Phi \circ \alpha_t}$ "időfejlesztő" leképezés lineáris & megoldásokat megoldásokra képez.

- $\mathscr{T}_t(\Phi) := \Phi$, ha $t = 0$, vagy $\mathscr{L}_\xi \Phi = 0$
- $\langle\, \mathscr{T}_t(\Phi_1), \mathscr{T}_t(\Phi_2) \,\rangle_{\Sigma_\circ} = \langle\, \Phi_1, \Phi_2 \,\rangle_{\Sigma_t} = \langle\, \Phi_1, \Phi_2 \,\rangle_{\Sigma_\circ}$

5° $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}} \to$ $\boxed{\widetilde{\mathscr{H}} := \overline{\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}}^{\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle}}$ (!) Még nem a KVTE konstrukciónk Hilbert-tere.

6° $\mathscr{T}_t : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$ korlátos & megőrzi a normát $\Longrightarrow$ kiterjeszthető $\widetilde{\mathscr{H}}$-ra, ahol a $\widetilde{\mathscr{T}_t} : \widetilde{\mathscr{H}} \to \widetilde{\mathscr{H}}$ kiterjesztése unitér operátorok egy egyparaméteres erősen folytonos családját adja.

7° (Stone) $\widetilde{\mathscr{T}_t}$-hez $\exists$ olyan $\widetilde{h} : \widetilde{\mathscr{H}} \to \widetilde{\mathscr{H}}$ önadjungált operátor, $\widetilde{\mathscr{T}_t}$ infinitezimális generátora, amelyre

$$\boxed{\widetilde{\mathscr{T}_t} = \exp[-i\,\widetilde{h}t]}$$

– (4° & 7° $\Rightarrow$) Bármely $\Phi \in \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$-re $\mathscr{L}_\xi \Phi = -\,i\,\widetilde{h}\Phi$ $\quad [\circ]$

8° Tekintsük a $\widetilde{h} : \widetilde{\mathscr{H}} \to \widetilde{\mathscr{H}}$ önadjungált operátorra vonatkozó $\boxed{\widetilde{h}\Phi = \lambda\Phi}$ sajátértékproblémát. Megmutatható, hogy

$$\boxed{\widetilde{h} \text{ bármely } \lambda \text{ sajátértékére } |\lambda| > [\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}]^2 > 0}$$

9° Mivel $\widetilde{h}$ spektruma még torlódási pontként sem tartalmazhatja a zérust $\Longrightarrow$ létezik a $\widetilde{h}^{-1} : \widetilde{\mathscr{H}} \to \widetilde{\mathscr{H}}$ operátor, mely korlátos, hiszen sajátértékei $\widetilde{h}$ sajátértékeinek reciprokaként kaphatók.

10° Jelölje $\boxed{\widetilde{\mathscr{H}}^+}$ a $\widetilde{h}$-hoz tartozó pozitív spektrálteret. $[\circ]$ miatt $\boxed{\mathscr{L}_\xi \Phi = -\,i\,\widetilde{h}\Phi = -\,i\,\lambda\Phi}$ és így $\widetilde{\mathscr{H}}$ "+"-frekvenciás alterének is tekinthető.

11° $\exists\ \widetilde{K} : \widetilde{\mathscr{H}} \to \widetilde{\mathscr{H}}^{+}$ természetes projekció, és így a $K\ (:= \widetilde{K}|_{\mathfrak{S}}) : \mathfrak{S} \to \widetilde{\mathscr{H}}^{+}$ valós lineáris beágyazása $\mathfrak{S}$-nek $\widetilde{\mathscr{H}}^{+}$-ba úgy, hogy $K[\mathfrak{S}]$ sűrű $\widetilde{\mathscr{H}}^{+}$-ban.

