Az idő problémája a kanonikus gravitációban

Gergely Árpád László

Szegedi Tudományegyetem

2012

A probléma

A Schrödinger egyenletben az idő és a tér markánsan szétválik → nem árt, ha tudjuk, mi az idő

Miként vezetjük be? Kvantálás előtt? Kvantálás után? Sehogyan? (**elemzés, *Isham***, gr-qc/9210011)

A gravitáció hamiltoni formalizmusa nem választ ki egyértelmű időparamétert → ahány idő, annyi kvantumelmélet? (**many-fingered time formalism, *Isham, Kuchař*, Ann. Phys. 164**, 288 (1985), ibid. **164**, 316 (1985))

Mi a megoldás?

A megoldás 1.

A téridő nagyfokú szimmetriával rendelkezik
(mini- és midi-szuperterek)

a metrika kevés függvényt tartalmaz,
a koordináták a szimmetriákhoz adaptáltak
→ ezek kanonikus változókká tehetők

Hengerszimmetrikus gravitációs hullámok
Kuchař, Phys. Rev. D **4**, 955 (1971)

Schwarzschild fekete lyuk

Kuchař, Phys. Rev. D **50**, 3961 (1994)

The curvature coordinates T,R of a Schwarzschild spacetime are turned into canonical coordinates $T(r), R(r)$ on the phase space of spherically symmetric black holes. The entire dynamical content of the Hamiltonian theory is reduced to the constraints requiring that the momenta $P_{T}(r), P_R(r)$ vanish. What remains is a conjugate pair of canonical variables m and p whose values are the same on every embedding. The coordinate m is the Schwarzschild mass, and the momentum p the difference of parametrization times at right and left infinities. The Dirac constraint quantization in the new representation leads to the state functional $\Psi (m; T, R] = \Psi (m)$ which describes an unchanging superposition of black holes with different masses. The new canonical variables may be employed in the study of collapsing matter systems.

Varadarajan, Phys. Rev. D **63**, 084007 (2001)

A megoldás 2.

Speciális koordinátarendszert választunk

Gauss koordináta rendszer

Kuchař, Torre, Phys. Rev. D **43**, 419 (1991)

„ The Wheeler-DeWitt equation of vacuum geometrodynamics is turned into a Schrödinger equation by imposing the normal Gaussian coordinate conditions with Lagrange multipliers and then restoring the coordinate invariance of the action by parametrization. This procedure corresponds to coupling the gravitational field to a reference fluid. The source appearing in the Einstein law of gravitation has the structure of a heat-conducting dust. ”

Harmonikus koordináta rendszer

Kuchař, Torre, Phys. Rev. D **44**, 3116 (1991)

„ The Isham-Kuchař representation theory of the spacetime diffeomorphism group in canonical geometrodynamics is implemented in the context of harmonic coordinate conditions. The representation is carried by either an extended phase space, consisting of the cotangent bundle over the space of three-metrics, spacelike embeddings, and Lagrange multipliers which serve to enforce the harmonic gauge in the action, or by a reduced space in which the multipliers are eliminated. The approach used here is applicable to any generally covariant theory and to any coordinate conditions. ”

Kuchař, Stone, Class. Quantum Grav. **3**, 757 (1992)

A megoldás 3.

<u>Referencia folyadékot</u> adunk a gravitációhoz

A folyadéknak nyugalmi rendszere van, ahhoz sajátidő tartozik

Por (nyomásmentes ideális folyadék)

Brown, Kuchař, Phys. Rev. D **51**, 5600 (1995)

Null por (sugárzás geometriai optikai közelítésben)

Bičák, Kuchař, Phys. Rev. D **56**, 4878 (1997)

probléma: nincs nyugalmi rendszer!

2 komponensű null por (sugárzási atmoszféra)

Bičák, Hájíček, Phys. Rev. D **68**, 104016 (2003)

probléma x 2

Horváth, Kovács, Gergely, Phys. Rev. D **74**, 084034 (2006)

megoldás: van nyugalmi rendszer

Kényszerek és dinamikai törvények

2 féle fizikai törvény:

- dinamikai törvények (időfejlődés)
- pillanatnyi törvények (pl. Gauss: az elektromos térerősség divergenciája a töltéseloszlás; csak térszerű deriváltak jelennek meg) = kényszerek

A Maxwell egyenletek és Einstein egyenletek mindkettőt tartalmazzák

Az Einstein egyenletek kényszer jellegű alhalmaza a Hamiltoni kényszer és az impulzus (diffeomorfizmus) kényszerek

