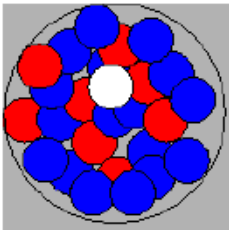


Magszerkezet modellek

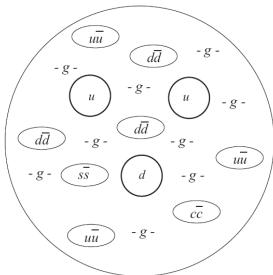
Folyadékcsepp modell

Az atommag összetevői (emlékeztető)



atommag

Z proton + (A-Z) neutron (nukleonok) szorosan kötve
Állapot leírása: kvantummechanika + kölcsönhatások
Nem relativisztikus sebességek
Az alkotórészek is összetettek



nukleon

Kvarkok (uud – proton, udd – neutron), elemi részek
Gluonok – az erős kölcsönhatás közvetítő bozonjai
Kvark-antikvark párok – mezonok

Alapvető kölcsönhatások (emlékeztető)

alapvető kölcsönhatás = a pontszerű, szerkezet nélküli testek közötti kölcsönhatás

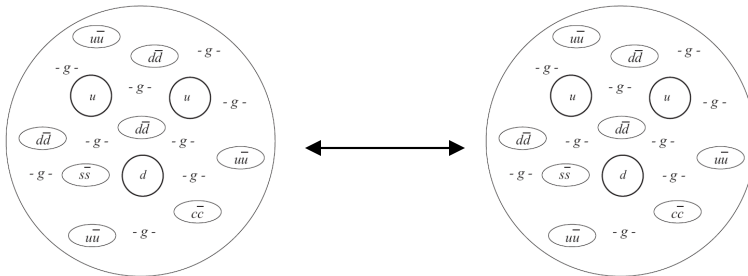
gravitációs: minden részecske között hat, hosszú hatótávolságú: $U \sim 1/r$, közvetítő bozon: graviton?, erőssége $\sim 10^{-38}$

gyenge: minden részecske között hat, nagyon rövid hatótávolságú: $\sim 10^{-3}$ fm, közvetítő bozonok: Z^0 , W^- , W^+ , erőssége $\sim 10^{-6}$

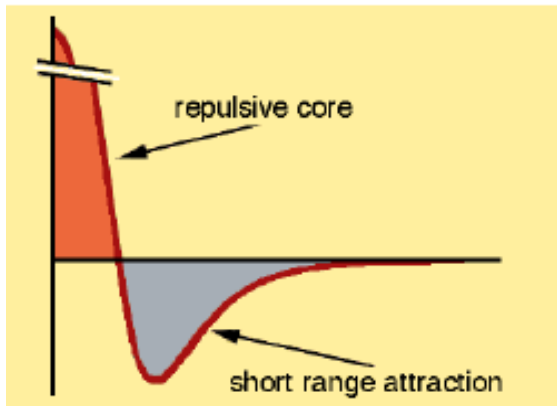
elektromágneses: elektromosan töltött részecskék között hat, hosszú hatótávolságú: $U \sim 1/r$, közvetítő bozon: foton, erőssége: $1/137$

erős: kvarkok között hat, rövid hatótávolságú: ~ 1 fm, közvetítő bozonok: gluonok, erőssége: 1

Nukleáris kölcsönhatás



Van der Waals típusú, **effektív kh**,
A kvarkok közötti erős kh „maradék”
Jó közelítéssel pi mezonok cseréje



- Rövid hatótávolságú vonzás
- Taszító törzs
- Spin függő
- Töltés szimmetrikus
- Majdnem töltésfüggetlen
- Nem centrális tag
- Spin-pálya tag

$$V_{\text{OPEP}} = g_s^2 \left(\frac{1}{3} \underline{\sigma}_A \cdot \underline{\sigma}_B + S_{AB} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\mu r} + \frac{1}{(\mu r)^2} \right] \right) \underline{\tau}_A \cdot \underline{\tau}_B \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{r}$$

$$S_{AB} = 3 \frac{(\underline{\sigma}_A \cdot \underline{r})(\underline{\sigma}_B \cdot \underline{r})}{r^2} - \underline{\sigma}_A \cdot \underline{\sigma}_B$$

Yukawa-potenciál

Kötött kvantummechanikai rendszer jellemzése

Állapot jellemzése hullámfüggvénnyel: $\Psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$

Kötött rendszer hullámfüggvénye és energiája eleget tesz a

$$\left(\sum_{i=1}^A t_i + \sum_{i=1}^A \sum_{j=i+1}^A V_{ij} \right) \Psi_n(r_1, \dots, r_n) = E_n \Psi_n(r_1, \dots, r_n)$$

Időtől független Schrödinger egyenletnek

A lehetséges kötött állapotok diszkrét sorozatot alkotnak meghatározott energiával, impulzusmomentummal és paritással.

Pl. a hidrogén atom

Az atommag hullámfüggvénye

$$\left(\sum_{i=1}^A t_i + \sum_{i=1}^A \sum_{j=i+1}^A V_{ij} \right) \Psi_n(r_1, \dots, r_n) = E_n \Psi_n(r_1, \dots, r_n)$$

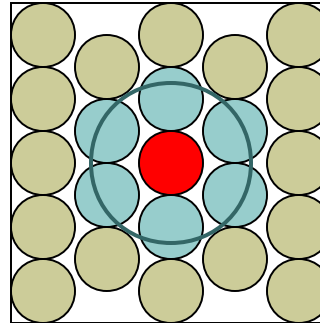
A Schrödinger egyenlet nem oldható meg az atommagra, mert:

- túl sok a részecske
- bonyolult és nem ismert a kölcsönhatás.

Az egzakt megoldás helyett egyszerűbb modelleket vizsgálunk

Folyadékcsepp modell

- Rövid hatótávolságú vonzás
- Taszító törzs
- Töltés szimmetrikus
- Majdnem töltésfüggetlen



összenyomhatatlan
folyadék

$$R = r_0 A^{1/3}$$

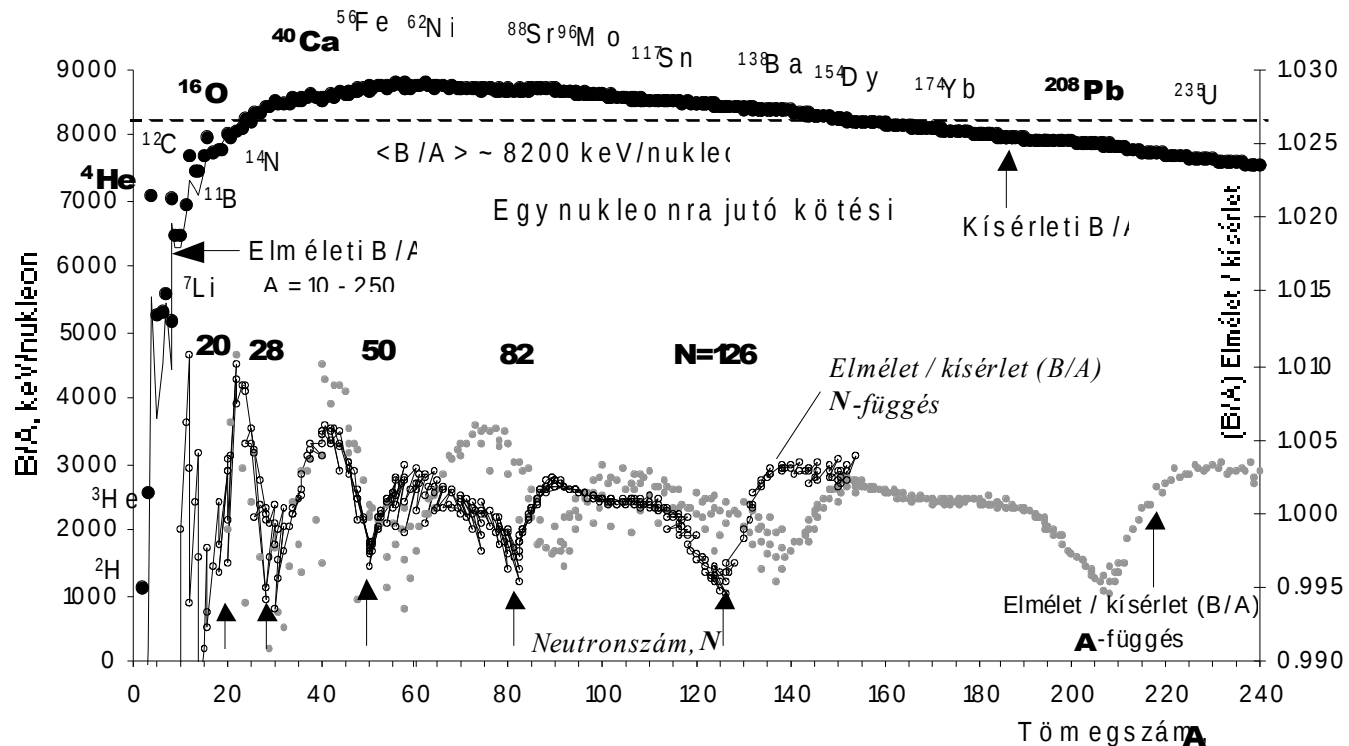
$$\rho \approx 10^{14} \text{ g/cm}^3$$

- A kötési energia A -val arányos, nem $A(A-1)$ -el
- Csökkenti egy felülettel ($A^{2/3}$ -al) arányos tag
- A Z elektromos töltés miatt csökkenti egy Z^2/R -el, vagyis $Z^2/A^{1/3}$ -al arányos tag

