A PERMUTÁCIÓK PROFILJÁRÓL.*

ANDRÉ[1] nyomán SCHRUTKA[2] bevezette a permutációk részére az úgynevezett *profil* fogalmát a következő értelmezéssel. Tekintsük n számú különböző elemnek valamely

$$A = a_1 \dots a_n \tag{1}$$

permutációját. Ebben a szomszédos a_i, a_{i+1} $(i=1,\dots,n-1)$ elemek közé írjunk $\rightarrow$ vagy $\leftarrow$ jelt a szerint, amint ez az elempár nincs inverzióban vagy inverzióban van. A $\rightarrow$, $\leftarrow$ jeleknek így előálló

$$\Pi = \pi_1 \dots \pi_p \quad {\scriptstyle (p=n-1)} \tag{2}$$

sorozatát az A permutáció profiljának nevezzük. (SCHRUTKA a $\rightarrow$, $\leftarrow$ jelek helyett $/$, $\backslash$ jeleket használ, s megfelelőleg «emelkedésről» és «sűlyedésről» beszél; ugyancsak alkalmazza a 0, 1 jeleket, ami által a profil diadikus számmal adható meg.) Ha $p=0$, akkor a profil az «üres» sorozat, jele: $\Pi=0$. Világos, hogy n számú elem permutációi profiljaik szerint 2^{n-1} számú különböző osztályba sorolhatók. Jelöljük $N(\Pi)$-vel a Π profilú permutációk számát. Könnyű látni, hogy $N(\Pi)$ nem változik, ha Π elemeit fordított sorrendben írjuk, vagy ha Π minden egyes eleme helyett a fordított elemet tesszük. Jegyezzük meg, hogy $N(\rightarrow\rightarrow\cdots\rightarrow) = N(\leftarrow\leftarrow\cdots\leftarrow) = 1$, s különösen $N(0) = 1$.

---

* A szerző, WALDAPFEL LÁSZLÓ okleveles középiskolai tanár honvédelmi munkaszolgálata teljesítése közben a keleti fronton 1942. dec. 11.-én 31 éves korában elesett. Lapunknak beküldött első és egyben utolsó dolgozatát RÉDEI LÁSZLÓ volt szíves az itt következő végleges alakra átírni. *Szerk.*

[1] D. ANDRÉ, Journ. d. math. (3) **7** (1881), 167—184. L. ehhez még E. NETTO, Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig, 1901, 60—63. §.

[2] L. v. SCHRUTKA, Eine neue Einteilung der Permutationen. Math. Ann. **118** (1941), 246—250.

SCHRUTKA[2] megoldja azt a kérdést, hogy n elemnek hány olyan permutációja van, amelyek profiljában a $\rightarrow$ jelek száma (s így egyben a $\leftarrow$ jelek száma is) adott, de a profilt magát figyelmen kívül hagyja. ANDRÉ[1] meghatározza az $N(\Pi)$-t a

$$\Pi = \rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\cdots \tag{3}$$

különös esetben (a megfelelő permutációkat alternálóknak nevezi). Mi az $N(\Pi)$ számossággal az általános esetben foglalkozunk, mégpedig számára megállapitunk egy egyszerű rekurzív képletet [l. az alábbi (6)-ot].

Céljainkhoz tekintsük a Π profilt előre adottnak, s vegyük ezt fel ismét a (2) alakban. Akkor p a Π elemeinek a száma, míg a tekintetbe jövő permutációk elemszáma $n=p+1$. Elég lesz a $p\geq 1$ esetet tekinteni. Az (1) permutációból és a (2) profilból összeállítjuk az

$$(A\Pi) = a_1\pi_1\ldots a_{i-1}\pi_{i-1}a_i\pi_i a_{i+1}\ldots\pi_p a_{p+1} \tag{4}$$

sorozatot. Azt fogjuk mondani, hogy az a_i *ütközőpontban* van, ha a (4)-ben csak olyan szomszédos eleme van, ami (t. i. az illető nyíl) feléje mutat; magát azt a helyet, ahol egy ilyen a_i áll, *ütközőpontnak* nevezzük. Utóbbiak kizárólag a Π profiltól függenek; a számuk legyen r, ami tehát biztosan ≥ 1. Ezeknek megvilágítására szolgáljon a következő példa:

$$\bullet\leftarrow\leftarrow\rightarrow\bullet\leftarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\bullet\leftarrow\leftarrow\rightarrow\bullet, \tag{5}$$