Példa kényszeres rendszerre

A Schrödinger rendszer

Gergely, Annals of Physics **298**, 394–402 (2002)

„We review and compare different variational formulations for the Schrödinger field. Some of them rely on the addition of a conveniently chosen total time derivative to the hermitic Lagrangian. Alternatively, the Dirac–Bergmann algorithm yields the Schrödinger equation first as a consistency condition in the full phase space, second as canonical equation in the reduced phase space. The two methods lead to the same (reduced) Hamiltonian. As a third possibility, the Faddeev–Jackiw method is shown to be a shortcut of the Dirac method. By implementing the quantization scheme for systems with second class constraints, inconsistencies of previous treatments are eliminated."

A $\phi_1 := \pi - \frac{i\hbar}{2}\psi^* = 0, \quad \phi_2 := \pi^* + \frac{i\hbar}{2}\psi = 0$ kényszerek,

másodosztályúak $\{\phi_1, \phi_2\} := \{\phi_1(\mathbf{r}, t), \phi_2(\mathbf{r}', t)\} = -i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

konzisztenciafeltételeik:

$$\begin{cases} 0 \approx \dot{\phi}_1 \approx -i\hbar\dot{\psi}^* + \dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^* - V\psi^* \\ 0 \approx \dot{\phi}_2 \approx i\hbar\dot{\psi} + \dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - V\psi^*. \end{cases}$$

...

A hamiltoni kényszer geometriai interpretációja

(**Kuchař,** arXiv:gr-qc/9304012v1 nyomán)

Görbült felületek 3d euklideszi térben. Kétféle görbület: belső és külső (első és második fundamentális formák)

Theorema Egregium (Gauss):

$R = 2\, k_{min}\, k_{max}$

görbületi skalár

fő görbületek, K_{ab} sajátértékei

Ha a fenti összefüggés minden pontban igaz, a 3d tér euklideszi

A hamiltoni kényszer geometriai interpretációja 2.

Theorema Egregium -++ Lorentz téridőben:

$R=-2\,k_{min}\,k_{max}$ (pillanatnyi törvény)

Ha a fenti összefüggés az összes térszerű felület minden pontjában igaz, a 3d téridő Lorentz

(dinamikai törvény !!!)

A hamiltoni kényszer geometriai interpretációja 3.

Theorema Egregium -+++ Lorentz téridőben:

$$R = -2\left(k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1\right)$$

vagy

$$R = \frac{1}{2} K_{ab} G^{ab\ cd} K_{cd} \ ,$$

$$G^{ab\ cd} = \frac{1}{2}\left(g^{ac}g^{bd} + g^{ad}g^{bc} - g^{ab}g^{cd}\right)$$

szupermetrika

Ha a fenti összefüggés az összes térszerű hiperfelület minden pontjában igaz, a 4d téridő Ricci-sík (vákuum) (dinamikai törvény !!!)

A hamiltoni kényszer geometriai interpretációja 4.

Átfogalmazás: $\pi^{ab} := G^{ab\ cd} K_{cd}$

Hamiltoni kényszer:

$$\mathcal{H}^G(x) := \pi(x) \cdot G(x;g) \cdot \pi(x) - R(x,g] = 0$$

(pillanatnyi törvény)

(majd kiderül miért)

+ Codazzi törvény =impulzus kényszer (akár az elektrosztatikai Gauss törvény vákuumban!)

$$\mathcal{H}^G_a := D_b \pi_a{}^b(x) = 0$$

(pillanatnyi törvény)

Einstein gravitációelmélete = a hamiltoni és impulzus kényszerek megmaradnak

Tetszőleges változónak a $\begin{cases} \text{hamiltoni kényszerrel} \\ \text{impulzus kényszerrel} \end{cases}$

vett Poisson-zárójele annak a

$\begin{cases} \text{hiperfelületről történő merőleges elmozdulás során bekövetkező } \textbf{időfejlődését} \\ \text{hiperfelülethez érintő irányú } \textbf{Lie-megváltozását} \end{cases}$

generálja

→

1. impulzus kényszerek=diffeomorfizmus kényszerek
2. az Einstein egyenletek ekvivalensek azzal, hogy a kanonikus változók fejlődését meghatározzák a kényszerek, melyek ezután eltűnnek