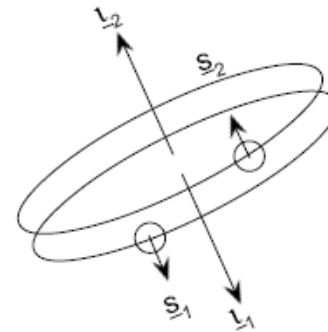
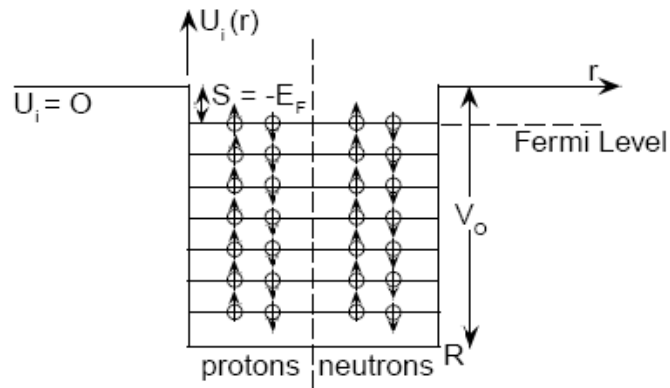
$$\Delta W = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Kötési energia (emlékeztető)

$$\Delta W = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \zeta \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \delta A^{3/4}$$



Pauli elv és spin



$$\Delta W = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \zeta \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \delta A^{3/4}$$

Kis felületi rezgések (vibrációs állapotok)

$$R = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right]$$

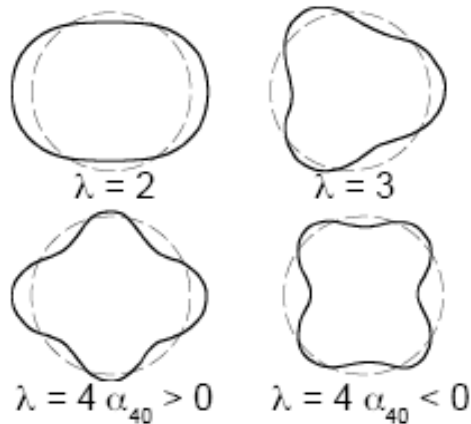
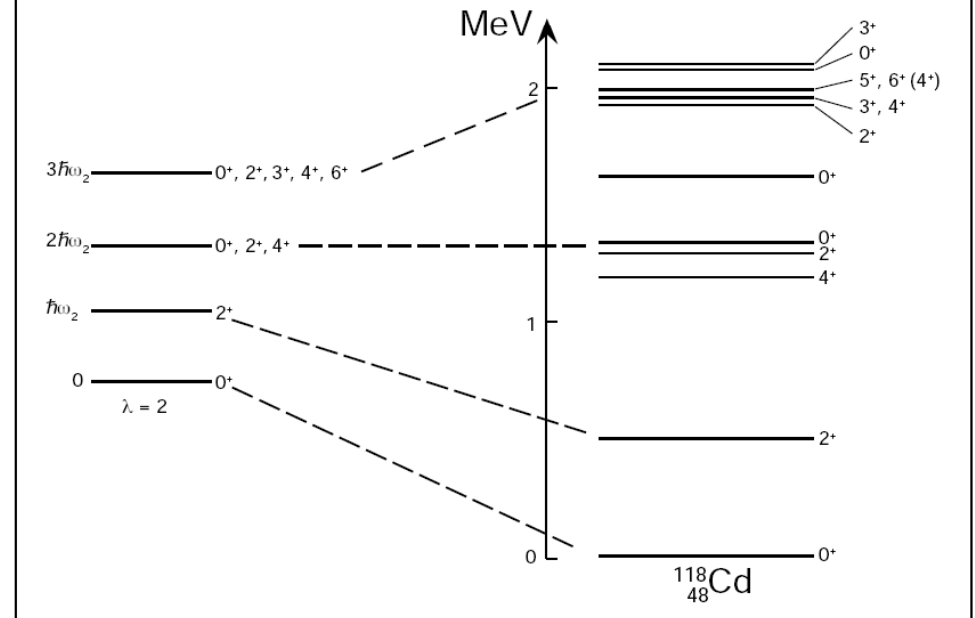
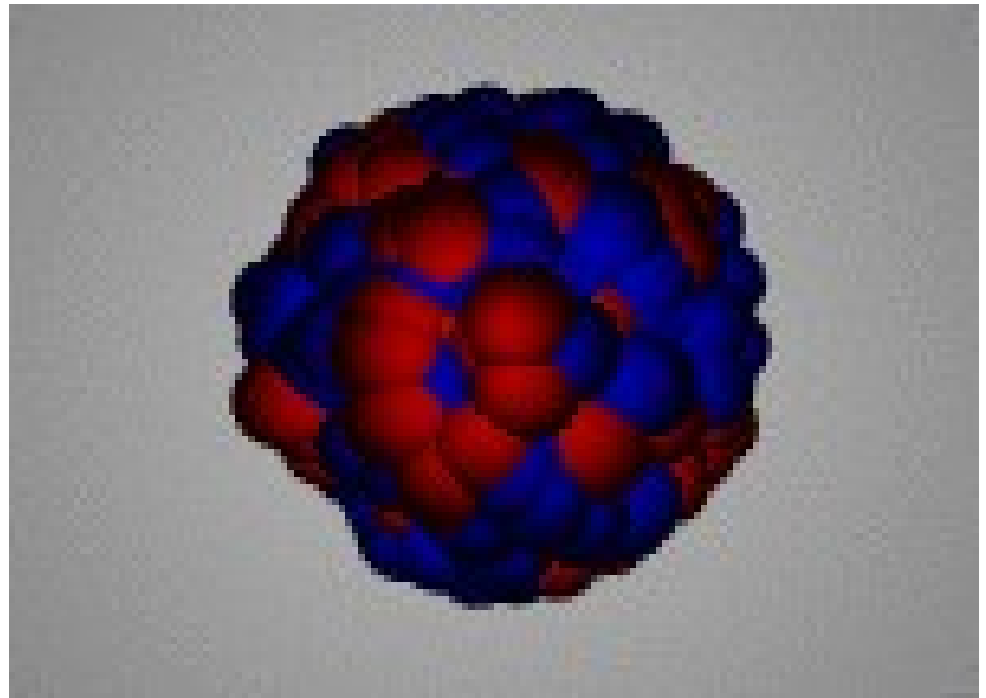
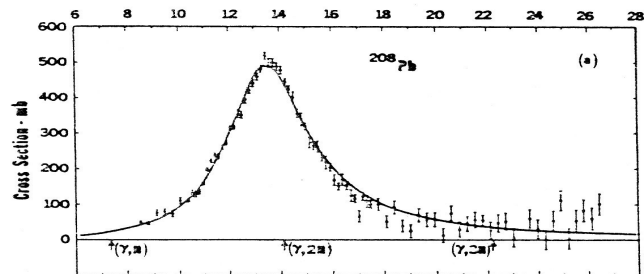
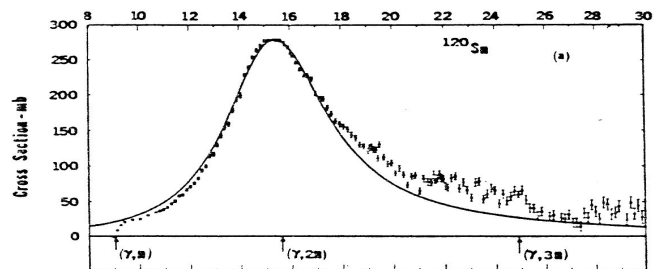
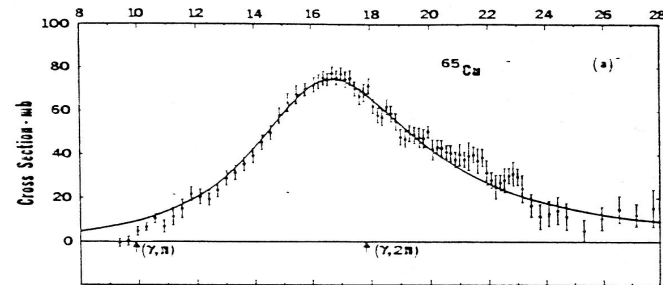