12° Legyen a $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ valós belsőszorzat

$$\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_2) = 2\Re\left[\langle\, K\Phi_1, \widetilde{h}^{-1} K\Phi_2 \,\rangle\right]}$$

13° A $\mathbb{j} : \widetilde{\mathscr{H}} \to \widetilde{\mathscr{H}}\ (= \overline{\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}}^{\langle\cdot,\cdot\rangle})$, leképezés, melyet a $\mathbb{j}\Phi = i\,(K\Phi - \overline{K\Phi})$ hozzárendelési szabállyal értelmezünk, μ-re vonatkozóan, komplex struktúrát határoz meg $\widetilde{\mathscr{H}}$

14° μ-ről a $\mathbb{j}$ komplex struktúra felhasználásával megmutatható, hogy

$$\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_1) = \tfrac{1}{4} \sup_{\Phi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Phi_1,\Phi_2)]^2}{\mu(\Phi_2,\Phi_2)}\ ,\ \ \forall \Phi_1 \in \mathfrak{S}\,.}$$

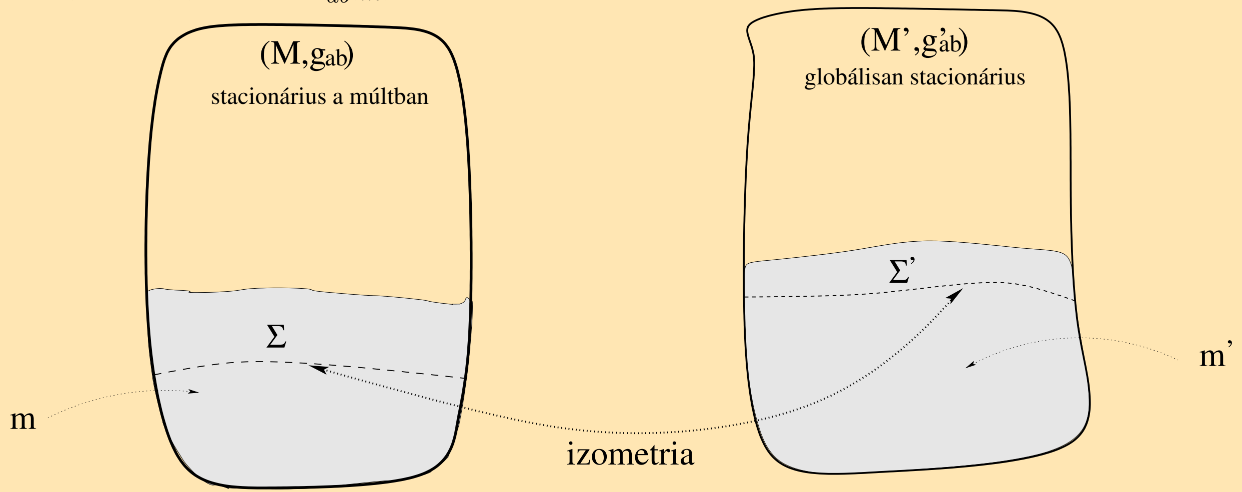
Részecskeinterpretáció: Bármely (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus stacionárius téridőben a $\widetilde{\mathscr{H}}^{+}$ Hilbert-térre alapozva elkészíthető a "szokásos" KVTE modellünk. Az ehhez csatolt stacionáriusan mozgást végző kvantummechanikai rendszer, mint detektor és a KG mező kölcsönhatásaként indukálódó átmenetek lehetővé teszik azt, hogy a $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ Fock-terünk $\mathscr{H} = \widetilde{\mathscr{H}}^{+}$ alapterére úgy gondolhassunk, mint a KG mező egyrészecskés állapotainak megjelenítésére.

$$\boxed{\mathscr{F}_s(\mathscr{H}) := \mathscr{C} \oplus \mathscr{H} \oplus (\mathscr{H} \otimes_s \mathscr{H}) \oplus \ldots}$$

Csak időeltolási invariancia esetén van részecskeinterpretáció! Ha a detektor gyorsul ...

Részecskeinterpretáció adható a múltban, illetve jövőben stacionárius téridőkre is.

- Az (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus téridő stacionárius a múltban, ha található hozzá olyan (M', g'_{ab}) globálisan hiperbolikus stacionárius téridő, valamint $(m, g_{ab}|_m)$ és $(m', g'_{ab}|'_m)$ izometrikus résztéridők úgy, hogy $\Sigma \subset m$, illetve $\Sigma' \subset m'$ C^∞ Cauchy-felületek az $(m, g_{ab}|_m)$ és $(m', g'_{ab}|'_m)$ résztéridőkben.



- Ekkor létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a Σ-án, illetve Σ'-ön értelmezett $\{[\phi, \pi]\}$, illetve $\{[\phi', \pi']\}$ kezdőadatok, és így a nekik megfelelő megoldásterek között.