ahol feltüntettük a Π elemeit, és az ütközőpontokat «$\bullet$» ponttal megjelöltük; ebben a példában $p=10$, $r=4$. Általában a k-dik ütközőpontot előzze meg a Π-nek p_k számú tagja. Nevezzük a k-dik ütközőpont *környezetének* a szomszédos π_i-k halmazát, ami tehát egy vagy két elemből áll. Végül a Π-nek a k-dik ütközőpont környezete előtt és után álló elemei a Π-nek egy-egy részsorozatát alkotják, amiket Π'_k-vel és Π''_k-vel jelölünk, s ezeket ismét profilokul tekintjük, elemszámaik összege $p-1$ vagy $p-2$. Természetesen Π'_1 és Π'_r lehetnek üresek, mint az (5) példában. Ezekután a fent bejelentett rekurzív képlet így szól:

$$N(\Pi) = \sum_{k=1}^{r}\binom{p}{p_k}N(\Pi'_k)N(\Pi''_k). \tag{6}$$

A bizonyítás előtt megjegyezzük, hogy ha különösen a Π-ben a $\rightarrow$, $\leftarrow$ jelek nem keverednek, s az előbbiek száma $s(=0, 1, \ldots, p)$, az utóbbiaké $t(=p-s)$, akkor egyszerűen

$$N(\Pi)=\binom{p}{s}\left[=\binom{p}{t}\right]. \tag{7}$$

Ugyanis most vagy $\Pi = \rightarrow \cdots \rightarrow \leftarrow \cdots \leftarrow$ (tehát $r=1$), s erre az esetre a (6) a fent tett megjegyzések szerint közvetlenül kiadja a (7)-et, vagy $\Pi = \leftarrow \cdots \leftarrow \rightarrow \cdots \rightarrow$, s ebben az esetben a Π elemeinek sorrendjét megfordítva, ismét előáll a (7). Az általános esetben is az $N(\Pi)$-nek a (6) ismételt alkalmazásával való kiszámítása megkönnyíthető, ha e közben alkalom nyílik a (7) felhasználására. Például a $\Pi = \bullet \leftarrow \leftarrow \rightarrow \rightarrow \bullet \leftarrow \leftarrow$ esetben (6) [és $N(0)=1$] szerint:

$$N(\Pi)=N(\bullet \leftarrow \rightarrow \rightarrow \bullet \leftarrow \leftarrow)+\binom{6}{4}N(\leftarrow \leftarrow \rightarrow)N(\leftarrow).$$

A jobboldal első tagja:

$$N(\rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow)+\binom{5}{3}N(\leftarrow \rightarrow)N(\leftarrow).$$

Ezekből (7) szerint:

$$N(\Pi)=\binom{4}{2}+\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{6}{4}\binom{3}{2}\binom{1}{1}=71.$$

Ugyancsak még a (6) bizonyítása előtt alkalmazásként tekintsük André példáját, t. i. a (3) esetet. Most $N(\Pi)$ helyett röviden N_p-t írva, előáll

$$N_p=\sum \binom{p}{l} N_{l-1}N_{p-l-1}, \tag{8}$$

ahol l befutja az $1, \ldots, p$ sorozat páratlan tagjait és (páratlan p esetében) $N_{-1}=1$ értendő (természetesen ugyancsak $N_0=N_1=1$). André[1] ebből a (8) képletből további érdekes megállapításokat is nyer.

Most már elvégezzük a (6) bizonyítását. Tekintsük ehhez a Π profilú A permutációkat, s egyben a megfelelő $(A\Pi)$ sorozatokat. Egyszerűség kedvéért feltehető, hogy a permutálandó elemek $1, \ldots, n(=p+1)$. Minthogy az n előtte álló elemmel nem lehet inverzióban, ellenben bármely utána álló elemmel inverziót alkot, azért biztos, hogy n csak ütközőpontban szerepelhet. Tegyük fel, hogy n a k-dik ütközőpontban van. Akkor előtte az A-nak pontosan p számú eleme áll (t. i. ugyanannyi, mint ahány eleme Π-nek van a k-dik ütközőpont előtt), s így ezek az elemek a hátralevő elemek közül $\left[\binom{n-1}{p_k}=\right]\binom{p}{p_k}$-féleképpen választhatók (eltekintve az elemek sorrendjétől), egyszersmind azonban kell, hogy ezek Π_k' profilú permutációt alkossanak, az n után álló $(n-1-p_k)=p-p_k$ számú elem pedig Π_k'' profilú permutációt.