Figure 31: Realistic vibrational levels

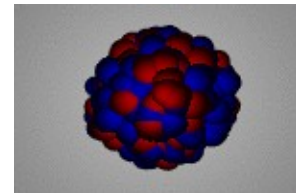
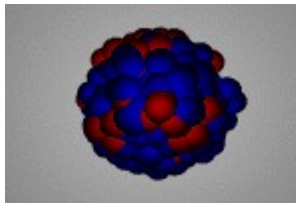
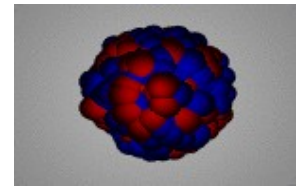
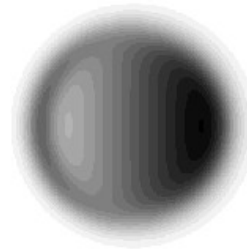
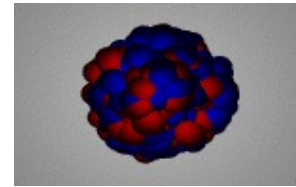
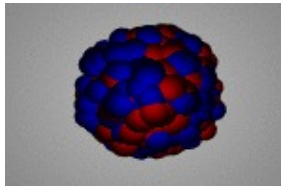
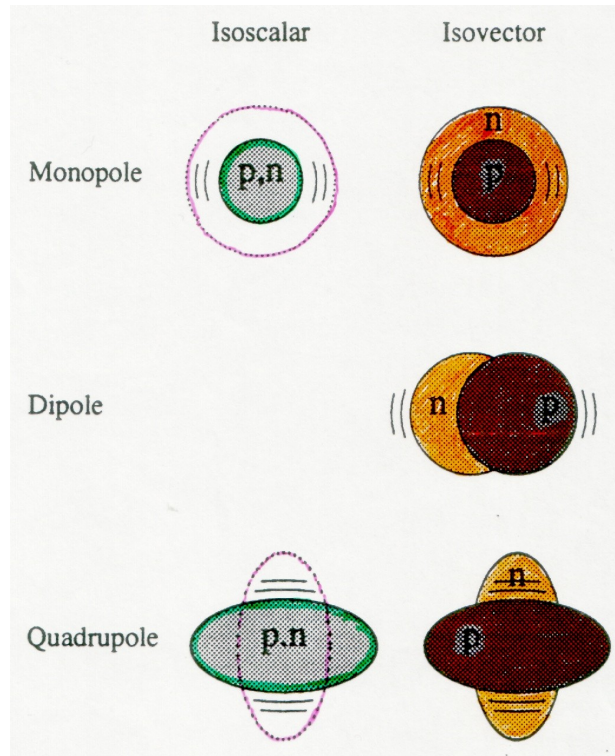


Óriásrezonanciák



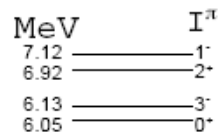
Goldhaber – Teller modell

Óriásrezonanciák osztályozása

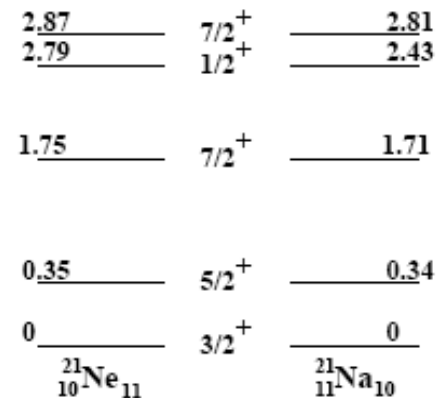
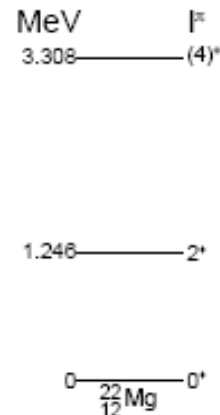
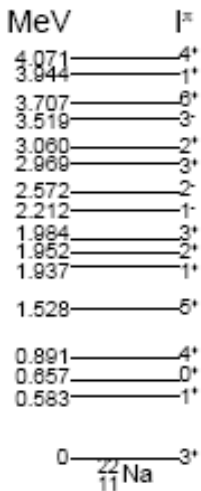
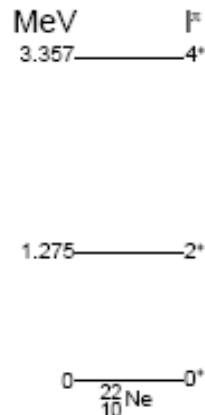


A folyadékcsepp modell hiányosságai

- A kötési energia függvény finomszerkezete az atomhoz hasonlóan héjszerkezetre utal. Különösen stabilak a 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 protont vagy neutron tartalmazó atommagok (mágikus számok)
- A legtöbb atommag gerjesztési energiaspektruma nem vibrációs

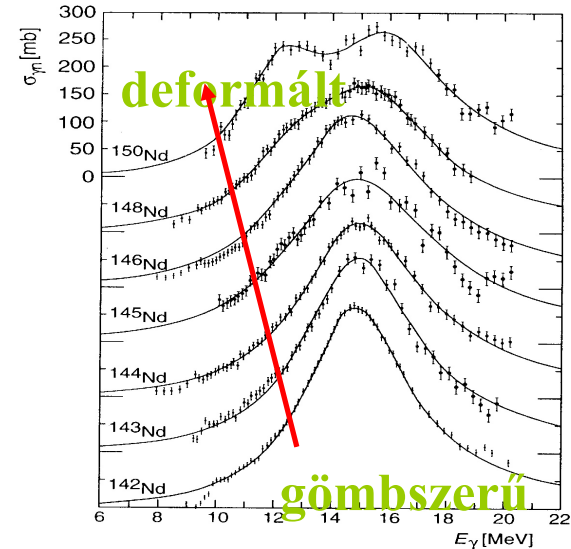
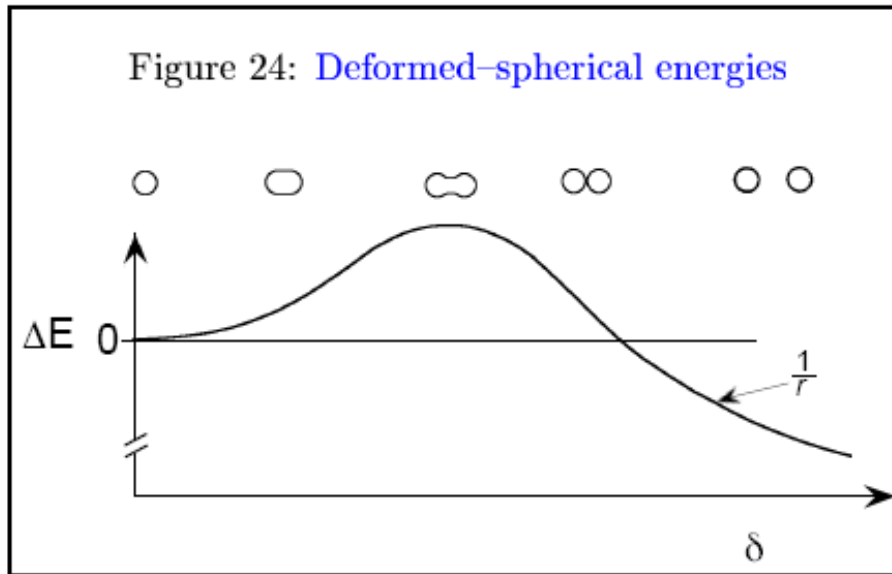


0 0^+
 $^{16}_8\text{O}$



A folyadékcsepp modell hiányosságai 2

$$E(\delta, A, Z) = -a_V A + a_S A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \delta^2\right) + a_C Z^2 A^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{5} \delta^2\right) \quad (85)$$



Léteznek deformált atommagok

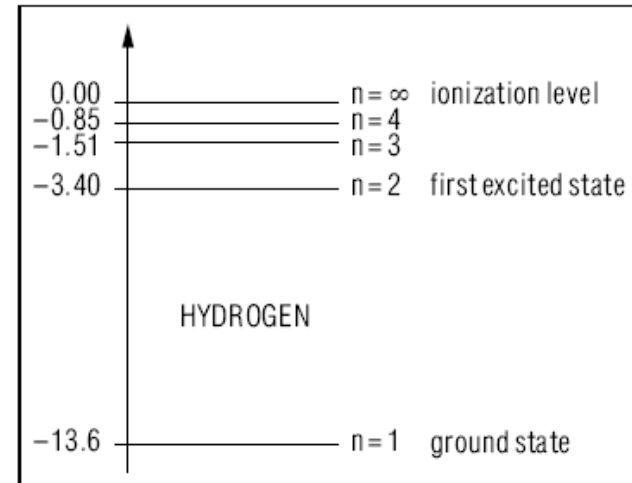
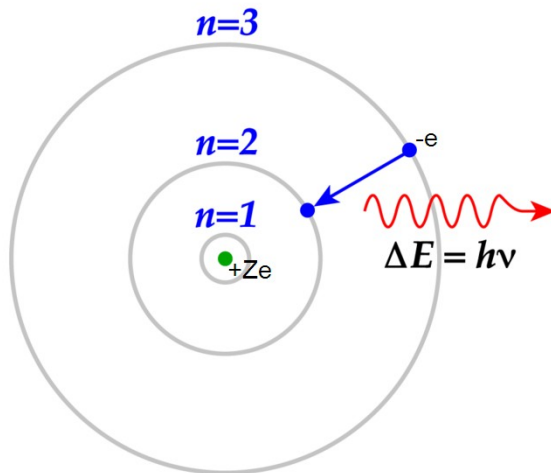


A töltött folyadékcsepp energiaminimuma a gömb alaknál van.