- Így, a csak a múltban stacionárius (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus téridőn a KG-mező klasszikus megoldásainak $\mathfrak{S}$ terén a $\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_1) = \mu'(\Phi'_1, \Phi'_1)}$ értelmezett $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ valós belsőszorzatra $\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_1) = \frac{1}{4} \sup_{\Phi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Phi_1, \Phi_2)]^2}{\mu(\Phi_2, \Phi_2)}, \ \forall \Phi_1 \in \mathfrak{S}}$ $\to \mathscr{H}, K, \widehat{\Omega(\Phi, .)}, \ldots..$

Hasonlóan, részecskeinterpretáció adható a múltban, illetve jövőben aszimptotikusan stacionárius téridőkre is.

- Az (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus téridő aszimptotikusan stacionárius a múltban, ha található hozzá olyan (M', g'_{ab}) globálisan hiperbolikus stacionárius téridő, valamint olyan $\{\Sigma_t\}$, illetve $\{\Sigma'_t\}$ egyparaméteres C^∞ Cauchy-felületseregek – (M, g_{ab})-ben, illetve (M', g'_{ab})-ben – úgy, hogy $\Sigma'_t = \alpha_t[\Sigma'_\circ]$ valamely $\Sigma'_\circ \subset M'$-re, továbbá a Σ_t felületeken indukált $h^{(t)}_{ab}$ metrika és $\chi^{(t)}_{ab} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{n^{(t)}} h^{(t)}_{ab}$ külső görbület a $t \to -\infty$ határesetben a Σ'_t felületek megfelelő mennyiségeihez tartanak

- Határesetben ekkor is megadható egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a $\Sigma_t \subset M$-n, illetve $\Sigma'_t \subset M'$-ön értelmezett $\{[\phi_t, \pi_t]\}$, illetve $\{[\phi'_t, \pi'_t]\}$ kezdőadatok között, mely lehetővé teszi, hogy az (M, g_{ab})-n, illetve (M', g'_{ab})-n nyerhető megoldásterek között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítsünk.

- A szokásos KVTE konstrukció ekkor is végigvihető, hiszen a

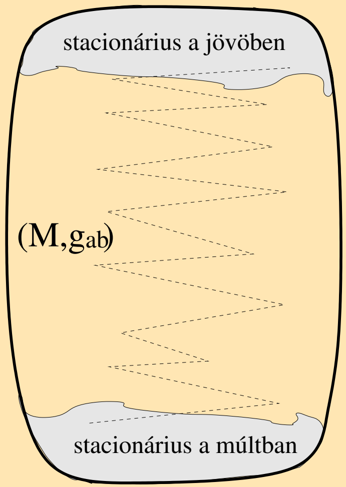
$$\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_1) = \mu'(\Phi'_1, \Phi'_1)}$$

relációval értelmezett $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ valós belsőszorzatra a

$$\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_1) = \frac{1}{4} \sup_{\Phi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Phi_1, \Phi_2)]^2}{\mu(\Phi_2, \Phi_2)}\,, \quad \forall \Phi_1 \in \mathfrak{S}}$$

tulajdonság biztosított $\quad \to \mathscr{H}, K, \widehat{\Omega(\Phi, .)}, ...$ $\boxed{(\mathfrak{S}, \{\Omega(\Phi, .)\}) \to (\mathscr{F}, \{\widehat{\Omega(\Phi, .)}\}}$

Részecskekeltés a múltban és a jövőben (aszimptotikusan) stacionárius téridők felett:



- A múltban és jövőben stacionárius (vagy csak aszimptotikusan stacionárius) téridőkre egy teljesen hasonló eljárással elkészíthetők az egyrészecskés

$$\boxed{\mathscr{H}_{in} \text{ és } \mathscr{H}_{out}}$$

  Hilbert-terekre épített

$$\boxed{(\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{in}), \{\widehat{\Omega(\Phi,.)}\} \quad \text{és} \quad (\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{out}), \{\widehat{\Omega(\Phi,.)}\}}$$

  KVTE konstrukciók is.