Dirac-„algebra”

matematikai értelemben nem az, mert nem záródik: az indukált metrika szerepel a hamiltoni kényszerek Poisson-zárójelében

$$\{\mathcal{H}^G(x), \mathcal{H}^G(x')\} = g^{ab}(x)\mathcal{H}^G_a(x)\delta_{,b}(x;x') - (x \leftrightarrow x') \ ,$$

$$\{\mathcal{H}^G(x), \mathcal{H}^G_a(x')\} = \mathcal{H}^G(x,\chi)\delta_{,a}(x;x') + \mathcal{H}^G_{,a}(x)\delta(x;x') \ ,$$

$$\{\mathcal{H}^G_a(x), \mathcal{H}^G_b(x')\} = \mathcal{H}^G_b\delta_{,a}(x;x') - (ax \leftrightarrow bx') \ .$$

Új kanonikus változók bevezetésével a kényszerek néha átírhatók ekvivalens (de bonyolultabb) formába úgy, hogy az algebra záródjon:

Markopoulou, Class. Quantum Grav. **13**, 2577 (1996)
Kuchař, Romano, Phys. Rev. D **51**, 5579 (1995)
Kouletsis, Class. Quantum Grav. **13**, 3085 (1996)

Az analógián túl: Geometrodinamika

időfejlődés $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = Nn^a + N^a$ integrálgörbéi mentén

lapse hiperfelület normálisa shift

4d metrika 3+1 felbontása: $\tilde{g}_{ab} = g_{ab} - n_a n_b$

$$ds^2 = -(N_a N^a - N^2)dt^2 + 2N_a dt dx^a + g_{ab}dx^a dx^b$$

(ADM)

$$g_{ab}n^a = N^a n_a = 0$$

a külső görbület: $K_{ab} = g^c{}_a g^d{}_b \tilde{\nabla}_c n_d = \frac{1}{2N}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} - 2D_{(a}N_{b)}\right)$

az első sebesség-fázistér egyenlet

Geometrodinamika 2

4d Ricci-görbület 3+1 felbontásából:

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{ab} \; = \; N\left[g_a^c g_b^d \widetilde{R}_{cd} - R_{ab} - K_{ab}K + 2K_{ac}K_b^c \right]$$
$$+ D_b D_a N + N^c D_c K_{ab} + 2K_{c(a} D_{b)} N^c$$

a második sebesség-fázistér egyenlet

4d görbületi skalár 3+1 felbontásából a Lagrange függvény:

$$\mathcal{L}^G[g_{ab}, K_{ab}; N^a, N] =$$
$$\sqrt{g}\left(K^{ab} - K g^{ab}\right)\dot{g}_{ab} - N\mathcal{H}^G - N^a \mathcal{H}^G_a - 2\sqrt{g} D_a \left[(D^a N + N_b K^{ab}) \right]$$

ahol

$$\mathcal{H}^G \; = \; -\sqrt{g}[R + (K^2 - K_{ab}K^{ab})] \, ,$$
$$\mathcal{H}^G_a \; = \; -\sqrt{g}\{D_b[K^b{}_a - g^b{}_a K] \, .$$

(ugyanaz, mint amiről korábban is szó volt)

Geometrodinamika 3

az indukált metrikához tartozó impulzus:

$$\pi^{ab} := \frac{\partial \mathcal{L}^G}{\partial \dot{g}_{ab}} = \sqrt{g}\left[K^{ab} - K g^{ab}\right]$$ (ugyanaz, mint korábban)

a kényszerek:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^G[g_{ab}, \pi^{ab}] &= -\sqrt{g}R + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{1}{s}\pi^2\right) , \\ \mathcal{H}^G_a[g_{ab}, \pi^{ab}] &= -2D_b\pi^b{}_a \ . \end{aligned}$$

(mint korábban)

az Einstein-Hilbert hatás a Liuville formát expliciten mutató alakban:

$$S^G[g_{ab}, \pi^{ab}; N^a, N] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Sigma_t} d^3x$$

$$\times\left(\pi^{ab}\dot{g}_{ab} - N\mathcal{H}^G[g_{ab}, \pi^{ab}] - N^a\mathcal{H}^G_a[g_{ab}, \pi^{ab}]\right)$$ + határtagok

A hamiltoni kényszer kvantálása

indukált metrika = kanonikus koordináta
külső görbület = kanonikus impulzus

ezek operátorosítása a hamiltoni kényszer operátor alakjához vezet = Wheeler-de Witt egyenlet

PROBLÉMÁK:
1. nincs lineáris megoldás-tere, Hilbert tere → hogyan értelmezzünk belső szorzatot? …

Bryce de Witt (a MG9-es jeruzsálemi konferencián, 1997):
Felejtsük el ezt az egyenletet!
a hallgatóság: *Nem!*

Mi az alternatíva?

impulzusokban lineáris hamiltoni kényszert találni

ennek kvantálása Schrödinger egyenlethez vezetne

de hogyan?

referencia-folyadék segítségével !