Magszerkezet modellek

Szférikus héjmodell

Héjszerkezet a hidrogén atomban (Bohr modell)



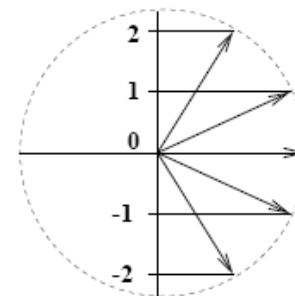
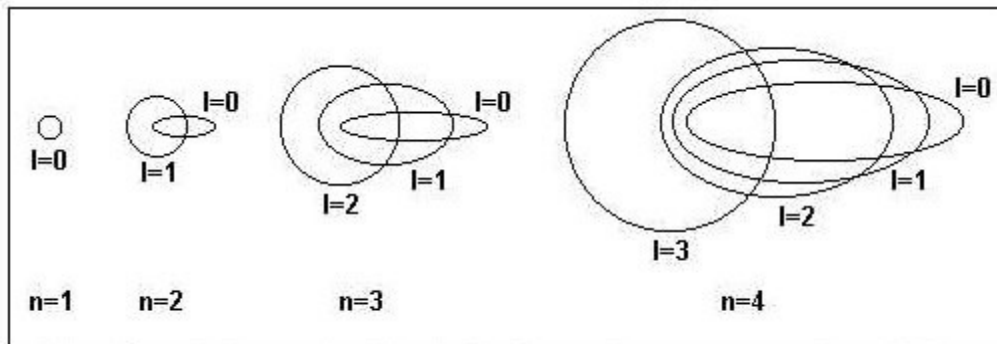
$$\frac{kq_e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad L = m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{kq_e^2}{r}$$

$$E_n = \frac{-m_e q_e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2}$$

Végtelen sok kötött állapot egyre csökkenő energia-közökkel

Héjszerkezet a hidrogén atomban (Sommerfeld modell)



The quantum numbers			The number of the quantum states	
n	l	ml	In the subshell	In the coat
1	0 (s)	0	2	2
2	0 (s)	0	2	8
	1 (p)	-1, 0, +1	6	
3	0 (s)	0	2	18
	1 (p)	-1, 0, +1	6	
	2 (d)	-2, -1, 0, +1, +2	10	
4	0 (s)	0	2	32
	1 (p)	-1, 0, +1	6	
	2 (d)	-2, -1, 0, +1, +2	10	
	3 (f)	-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3	14	

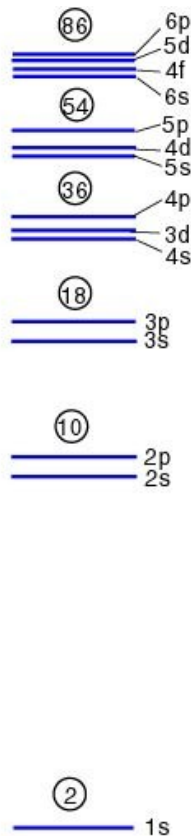
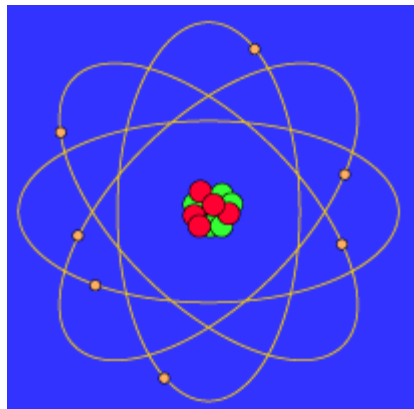
l az impulzusmomentum értékei: $0, \dots, (n-1)$

m az impulzusmomentum vetülete a z tengelyre értékei: $-l, \dots, 0, \dots, l$

A Schrödinger egyenlet egzakt megoldása is ugyanezt adja

Az energia ugyanaz mint a Bohr modellben. Csak az n -től függ.

Több elektronos atom



Shell Model of Atoms

Az egyes elektronokra hat

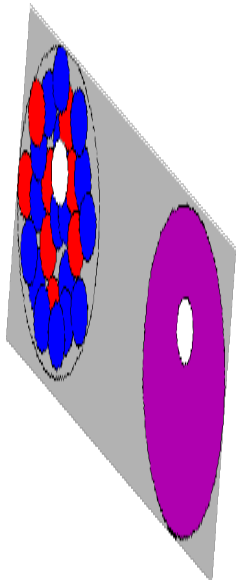
- az atommag Coulomb tere
- a többi elektron Coulomb tere

A többi elektron hatása egy átlagos térrel közelíthető

- Kisebb mint a mag tere
- Nem rontja el nagyon a héjszerkezetet

Az állapotok betöltődésénél a Pauli elv érvényesül.

Atommagok szférikus héjmodellje



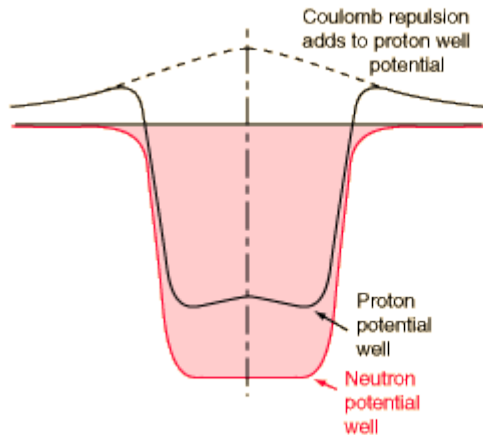
- Nincs centrális Coulomb tér mint az atomban
- A nukleon erősen kölcsönhat a környezetében levő nukleonokkal

A többi nukleon hatását mégis egy centrális átlagtérrel közelíthetjük, amiben a nukleon független mozgást végez.

Oka: a Pauli elv miatt megnő a szabad úthossz

Az átlagtérre kell meghatározni a lehetséges állapotokat, amik a Pauli elv érvényesülésével töltődnek be, mint az atomi elektronok esetén.

Az átlagtér megválasztása

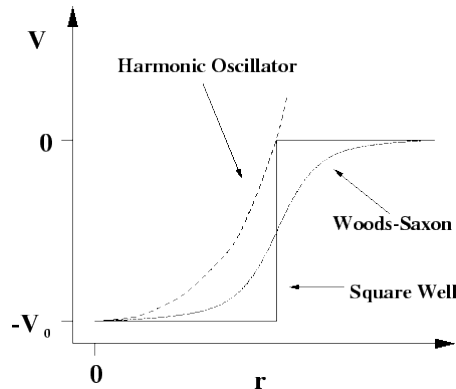


Kísérleti maganyag sűrűség: $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[\frac{r-R}{a}]}$

Realisztikus átlagpotenciál arányos a nukleon sűrűséggel:

$$V = -\frac{V_0}{1 + \exp[\frac{r-R}{a}]}$$

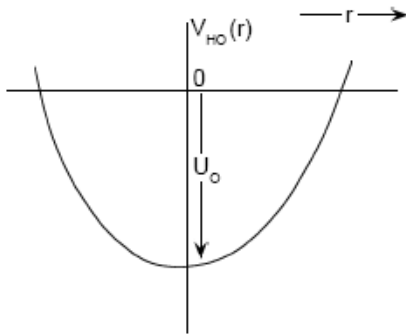
Woods-Saxon potenciál



A Woods-Saxon potenciállal nem oldható meg analitikusan a Schrödinger egyenlet.

A harmonikus oszcillátor és a derékszögű potenciál jó közelítésnek látszik.

Oscillátor potenciál állapotok „Bohr-típusú” megoldása



Bohr – féle
kvantálást
alkalmazva

Véges számú
állapot egyenlő
energiaközökkel

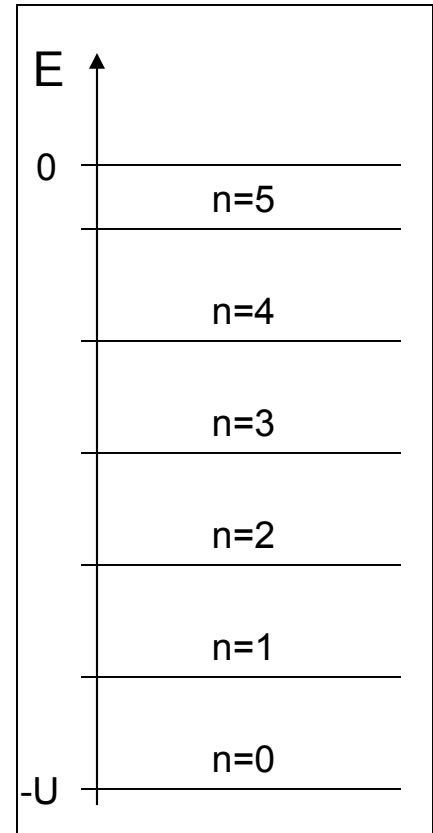
$$\frac{m v^2}{r} = D r \quad \text{és} \quad m v r = n \hbar$$

$$m^2 v^2 r^2 = D m r^4 = n^2 \hbar^2$$

$$r^4 = \frac{n^2 \hbar^2}{D m} \quad r^2 = \sqrt{\frac{n \hbar}{D m}}$$

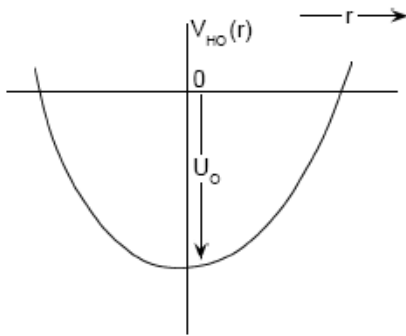
$$E = \frac{D r^2}{2} - U + \frac{m v^2}{2} = D r^2 - U$$

$$E = n \hbar \sqrt{\frac{D}{m}} - U = n \hbar \omega - U$$



Oszcillátor potenciál egzakt megoldása

Schrödinger egyenlet radiális része:



$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + U_0 - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R(r) = 0$$

megoldás:

$$E = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) - U_0$$

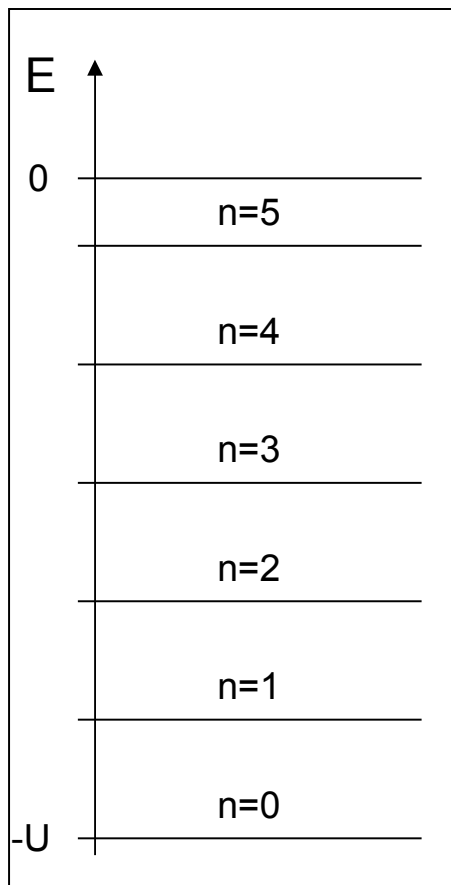
$$2(n-1) + \ell = N, \quad N \geq 0, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq \ell \leq N$$

Az energia ugyanaz plusz a nullponti energia

Az első három kísérleti héjlezáródást jól adja, de a többit nem

N	n	ℓ	$n(\ell)$	$2(2\ell+1)$	total
0	1	0	1s	2	2
1	1	1	1p	6	8
2	2,1	0,2	2s,1d	2+10	20
3	2,1	1,3	2p,1f	6+14	40
4	3,2,1	0,2,4	3s,2d,1g	2+10+18	70
5	3,2,1	1,3,5	3p,2f,1h	6+14+22	112

Woods-Saxon potenciál



W-S

1g —

2p 40

1f —

2s 20
1d —

1p 8

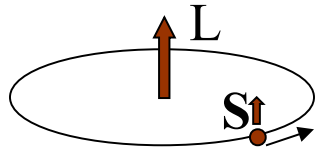
1s 2

Ugyanazokat a héjlezáródásokat adja, mint az oszcillátor potenciál

Nem egyezik a kísérlettel

N	n	ℓ	$n(\ell)$	$2(2\ell + 1)$	total
0	1	0	1s	2	2
1	1	1	1p	6	8
2	2,1	0,2	2s,1d	2+10	20
3	2,1	1,3	2p,1f	6+14	40
4	3,2,1	0,2,4	3s,2d,1g	2+10+18	70
5	3,2,1	1,3,5	3p,2f,1h	6+14+22	112

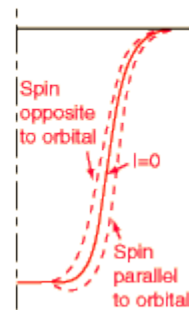
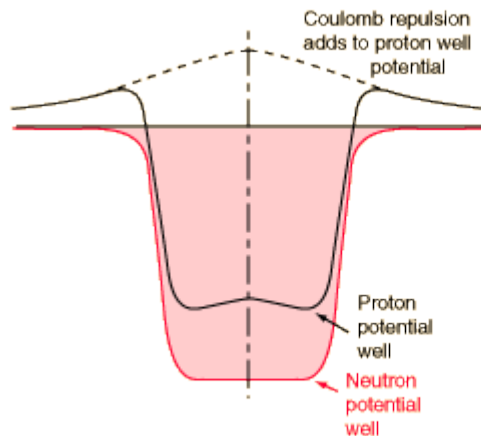
Spin-pálya kölcsönhatás



$$\frac{e}{c^2 m^2 r} \frac{dU}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

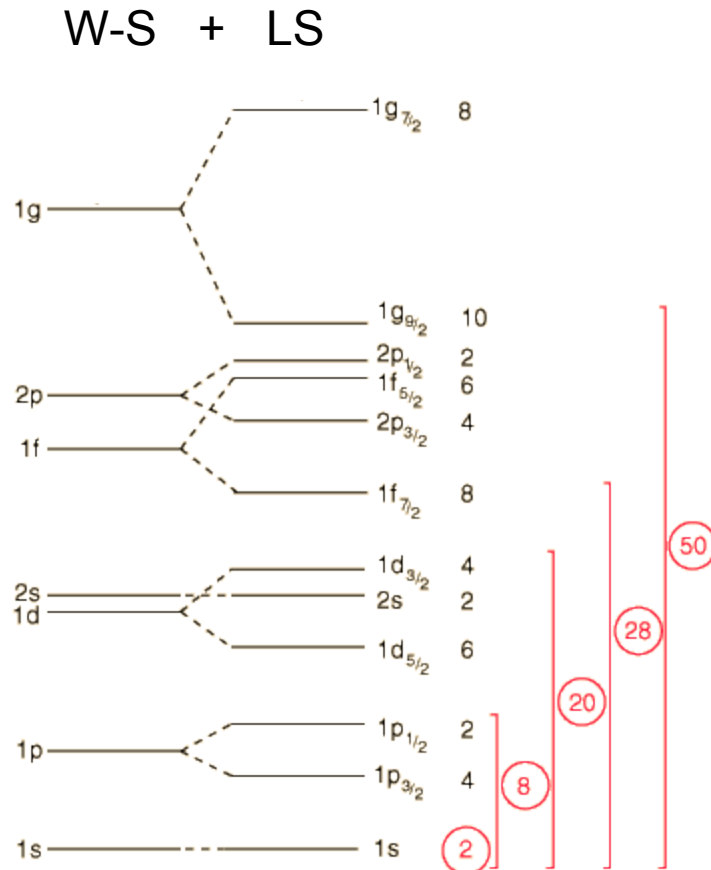
Elektron esetén a Dirac egyenlet következménye

$$V_{WS}(r) = \frac{U_0}{t} + \frac{U_{\ell s}}{r_0^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{t} \right) \underline{\ell} \cdot \underline{s} \quad t = 1 + \exp[(r - R_0)/a]$$



Az atommag esetén a spin-pálya kölcsönhatás nem vezethető le az elméletből. Az erősségét a kísérleti eredményekhez illesztjük.

Energiaspektrum spin-pálya kölcsönhatással



$$\underline{\underline{\ell \cdot s}} = \frac{\hbar^2}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right]$$

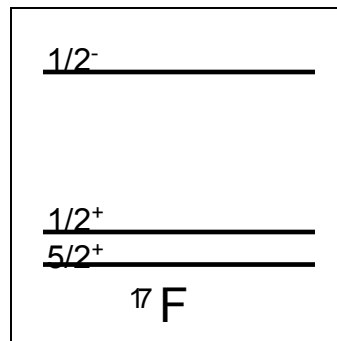
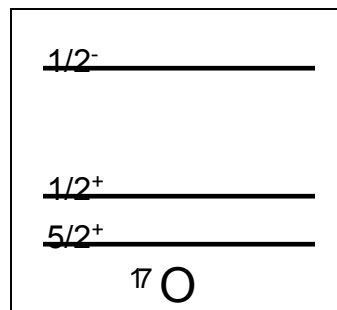
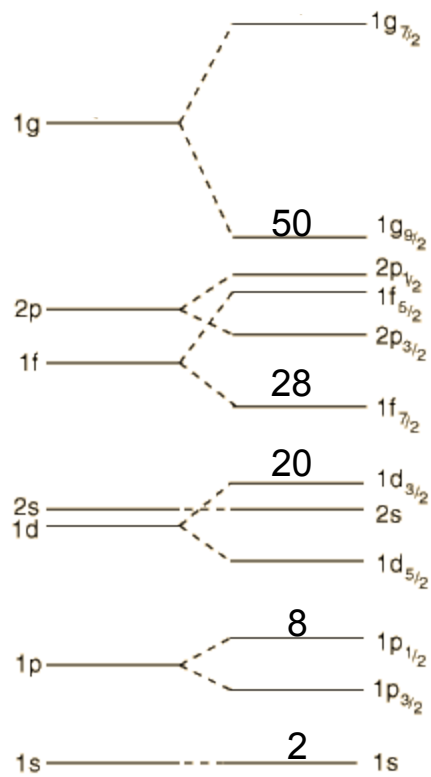
$$-\alpha \ell \quad \text{if} \quad j = \ell + \frac{1}{2}$$