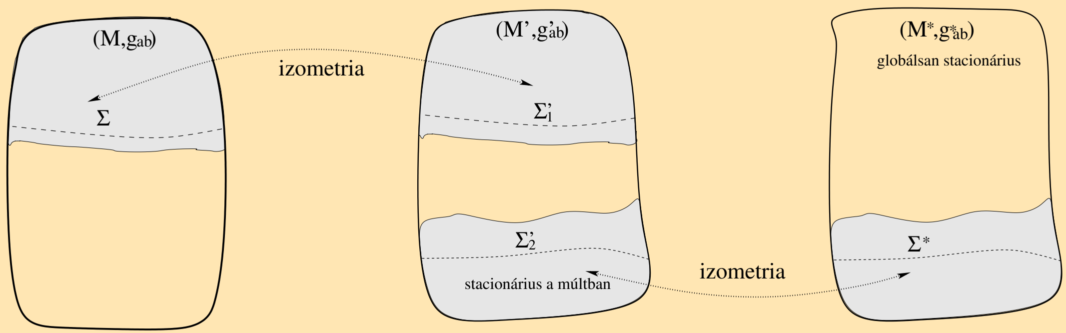
- Amennyiben ezek a konstrukciók unitér-ekvivalensek, akkor az $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{in})$ és $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{out})$ Hilbert-terek között közvetítő $U : \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{in}) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{out})$ unitér transzformáció (S-mátrix),

$$\boxed{U\, \widehat{\Omega_{in}(\Phi,.)}\, U^{-1} = \widehat{\Omega_{out}(\Phi,.)} \quad \forall \Phi \in \mathfrak{S}\text{-re},}$$

  arról hordoz információt, hogy a kvantált KG-mező az (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus "dinamikus" görbült háttéren történő "keresztülfejlődése" során milyen részecskekeltési és szórási folyamatokon ment keresztül.

A $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ valós belsőszorzat létezéséről:

- Emlékeztető: Az általános (M, g_{ab}) globálisan hiperbolikus téridőn definiált KVTE-i modellünk létezése egy $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, a $\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_1) = \frac{1}{4} \sup_{\Phi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Phi_1, \Phi_2)]^2}{\mu(\Phi_2, \Phi_2)}, \ \forall \Phi_1 \in \mathfrak{S}}$ feltételnek eleget tevő valós belsőszorzat létezésén nyugszik.
- Létezik-e egyáltalán ilyen belsőszorzat az általános esetben?



- Az (M', g'_{ab}) globálisan hiperbolikus téridő stacionárius múlt részében a KG-egyenletet egy alkalmas, csak ott nem zérus potenciáltag hozzávételével úgy módosítjuk, hogy a stacionárius esetre kirótt technikai feltételek teljesedjenek, amikor az (M', g'_{ab}) és (M^*, g^*_{ab}) téridőkhöz tartozó megoldástereket azonosítjuk.
- A szokásos KVTE konstrukció ekkor is elkészíthető, hiszen a

$$\boxed{\mu(\Phi_1, \Phi_1) = \mu'(\Phi'_1, \Phi'_1) = \mu^*(\Phi^*_1, \Phi^*_1)}$$

relációval értelmezett valós belsőszorzat rendelkezik a (*) tulajdonsággal.

Unitérekvivalencia és az S-mátrix

- Legyen $(\mathfrak{S}, \Omega)$ tetszőleges valós szimplektikus vektortér, valamint $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ a (*) tulajdonsággal rendelkező valós belsőszorzatok $\mathfrak{S}$-en. Ekkor két

$$\boxed{(\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_1), \{\widehat{\Omega_1(\Phi, .)}\} \quad \text{és} \quad (\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_2), \{\widehat{\Omega_2(\Phi, .)}\}}$$

KVTE-i konstrukció adható meg a korábbiakban ismertetett módon.

A Probléma:

– Mikor létezik olyan $U : \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_1) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_2)$ unitér transzformáció, hogy $\forall \Phi \in \mathfrak{S}$-re

$$\boxed{U\, \widehat{\Omega_1(\Phi, .)}\, U^{-1} = \widehat{\Omega_2(\Phi, .)}}$$

– Ha létezik, határozzuk meg annak explicit alakját.

- A KVTE konstrukciónk első lépése: $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_\mu := \overline{\mathfrak{S}}^\mu$ **Kérdés:** $\boxed{\mathfrak{S}_{\mu_1} = \mathfrak{S}_{\mu_2}}$?