Bonusz: a Dirac algebra Ábeli algebrává válik !

A por, mint referenciafolyadék

Brown, Kuchař, Phys. Rev. D **51**, 5600 (1995)

hatás:
$$S^D[T, Z^k, M, W_k; {}^{(4)}g_{ab}] = -\frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-\widetilde{g}}\, M(U_a U^a + 1)$$

a négyessebesség 7 skalármező Pfaff formája:

dinamikai egyenletek:
$$U_a = -T_{,a} + W_k Z^k{}_{,a}$$

$$0 = \frac{\delta S^D}{\delta M} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\widetilde{g}}(U_a U^a + 1),$$
a négyessebesség normált

$$0 = \frac{\delta S^D}{\delta W_k} = -\sqrt{-\widetilde{g}} M Z^k{}_{,a} U^a,$$
együttmozgó koordináták

$$0 = \frac{\delta S^D}{\delta T} = -(\sqrt{-\widetilde{g}} M U^a)_{,a},$$
tömegmegmaradás

$$0 = \frac{\delta S^D}{\delta Z^k} = -(\sqrt{-\widetilde{g}} M W_k U^a)_{,a}.$$
impulzusmegmaradás

A por, mint referenciafolyadék 2

a 3+1 felbontott, Liuville formát expliciten tartalmazó hatás:

$$S^D[T, Z^k, P, P_k, g_{ab}, N, N^a] = \int dt \int d^3x (P\dot{T} + P_k\dot{Z}^k - NH^D - N^a H_a^D)$$

a kényszerek anyagi járuléka (hosszú számolás után):

$$H_a^D = PT_{,a} + P_k Z^k_{,a}$$

$$H^D = \sqrt{P^2 + g^{ab} H_a^D H_b^D}$$

A por, mint referenciafolyadék 3

a teljes (gravitációs+ anyagi) kényszer tűnik el !

ezek az egyenletek megoldhatók a por impulzusokra

egy oldalra rendezve, impulzusokban lineáris új kényszerek állnak elő

$$H_{\uparrow} = P + h[g_{ab}, \pi^{ab}] = 0 \,, \qquad h = -\sqrt{(\mathcal{H}^G)^2 - g^{ij}\mathcal{H}^G_i \mathcal{H}^G_j}$$

$$H_{\uparrow k} = P_k + h_k[T, Z^k, g_{ab}, \pi^{ab}] = 0 \qquad h_k = Z^a_k \mathcal{H}^G_a - hT_{,a} Z^a_k \,.$$