$$+\alpha(\ell+1) \quad \text{if} \quad j = \ell - \frac{1}{2}$$

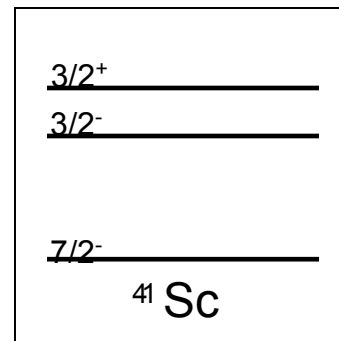
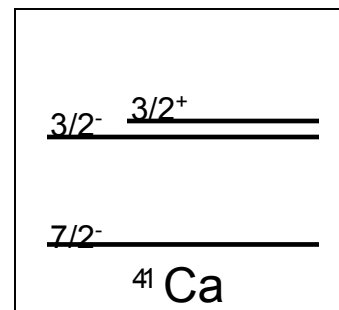
Reprodukálja a kísérleti
héjlezáródásokat.

A stabilitási sávtól távol mások lehetnek a mágikus számok.
Pl. nagyon neutrontúsz magokban
8 és 20 helyett 6 és 16

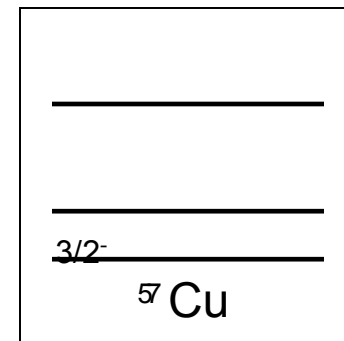
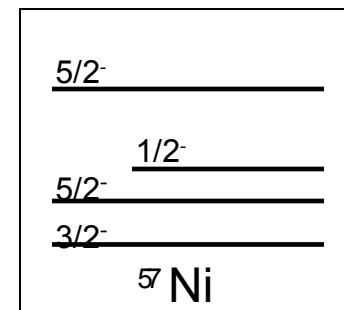
Zárt héj + egy nukleon (energia)



Z=8, N=8



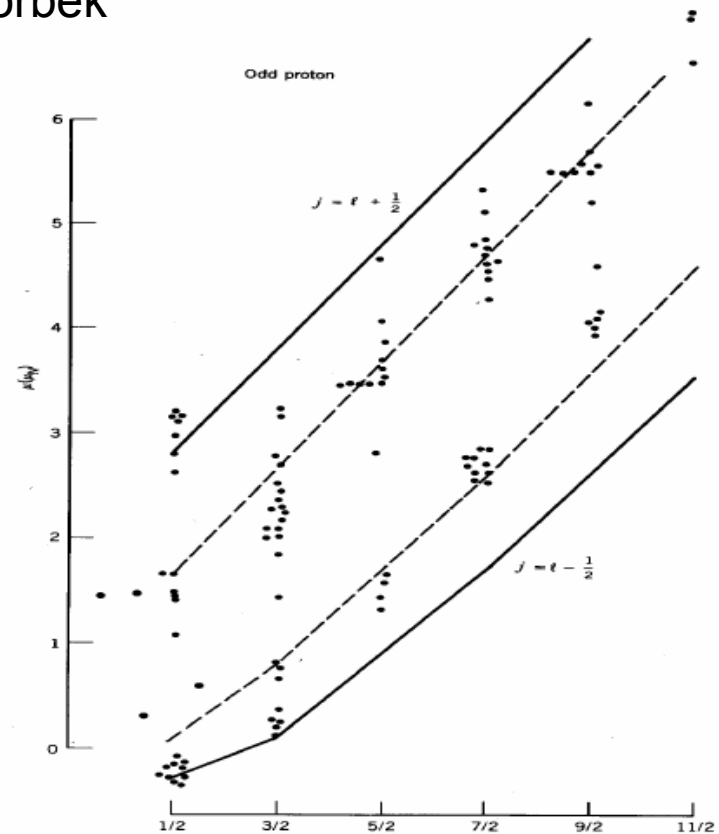
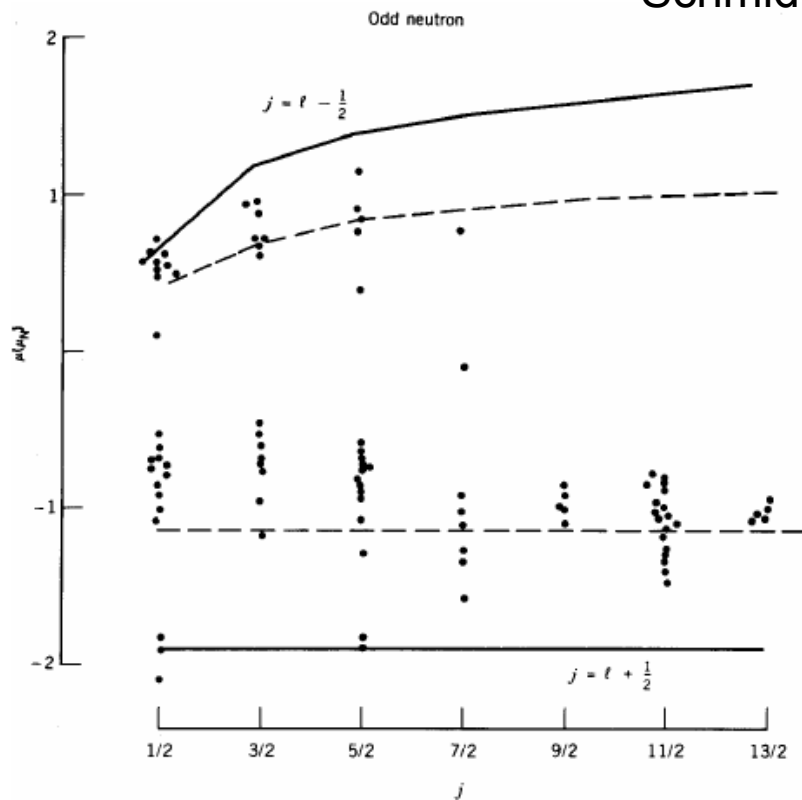
Z=20, N=20



Z=28, N=28

Zárt héj + egy nukleon (mágneses dipol momentum)

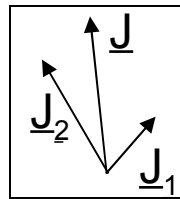
Schmidt görbék



Zárt héj + több nukleon

A Pauli elv figyelembevételével a legkisebb energiájú állapotok töltődnek be. Figyelembe kell venni a nukleonok közti maradékkölcsönhatást.

Két nukleon különböző
héjmodell pályán:
pl. proton-neutron

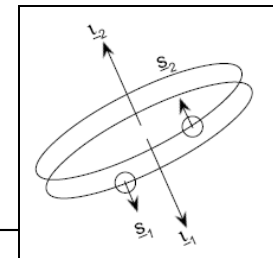
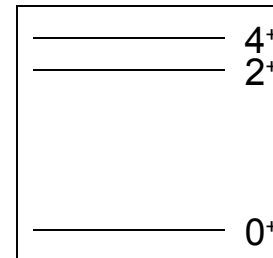


- J lehetséges értékei: $J = J_2 - J_1, \dots, J_2 + J_1$
- A különböző J értékekhez tartozó energiák a kölcsönhatás miatt különbözőek lesznek
- Multipliett állapotok

Párákölcsönhatás: két egyforma nukleon
ugyanazon a héjmodell pályán:

J lehetséges értékei: $J = 0, 2, 4, \dots, (2J-1)$

Páros-páros magok alapállapota mindig 0^+

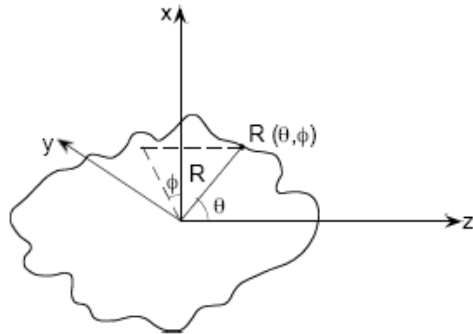


Ha sok valencianukleon-pár van a zárt héjon kívül, akkor deformálja az átlagpotenciált. Eltér a gömb alaktól.