Fordítva, ha az $1,\ldots,p(=n-1)$ elemek közül kiválasztunk p_k számút (ahol $k=1,\ldots,r$), s ezeket Π_k' profilú permutációba rendezzük, s utánuk írjuk az n-t, végül még a hátralevő elemeket Π_k'' profilú permutációba rendezve, akkor Π profilú permutáció áll elő. Ezekkel a (6)-ot bebizonyítottuk.

Waldapfel László.

Rédei László megjegyzése a fenti dolgozathoz. Permutálandó elemekként szerepeljenek egy $n(=p+1)$-szögpontú irányított teljes G gráf szögpontjai. Akkor az (1) permutáció meghatározza a G-nek egy p-oldalú poligon részét az a_1a_2, $a_2a_3,\ldots,$ a_pa_{p+1} oldalakkal. Legyen $\pi_i(i=1,\ldots,p)$ úgy értelmezve, hogy $\pi_i=\rightarrow$, ha az a_ia_{i+1} oldal irányítása (a G-ben) az «a_i-ből a_{i+1}-be» haladási iránnyal megegyező, míg $\pi_i=\leftarrow$, ha ez a két irány ellenkező. Ezután a (2)-beli Π-t ismét profilnak nevezhetjük (pontosabban: Π az A permutációnak a G irányított gráfra vonatkoztatott profilja). Megfelelőleg az $N(\Pi)$ helyett beszélhetünk az $N(\Pi, G)$ számosságról. Ha mármost a G összes lehetséges irányításai közül a képzelhető legegyszerűbb esetre szorítkozunk, amelyben ugyanis a G egyik szögpontjából csak kifelé irányuló élek vezetnek, egy második szögpontból a még hátralevő szögpontokba ismét csak kifelé irányuló élek visznek, és így tovább (az úgynevezett «tranzitív irányítású» gráf), akkor az imént értelmezett általánosabb profil ebben a különös esetben egyező a dolgozatban tekintett esettel. Ha pedig mintegy másik végletként a G irányítását nem korlátozzuk, ellenben csupán a legegyszerűbb $\Pi=\rightarrow\rightarrow\cdots\rightarrow$ profilra szorítkozunk, akkor az első ízben általam[3] vizsgált «ren-

[3] L. Rédei, Ein kombinatorischer Satz, Acta Sc. Math. (Szeged), 7 (1934), 39—43.

dezett permutációk» fogalmára jutunk. Ezekkel részletekbe menően foglalkozik SZELE.[4] Valószínűnek látszik, hogy WALDAPFELnek fenti dolgozatban nyert eredménye is továbbiakkal bővíthető. A legáltalánosabb $N(\Pi, G)$ számosság kérdésével bizonyára még senki sem foglalkozott.

ÜBER DAS PROFIL DER PERMUTATIONEN.

Wir definieren das Profil einer Permutation $A = a_1 \ldots a_n$ von $n (= p+1)$ Elementen im wesentlichen nach SCHRUTKA[2] so. Man nehme (in waagerechter Lage) eine Strecke, teile sie in p gleiche Teilstrecken, versehe sie (von links nach rechts fortschreitend) der Reihe nach mit einem Pfeil $\rightarrow$ oder $\leftarrow$, je nachdem in A die Elemente a_i, a_{i+1} in keiner Inversion bzw. in einer Inversion stehen ($i = 1, \ldots, p$). Die Folge $\Pi = \pi_1 \ldots \pi_p$ dieser Pfeile heisst dann das Profil von A. (Das «leere» Profil $\Pi = 0$ entspricht dem Fall $p = 0$). Zugleich nenne man einen Teilungspunkt (die Endpunkte der anfangs angenommenen Strecke gelten auch als Teilungspunkte) einen Anstosspunkt von Π, wenn alle benachbarten Teilstrecken (deren Zahl also zwei oder eins ist) gegen diesen Teilungspunkt gerichtet sind; die Menge der benachbarten Teilstrecken heisst [dann [die Umgebung des Anstosspunktes. Die Zahl der letzteren sei $r (\geq 1)$. [S. die schematische Abbildung (5) eines Profils mit $p = 10$, $r = 4$, wobei auch die Anstosspunkte markiert sind.] Vor dem k-ten Anstosspunkt mögen p_k Teilstrecken liegen, und die Pfeile vor und nach seiner Umgebung die Profile Π'_k und Π''_k bilden (die auch leer sein können). Dann gilt für die Anzahl $N(\Pi)$ der Permutationen mit dem Profil Π die Rekursionsformel (6).

L. Waldapfel.

[4] SZELE TIBOR: Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban. Ez a kötet 223—256. l. Fentlevő fogalmak részben ebből a dolgozatból vannak átvéve.