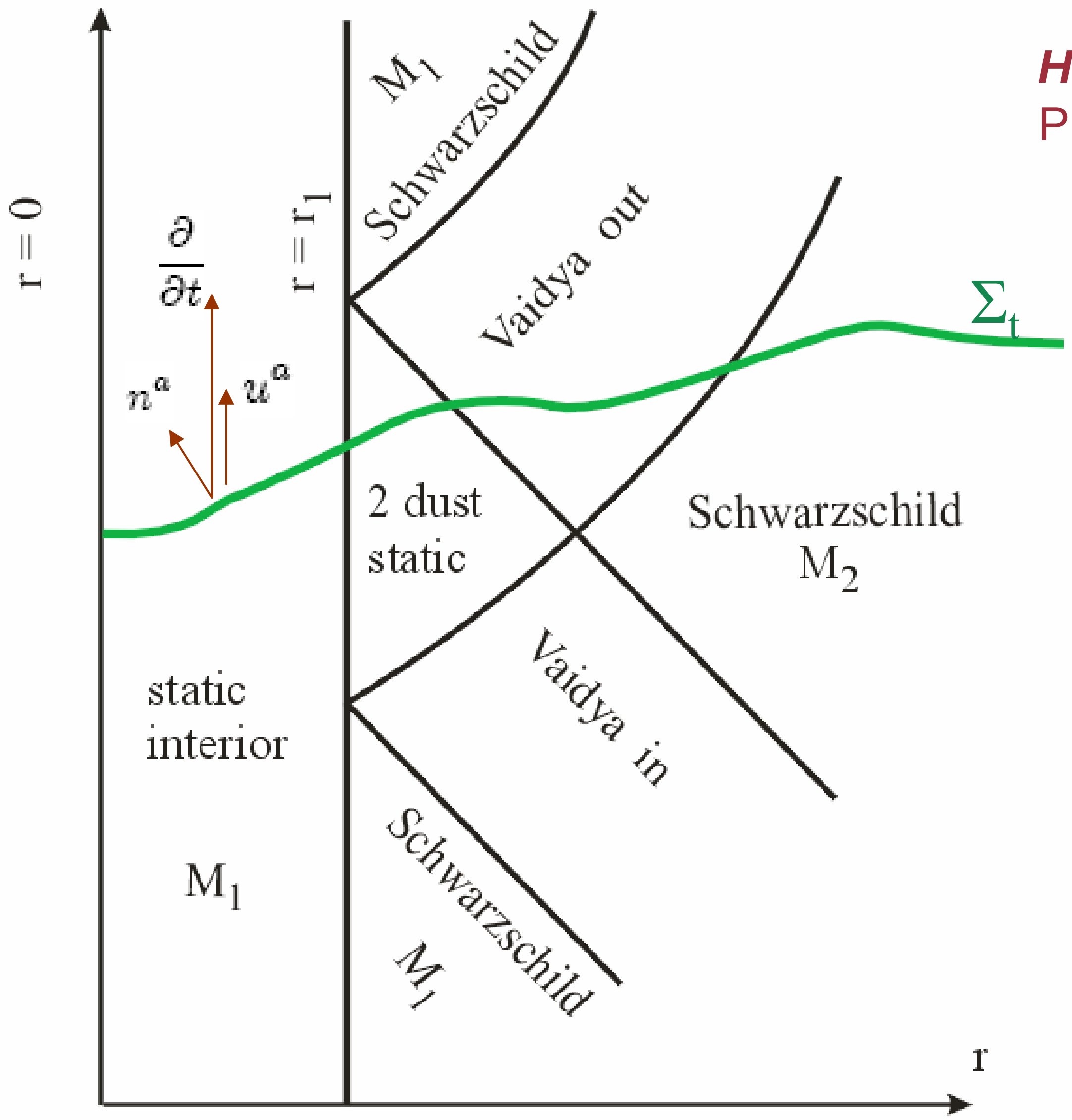
a hamiltoni kényszer operátorosított változata funkcionál Schrödinger-egyenlet, melyben a geometriai és por-változók szeparálódnak

az új hamiltoni kényszerek erős értelemben is kommutálnak (Ábeli algebra)

belső szorzat értelmezhető...

→ egy <u>sikeresen végrehajtott kanonikus kvantálási program</u>

Egy bonyolultabb példa, a 2 komponensű null por



Horváth, Kovács, Gergely, Phys. Rev. D **74**, 084034 (2006)

A téridő és forrása

a forrás:

$$T^{\mathrm{2ND}}_{ab} = \rho(u_a u_b + v_a v_b)$$

$$u_a u^a = v_a v^a = 0, \qquad u_a v^a \neq 0$$

a geometria (gömbszimmetrikus, sztatikus): időkoordináta

$$ds^2 = -2a\frac{e^{L^2}}{R(L)}[dZ^2 - R^2(L)dL^2] + R^2(L)d\Omega^2$$

$$-R(L) = a(e^{L^2} - 2L\Phi_B), \qquad \Phi_B = B + \int^L e^{x^2}dx$$

a forrás a metrikus függvényekkel megadva:

$$\rho = (8\pi R^2 W^2)^{-1} \qquad W = \sqrt{\frac{ae^{L^2}}{R}}$$

$$u_a = WZ_{,a} + RWL_{,a}, \qquad v_a = WZ_{,a} - RWL_{,a}$$

Az ekvivalens anizotrop forrás interpretáció

a forrás, mint anizotrop folyadék:

$$U^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^a + v^a), \qquad \chi^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^a - v^a)$$

$$-U_a U^a = \chi_a \chi^a = 1, \qquad U_a \chi^a = 0$$

$$T_{ab} = \rho(U_a U_b + \chi_a \chi_b)$$

a preferált Z és L koordinátákkal kifejezve:

$$U_a = \sqrt{2} W Z_{,a}, \qquad \chi_a = \sqrt{2} R W L_{,a}$$

Hatás és dinamika

a kovariáns hatás:

$$S^{2\mathrm{ND}}[{}^{(4)}g_{ab}, \rho, Z, L] = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-{}^{(4)}g}\,\rho(u_a u^a + v_a v^a)$$

a dinamikai egyenletek:

$$0 = \frac{\delta S^{2\mathrm{ND}}}{\delta Z} = -2[\sqrt{-{}^{(4)}g}\,\rho W(u^a + v^a)]_{,a}\,,$$

folytonossági egyenlet

$$0 = \frac{\delta S^{2\mathrm{ND}}}{\delta L} = 2\sqrt{-{}^{(4)}g}\,\rho L(u^a u_a + v^a v_a) - 2R[\sqrt{-{}^{(4)}g}\,\rho W(u^a - v^a)]_{,a}\,,$$

az impulzus-áramok megmaradása

$$0 = \frac{\delta S^{2\mathrm{ND}}}{\delta \rho} = -\frac{1}{2}\sqrt{-{}^{(4)}g}(u_a u^a + v_a v^a).$$

$$u^a u_a = v^a v_a = -W^2\left[h^{-1}\left(\frac{dZ}{dT}\right)^2 - fR^2\left(\frac{dL}{dR}\right)^2\right]$$

null 4-es sebességvektorok

az energia-impulzus tenzor: $$T^{ab} = \frac{-2}{\sqrt{-{}^{(4)}g}}\frac{\delta S^{2\mathrm{ND}}}{\delta\,{}^{(4)}g_{ab}} = \rho(u^a u^b + v^a v^b)$$

3+1 felbontás

a gömbszimmetrikus téridő ADM felbontása:

$$ds^2 = -(N^2 - \Lambda^2 N^{r\,2})dt^2 + 2\Lambda^2 N^r dr dt + \Lambda^2 dr^2 + R^2 d\Omega^2$$

a Liuville-formát tartalmazó, ún. „hamiltoni alakra" hozott Lagrange függvény:

$$L^{2ND} = \dot{Z} P_Z + \dot{L} P_L - N H^{2ND} - N^r H_r^{2ND}$$

a kényszerek 2 null por járuléka (sok számolás után):

$$H^{2ND} = 2\sqrt{\left(\frac{P_Z L' R}{\Lambda} - \frac{P_L Z'}{\Lambda R}\right)^2 + g^{rr} H_r^{2ND} H_r^{2ND}}$$

$$H_r^{2ND} = \sqrt{-\left(P_Z L' R - \frac{P_L Z'}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}(\Lambda H^{2ND})^2}$$

Új kényszerek

a teljes hamiltoni és impulzus-kényszer:

$$H := \mathcal{H}^G + H^{2ND} = 0$$
$$H_r := \mathcal{H}_r^G + H_r^{2ND} = 0$$

megoldása az 2 null por impulzusokra új kényszereket ad:

$$H_{\uparrow Z} = P_Z + h_Z[M, \mathrm{R}, Z, L, P_M, P_{\mathrm{R}}] = 0$$
$$h_Z = \frac{L' \Lambda \mathrm{R} h + Z' \mathcal{H}_r^G}{Z'^2 + L'^2 \mathrm{R}^2} \ .$$

$$H_{\uparrow L} = P_L + \pi_L[M, \mathrm{R}, Z, L, P_M, P_{\mathrm{R}}] = 0$$
$$\pi_L = \frac{-Z' \Lambda \mathrm{R} h + L' \mathrm{R}^2 \mathcal{H}_r^G}{Z'^2 + L'^2 \mathrm{R}^2} \ .$$

ezek Ábeli algebrát alkotnak:

$$\{H_{\uparrow J}(r), H_{\uparrow J'}(r')\} = 0 \ , \qquad H_{\uparrow J} = (H_{\uparrow Z}, H_{\uparrow L})$$

Összefoglalás

a geometrodinamikában megjelenő idő-problémára megoldás a fizikai rendszer által valamilyen módon preferált idő bevezetése, még a kvantálás előtt

ilyen preferált időt szimmetria, referenciafolyadékok sajátideje, (referenciafolyadékok bevezetésével ekvivalens) koordináta-feltételek kiszabása adhat

a programot sikeresen megvalósították pl hengerszimmetrikus gravitációs hullámokra, Schwarzschild fekete lyukra, nyomásmentes ideális folyadékra, ill (a klasszikus részét) speciális 2 komponensű sugárzásra

kihívás: a forgó eset!!!