– Léteznek olyan $c, c' > 0$ számok úgy, hogy $\forall \Phi \in \mathfrak{S}$-re

$$\boxed{c \cdot \mu_1(\Phi, \Phi) \leq \mu_2(\Phi, \Phi) \leq c' \cdot \mu_1(\Phi, \Phi)}$$

– Nem léteznek ilyen $c, c' > 0$ számok.

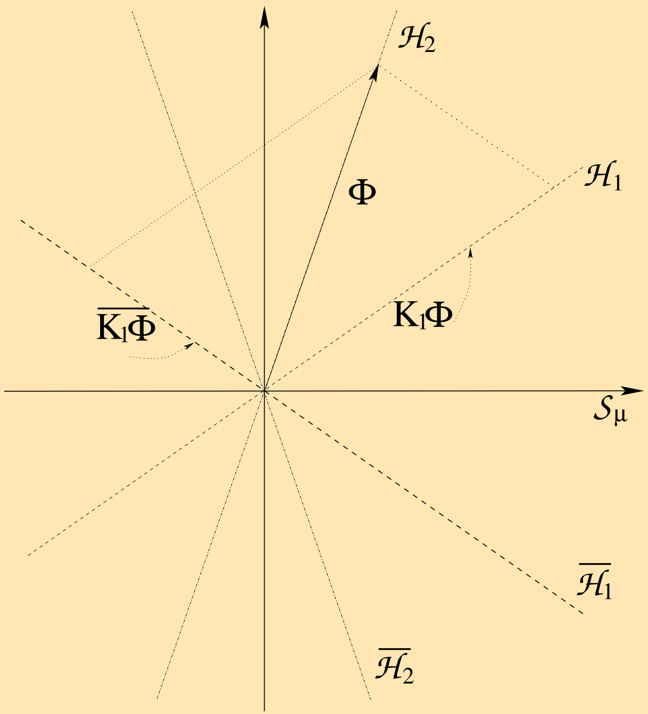
Ha pl. $\nexists c > 0 :\ \mu_1(\Phi, \Phi) \leq \mu_2(\Phi, \Phi)/c$, akkor $\exists\ \{\Phi_n\} \subset \mathfrak{S}$ sorozat : $|\Phi_n|_{\mu_1} \equiv 1$, míg $|\Phi_n|_{\mu_2} \to 0$ az $n \to \infty$ határesetben. $\Rightarrow$ a két modell nem lehet unitérekvivalens.

- A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathfrak{S}_{\mu_1} = \mathfrak{S}_{\mu_2}$ és így $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu_1} = \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu_2}$, azaz $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ ugyanazon $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu}$ Hilbert-tér különböző altereiként kezelhető. Mikor létezik olyan U unitér transzformáció, hogy $\forall\Phi \in \mathfrak{S}$-re $\boxed{U\left[i\,\mathbb{a}_1(\overline{K_1\Phi}) - i\,\mathbb{a}_1^+(K_1\Phi)\right]U^{-1} = \left[i\,\mathbb{a}_2(\overline{K_2\Phi}) - i\,\mathbb{a}_2^+(K_2\Phi)\right]}$

- $\mu_1 \ldots K_1 : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu} \to \mathscr{H}_1$
  $\overline{K_1} : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu} \to \overline{\mathscr{H}_1}$
  $K_1 + \overline{K_1} = \mathbb{I}$
- $\mu_2 \ldots K_2 : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu} \to \mathscr{H}_2$
  $\overline{K_2} : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu} \to \overline{\mathscr{H}_2}$
  $K_2 + \overline{K_2} = \mathbb{I}$

- $\forall\Phi \in \mathfrak{S}$-re $\overline{K_j\Phi} = \overline{K_j}\Phi$, de ...
- $A\Phi = K_1\Phi$
  $B\Phi = \overline{K_1}\Phi$ $\forall\Phi \in \mathscr{H}_2$-re
- $C\Phi = K_2\Phi$
  $D\Phi = \overline{K_2}\Phi$ $\forall\Phi \in \mathscr{H}_1$-re