Magszerkezet modellek

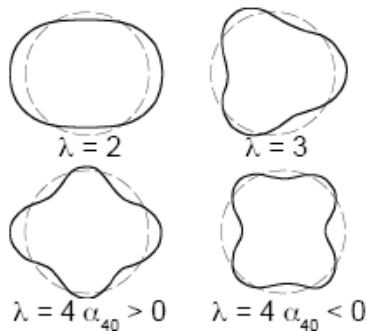
Deformált héjmodell,
Kollektív modell

Mag deformáció jellemzése



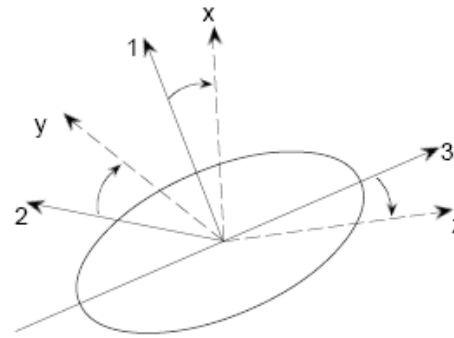
$$R = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right]$$

Általános alak



$$R = R_0 \left[1 + \sum_{\mu=-2}^2 a_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right]$$

Kvadrupol
deformáció



$$a_{21} = a_{2-1} = 0$$

$$a_{22} = a_{2-2}$$

$$a_{20} = \beta \sin \gamma$$

$$a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma$$

$$\delta R_K = R_K - R_0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} R_0 \beta \cos \left(\gamma - K \frac{2\pi}{3} \right)$$

ha $\gamma = 0$

$$\delta R_{1,2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} R_0 \beta \quad \delta R_3 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} R_0 \beta$$

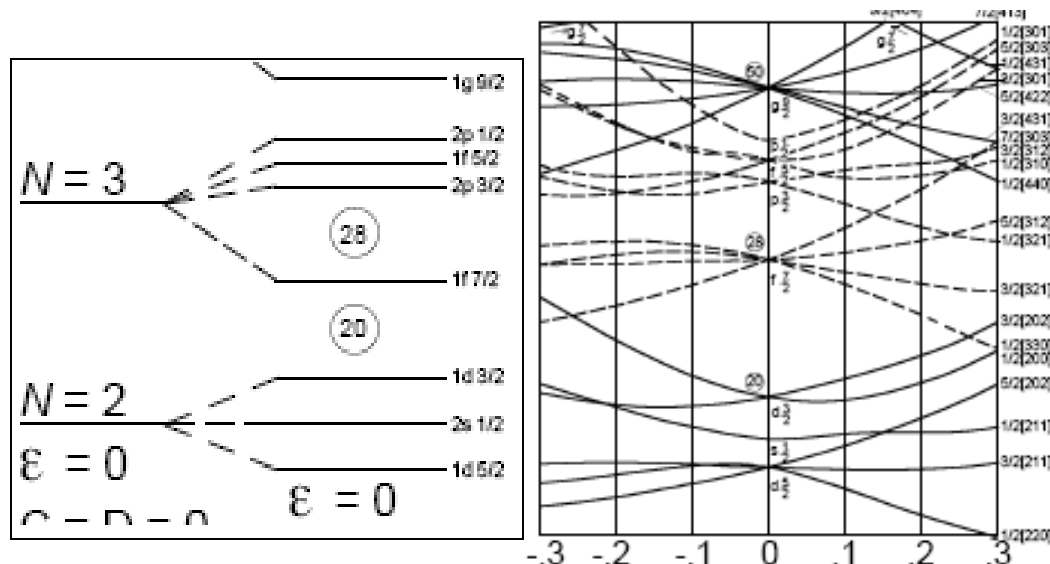
A héjmodell általánosítása deformált átlagtérrel

Nilsson modell: az oszcillátor potenciál általánosítása.

$$V(r) = \frac{1}{2}m \left(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2 \right) - C \underline{\ell} \cdot \underline{s} - D \underline{\ell}^2 \quad \omega_K R_K = \omega_0 R_0$$

tengelyesen szimmetrikus esetben: $\varepsilon = (\omega_{1,2} - \omega_3)/\omega_0$ $\varepsilon \approx \beta$

Nem oldható meg analitikusan

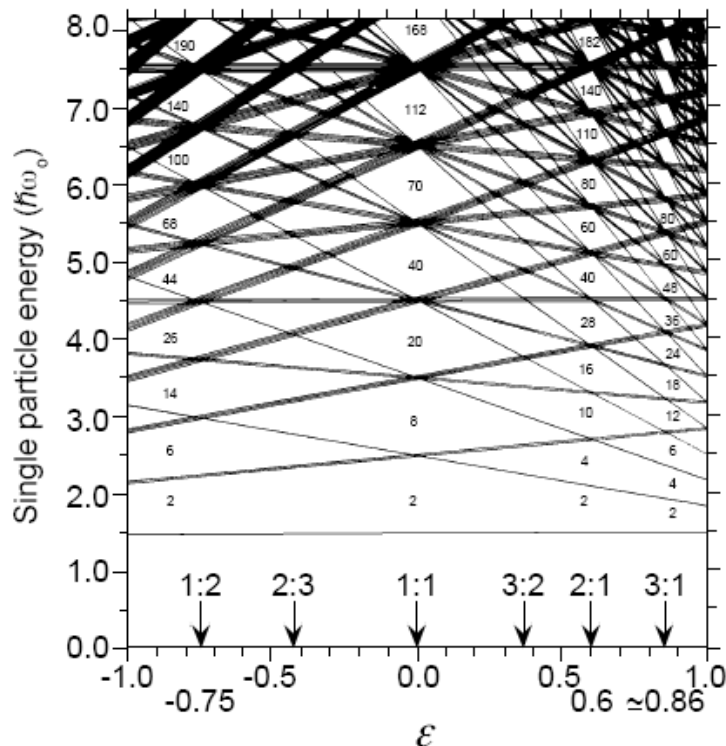


Az állapotok energiái az impulzusmomentum z komponensének abszolút értéke szerint szétválnak.

Asszimptotikus kvantumszámok

$$\Omega^\pi [N n_3 \Lambda]$$

Nagy deformációk



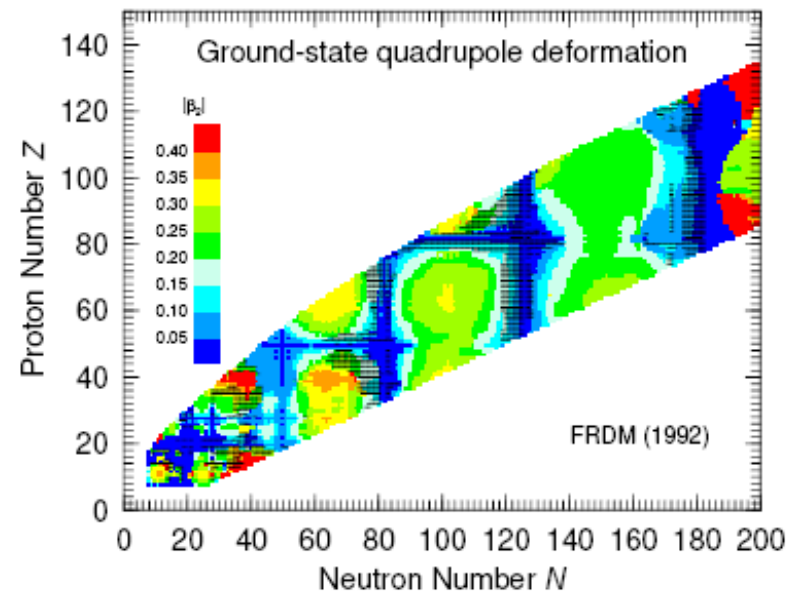
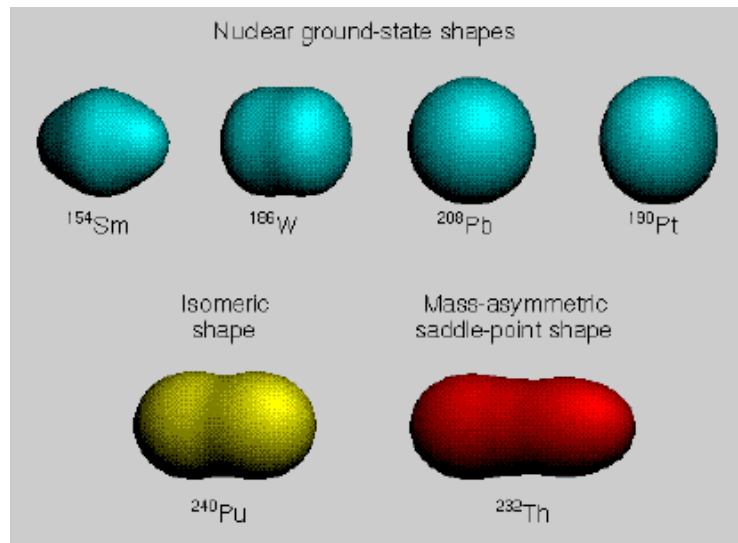
$$V(r) = \frac{1}{2}m \left(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2 \right) - \cancel{CL_2} - \cancel{D\ell^2}$$

$$\begin{aligned} & \hbar\omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_3 \left(n_3 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \left[\left(N + \frac{3}{2} \right) - \varepsilon \left(n_3 - \frac{N}{3} \right) + \frac{1}{9} \varepsilon^2 \left(N + \frac{3}{2} \right) \right] \hbar\omega_0 \end{aligned}$$

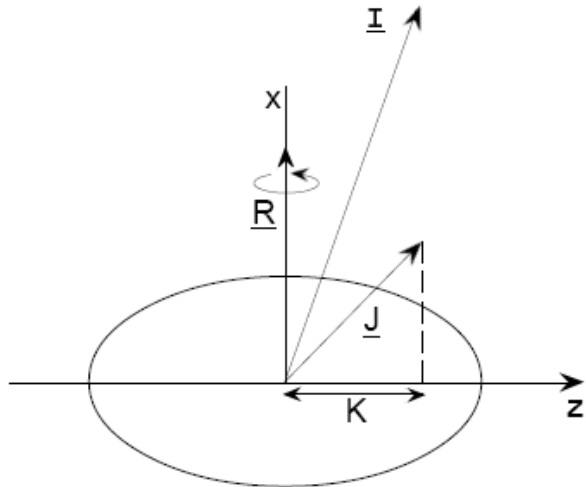
2:1 – superdeformáció
(Nyakó Barna ATOMKI)

3:1 – hiperdeformáció
(Krasznahorkay Attila ATOMKI)

Elméleti deformációk



Deformált atommagok forgása



$\underline{J}$ a valencia nukleonok impulzusmomentuma, K ennek a z irányú vetülete

$$H_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} R^2 = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} (\underline{I} - \underline{J})^2$$

$$(\underline{I} - \underline{J})^2 = \underline{I}^2 - 2\underline{I} \cdot \underline{J} + \underline{J}^2 = \underline{I}^2 + \underline{J}^2 - 2K^2 - (I_+ J_- + I_- J_+)$$

ahol $I_{\pm} = I_x \pm iI_y$, $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$

A gömbszerű atommag a kvantummechanika szerint nem foroghat a, de a deformált már igen.

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} [I(I+1) + J(J+1) - 2K^2]$$

$$I = K, K+1, K+2, \dots$$

14⁺ 1482.5

12⁺ 1137.1

10⁺ 826.8

8⁺ 556.9

6⁺ 333.2

4⁺ 162.0

2⁺ 49.4

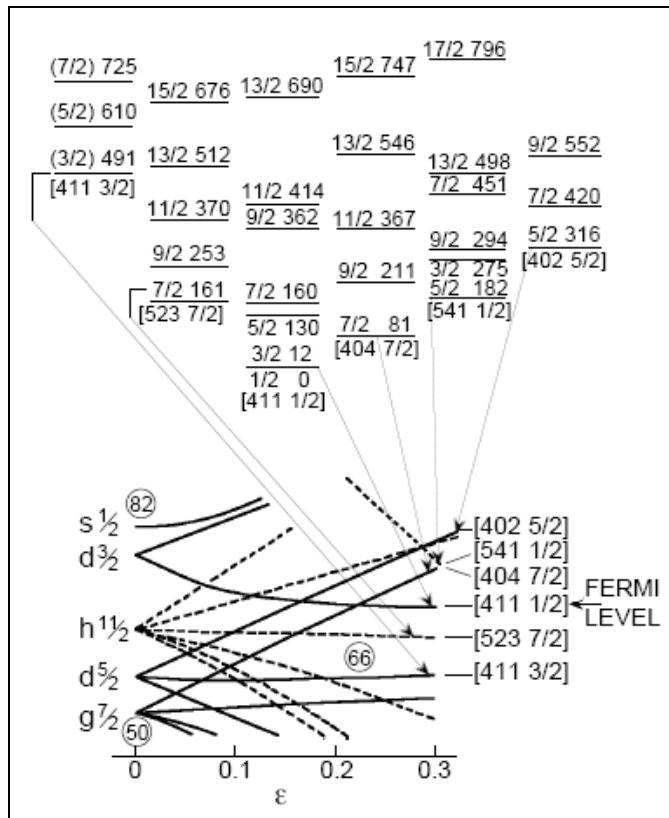
0⁺ 0

²³²Th

Páros-páros magok esetén $J=0$ és $K=0$

Forgási sáv

Forgó atommag energiaállapotai (egyesített magmodell)

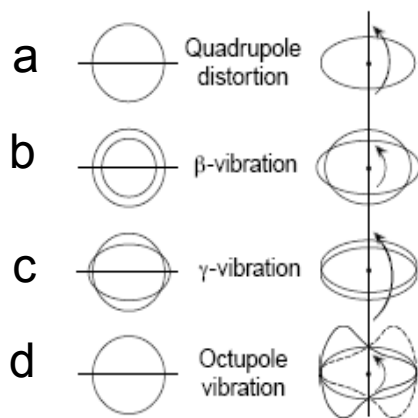


- A Nilsson modellel kiszámítjuk a valencia nukleon energiáját és K értékét.
- Hozzáadjuk a forgási energia-spektrumot.

A deformált páratlan atommagok forgási állapotai azonosíthatók.

A forgás és a vibráció kölcsönhatása

- A deformált atommag egyszerre végezhet vibrációs és forgó mozgást.
- A vibrációhoz tartozó forgási sáv lehetséges spin és paritás értékei a vibráció formájától függnek.



d	a	b	c
11 ⁻ 1498.8	14 ⁺ 1482.5	10 ⁺ 1487.5	11 ⁺ ~1641
9 ⁻ 1249.6			10 ⁺ 1513.0
7 ⁻ 1043.1	12 ⁺ 1137.1	9 ⁺ 1222.3	9 ⁺ ~1371
5 ⁻ 883.8		8 ⁺ 1023.4	8 ⁺ 1280.7
3 ⁻ 774.5	10 ⁺ 826.8	4 ⁺ 873.1	7 ⁺ ~1142
1 ⁻ 714.3	8 ⁺ 556.9	2 ⁺ 774.5	6 ⁺ 1051.2
		0 ⁺ 730.6	5 ⁺ 980.3
			4 ⁺ 890.5
			3 ⁺ 829.7
			2 ⁺ 785.5
0 ⁻	6 ⁺ 333.2	0 ⁺	2 ⁺
	4 ⁺ 182.0		
	2 ⁺ 49.4		
	0 ⁺ 0		

Magszerkezet modellek

További speciális modellek

Forgatott (kurblis) héjmodell

A deformált atommaggal együtt forgó vonatkoztatási rendszerben oldja meg a Schrödinger egyenletet.

$H^\omega = H_{\text{DSM}} - \omega \hat{I}_x$ Routh operátor a H_{DSM} Hamilton operátor helyett

$$E^\omega = E - \omega \langle \hat{I}_x \rangle$$

Előnye: figyelembe tudja venni a magalak változását a forgás szögsebességének változása során.

Hátránya: a kísérleti értékeket nem a forgó, hanem a laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben kapjuk, ezért nehézkes az összehasonlítás. Pl. a kurblis modellben az impulzusmomentum nem jó kvantumszám.

Kölcsönható bozon modell (IBM)

Sok valencianukleon esetén a héjmodellben nagyon sok lehetséges állapotot kellene figyelembe venni.

Páros-páros atommagok alacsonyan gerjesztett állapotaiban a héjmodell Szerint a nukleonok 0 vagy 2 impulzusmomentumú párokba rendeződnek.

Ezek az S és D bozonok. A modell csak az ilyen állapotokat veszi figyelembe. Ez sokkal kevesebb mint a héjmodell állapotok száma.

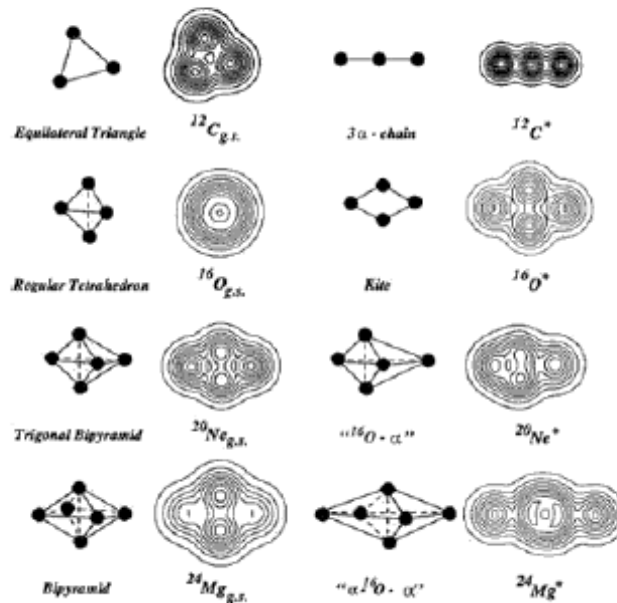
Pl. a ^{154}Sm -nak 10^{14} 2^+ állapota van a héjmodellben, míg az IBM-ben csak 26. Ez már kezelhető a numerikus számításokban.

Kevés paraméterrel jól le tudja írni a sok valencianukleont tartalmazó atommagok alacsony energiájú gerjesztett állapotait.

Hátránya: nem szemléletes.

Csomómodellek

Figure 83: Bloch-Brink cluster model



Bizonyos atommagoknak vannak olyan állapotai, amikben az atommag alfa részecskékből áll össze különböző elrendezésben.