- A két modell unitérekvivalens, ha az A, B, C, D operátorok eleget tesznek a Bogoljubov-transzformációnak:



$$\boxed{A^+A - B^+B = \mathbb{I} \quad \text{és} \quad A^+\overline{B} = B^+\overline{A}, \quad \text{ahol} \quad \overline{A} : \overline{\mathscr{H}_2} \to \overline{\mathscr{H}_1} \; : \; \overline{A}\overline{\Phi} := \overline{A\Phi}}$$

$$\boxed{C^+C - D^+D = \mathbb{I} \quad \text{és} \quad C^+\overline{D} = D^+\overline{C}, \quad \text{továbbá} \quad A^+ = C \quad \text{és} \quad \overline{B}^+ = -D}$$

- Mivel az A, C projektorok megszorításából származnak, továbbá $ker(A) = ker(C) = \{0\}$ az A, C operátorok korlátos, önadjungált, kölcsönösen egyértelmű ráképezések, és így léteznek az A^{-1}, C^{-1} korlátos operátorok.

- Ezek segítségével meghatározhatjuk az $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_1)$ Hilbert-tér $|\,0\rangle_1$ vákuumállapotának U általi képét, melyet az

$$\boxed{\Psi := U\,|\,0\rangle_1 \quad \in \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_2)\ \Psi = c(1, \psi^a, \psi^{ab}, \psi^{abc}, \ldots)}$$

alakban írhatunk fel.

- Azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\psi_n^{a_1 \ldots a_n} = \begin{cases} 0 & \text{, ha n páratlan} \\ \sqrt{\frac{n!}{2^n [(n/2)!]^2}} \mathscr{E}^{(a_1 a_2} \ldots \mathscr{E}^{a_{n-1} a_n)} & \text{, ha n páros} \end{cases}}$$

ahol $\mathscr{E}^{ab}$ az $\mathscr{E} = \overline{D} \cdot \overline{C^{-1}} : \overline{\mathscr{H}_2} \to \mathscr{H}_2$ lineáris leképezés absztrakt vektorindexekkel történő rövidített megjelenítésére szolgál.

- A $\psi_n^{a_1 \ldots a_n}$-ek segítségével felírt $\Psi := U\,|\,0\rangle_1$ kifejezés csak akkor lesz $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_2)$-beli vektor, ha

$$\boxed{tr(\mathscr{E}^+ \mathscr{E}) < \infty \iff tr(D^+ D) < \infty \iff tr(B^+ B) < \infty.}$$

- Indukcióval $U : \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_1) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_2)$ hatása az $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_1)$ Hilbert-tér tetszőleges elemére meghatározható

Tétel: Legyen $(\mathfrak{S}, \Omega)$ tetszőleges valós szimplektikus vektortér, valamint $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ a (*) tulajdonsággal rendelkező valós belsőszorzatok $\mathfrak{S}$-en. Pontosan akkor létezik olyan $U : \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_1) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_2)$ unitér transzformáció, hogy $\forall \Phi \in \mathfrak{S}$-re

$$\boxed{U\,\widehat{\Omega_1(\Phi, .)}\,U^{-1} = \widehat{\Omega_2(\Phi, .)}}$$

ha:

(i) léteznek olyan $c, c' > 0$ számok úgy, hogy $\forall \Phi \in \mathfrak{S}$-re

$$\boxed{c \cdot \mu_1(\Phi, \Phi) \le \mu_2(\Phi, \Phi) \le c' \cdot \mu_1(\Phi, \Phi)}$$

(ii) az $\mathscr{E} = \overline{D} \cdot \overline{C^{-1}} : \overline{\mathscr{H}_2} \to \mathscr{H}_2$ lineáris leképezés nyoma véges, azaz

$$\boxed{tr(\mathscr{E}^+\mathscr{E}) < \infty \iff tr(D^+D) < \infty \iff tr(B^+B) < \infty.}$$

- A tétel egy érdekes speciális esete az, amikor a dinamikai rendszer véges szabadsági fokú, hiszen ekkor mindkét feltétel teljesül, ami a Stone-Neumann-tétellel összhangban azt jelenti, hogy ekkor bármelyik, a feltételeinknek megfelelő valós belsőszorzatra építhetjük a kvantumelméletünket.

- Ekkor az $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_1)$ Hilbert-tér $|\,0\rangle_1$ vákuumállapotának U általi képére

$$\boxed{\Psi := U\,|\,0\rangle_1 = c\left(1, 0, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\mathscr{E}^{ab}, 0, \sqrt{\tfrac{3\cdot 1}{4\cdot 2}}\mathscr{E}^{(ab}\mathscr{E}^{cd)}, \dots\right).}$$

- Mivel $\mathscr{E} = \overline{D}\cdot\overline{C^{-1}}$ önadjungált és $tr(\mathscr{E}^+\mathscr{E}) < \infty$ $\exists$ olyan $\{\psi_j\}$ ortonormált bázisa $\mathscr{H}_2$-nek, és $\{c_j\}$ valós számsorozat úgy, hogy

$$\boxed{\mathscr{E}^{ab} = \textstyle\sum_j c_j \psi_j^{(a}\psi_j^{b)},}$$

azaz “a részecskék mindig párban keletkeznek”

- A

$$\boxed{\Psi := U\,|\,0\rangle_1 = c\cdot\exp\left[\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_j c_j \mathfrak{a}_2^+(\psi_j)\mathfrak{a}_2^+(\psi_j)\right]\,|\,0\rangle_2 \in \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_2)}$$

állapotot sokszor, mint a legáltalánosabb “squeezed” vákuumállapotot szokás emlegetni.

- Mi van általános esetben? Található-e egyáltalán egy adott μ_1 (*) tulajdonsággal rendelkező valós belsőszorzathoz olyan μ_2 valós belsőszorzat, amelyre a (*) és a fennáll, de $tr(\mathscr{E}^+\mathscr{E}) \not< \infty$? Igen, végtelenül sok ilyen létezik !!!

Home Page
Title Page
Contents
Page 36 of 39
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Unruh-effektus Minkowski-téridőben:

- A Minkowski-téridő $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$:

$$\boxed{ds_M^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2}$$

- Globálisan hiperbolikus $\boxed{\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial_T}\right)^a}$ globális időszerű KVM rajta úgy, hogy a B.Kay által támasztott összes technikai feltétel teljesül. $\Longrightarrow$ elkészíthető a

$$\boxed{(\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_M), \{\widehat{\Omega_M(\Phi, .)}\})}$$

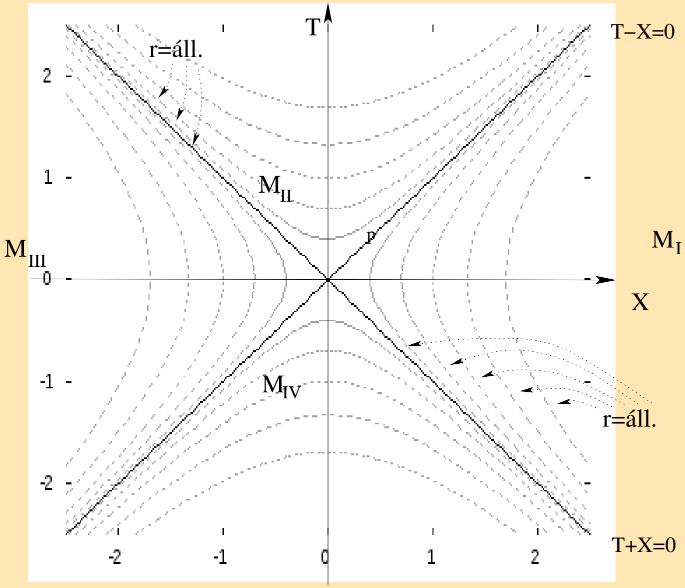
  KVTE-i konstrukció a korábbiakban ismertetett módon, ahol $\boxed{\mathscr{H}_M = \overline{\widetilde{\mathscr{H}}^+}^{(.,.)}}$

  (! $\widetilde{\mathscr{H}}^+$ csak sűrű $\mathscr{H}_M$-ban.)

- A Minkowski-téridő túlságosan is szimmetrikus. A konstrukciónkhoz szükséges ξ^a időszerű KVM egy háromparaméteres családból választható. Melyiket? Mindegy: Bármely ξ^a-ra is alapozzuk a konstrukciónk a μ valós belsőszorzat mindig ugyanaz.

- Vannak további szimmetriák, például a b^a Lorentz-forgatás "boost-KVM"

$$\boxed{b^a = a\left[X\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + T\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a\right]}$$



  – M_I Rindler-téridő (t, x, Y, Z) :
  $0 < x < \infty$, $-\infty < t < \infty$
  $x = \sqrt{X^2 - T^2}$, $t = arctgh(T/X)$

$$\boxed{ds^2_{M_I} = -x^2 dt^2 + dx^2 + dY^2 + dZ^2}$$

  – b^a időszerű a "Rindler-wedge" felett.

  – elkészíthető a

$$\boxed{(\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_I), \{\widehat{\Omega_I(\Phi, .)}\})}$$

  KVTE-i konstrukció a korábbiakban ismertetett módon (!) b^a fényszerű az $x \to 0$ határesetben.

- $b^a \to u^a = b^a/|b|$ ahol $|b| = (-b_e b^e)^{1/2} = a\sqrt{X^2 - T^2}$ és a b^a által kirajzolt Killing-pályát követő megfigyelő $a^b = u^e \nabla_e u^b$ gyorsulására $(a_e a^e)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{X^2 - T^2}}$ adódik.

- b^a sajátidő-paraméterezett valamely Killing-pálya mentén, ha ott $|b| = 1$ vagy $a = 1/\sqrt{X^2 - T^2}$. De ekkor (és csak ekkor) $(a_e a^e)^{1/2} = a$, amit úgy szokás interpretálni, hogy "a állandó gyorsulással mozog" a kérdéses megfigyelő.

- Fontos ezt észben tartani, amikor azt mondjuk, hogy ...“az I-es régióhoz tartozó, ott időszerű b^a KVM-re alapozott KVTE-i konstrukció részecsketartalma éppen az, amit a Rindler-wedgeben a állandó gyorsulással mozgó megfigyelő érzékel”
- Unruh kérdése: Milyen részecsketartalma van a $|0\rangle_M$ vákuumállapotnak a állandó gyorsulással mozgó megfigyelő számára?
- Problémák: Az $\boxed{(\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_M), \{\widehat{\Omega_M(\Phi, .)}\}) \text{ és } (\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_I), \{\widehat{\Omega_I(\Phi, .)}\})}$ KVTE konstrukciók nem unitérekvivalensek! Csak formális kifejtésre van lehetőség.
- Valójában egy

$$\boxed{\mathscr{F}_s(\mathscr{H}_M) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_I \otimes \mathscr{H}_{II}) \to \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_I) \otimes \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{II})}$$

leképezés formális kifejtésre van mód, amiből az adódik, hogy

$$\boxed{\mathscr{E}^{ab} = (\overline{D} \cdot \overline{C^{-1}})^{ab} = \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi\omega_j}{a}\right) \left(\psi_{j}{}_I^a \psi_{j}{}_{II}^b + \psi_{j}{}_{II}^a \psi_{j}{}_I^b\right)}$$

ahol $\{\psi_{j}{}_I^a\}$ és $\{\psi_{j}{}_{II}^a\}$ az ω_j frekvenciára fókuszált olyan hullámcsomagok, amelyek ON bázisai $\mathscr{H}_I$-nek és $\mathscr{H}_{II}$-nek.

- Végül a $|0\rangle_M$ vákuumállapotnak megfelelő $\Psi \in \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_I) \otimes \mathscr{F}_s(\mathscr{H}_{II})$ állapot által indukált sűrűségmátrixot – Dirac-féle jelölésben, ahol $|n_{j_I}\rangle \leftrightarrow \psi_{j_I}^{(a_1} \ldots \psi_{j_I}^{a_n}$ – a

$$\boxed{\rho = \prod_j \otimes \left[\sum_{n=0}^{\infty} \oplus \exp\left(-\frac{2\pi n \omega_j}{a}\right) |n_{j_I}\rangle \otimes \langle n_{j_I}|\right]}$$

kifejezéssel adhatjuk meg.

- $n\omega_j$ az $|n_{j_I}\rangle$ állapothoz tartozó energia
- Unruh-effektus: Termikus állapot

$$\boxed{\rho = \exp\left(-\frac{H_I}{T}\right), \text{ ahol } T = \frac{a}{2\pi}}$$

$$\boxed{T/[K] \approx \frac{a}{10^{21} cm/s}}$$