X. évfolyam. 7. szám. 1934. március 15.

KÖZÉPISKOLAI

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Megjelenik minden hó tizenötödikén.

Előfizetési ár egy évre 8 aranypengő, félévre 4 aranypengő.

Szerkesztőség és kiadóhivatal: I., Verpeléti-út 22. III. 4.

Ptolemäus tétele a húrötszögben.

A húrnégyszögnek egyik legérdekesebb tulajdonságát Ptolemäus tétele fejezi ki, amely szerint a húrnégyszögben két-két átellenes oldal szorzatának összege a két átló szorzatával egyenlő. E tétel négyzet és téglalap esetén Pythagoras tételébe olvad bele; ha a körbe egyenlőszárú trapézt rajzolunk, akkor Ptolemäus tétele

$$f^2 = ab + c^2$$

alakot ölt, ahol f a trapéz átlója a és b párhuzamos oldalai, c pedig a trapéz szára. Derékszögű deltoidnál

$$f_1 f_2 = 2ab$$

alakra vezet Ptolemäus tétele; e formulában f_1 és f_2 a deltoid átlói, míg a és b a deltoid oldalai. Egyszerű számítással igazolhatjuk, hogy

$$f_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{és} \quad f_1 = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

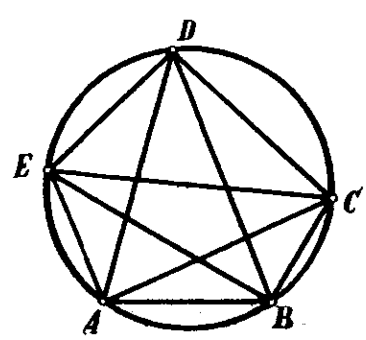
A húrötszögben az átlók száma ötre szaporodik: ez már jelzi, hogy ha Ptolemäus tételéhez hasonló összefüggést keresünk, bizonyára összetettebb formulára jutunk. E formula megállapításánál a húrötszöget átlókkal húrnégyszögekre bontjuk és ez úton Ptolemäus tételének ismételt alkalmazásával módot keresünk az átlók szorzatát kapcsolatba hozni a húrötszög oldalaival.

A mellékelt ábrán

$$AB = a_1,\ BC = a_2,\ CD = a_3,\ DE = a_4,\ EA = a_5,$$
$$AC = f_1,\ BD = f_2,\ CE = f_3,\ DA = f_4\ \ EB = f_5$$

jelzéseket alkalmazva, az egyes húrnégyszögekben felírjuk Ptolemäus tételét

$ABCD$	húrnégyszögben:	$f_1 f_2 = a_1 a_3 + a_2 f_4 \ldots$	1)
$BCDE$	„ „ :	$f_2 f_3 = a_2 a_4 + a_3 f_5 \ldots$	2)
$CDEA$	„ „ :	$f_3 f_4 = a_3 a_5 + a_4 f_1 \ldots$	3)
$DEAB$	„ „ :	$f_4 f_5 = a_4 a_1 + a_5 f_2 \ldots$	4)
$EABC$	„ „ :	$f_5 f_1 = a_5 a_2 + a_1 f_3 \ldots$	5)



Az első egyenlőséget megszorozzuk f_3-mal és a 3) formula alapján $f_3 f_4$ értékét helyettesítjük, akkor

$$f_1 f_2 f_3 = a_1 a_3 f_3 + a_2 f_3 f_4 = a_1 a_3 f_3 + a_2 a_4 f_1 + a_2 a_3 a_5$$

eredményre jutunk; ha ez utóbbit f_4-gyel szorozzuk és f_3f_4 értékét az előbb módon helyettesítjük, akkor

$$f_1f_2f_3f_4 = a_1a_3f_3f_4 + a_2a_4f_1f_4 + a_2a_3a_5f_4$$

alakból az említett helyettesítés után

$$f_1f_2f_3f_4 = a_1a_3a_4f_1 + a_2a_3a_5f_4 + a_1a_3^2a_5 + a_2a_4f_1f_4$$

összefüggést nyerjük. Az imént kapott eredményt f_5-tel szorozzuk:

$$f_1f_2f_3f_4f_5 = a_1a_3a_4f_1f_5 + a_2a_3a_5f_4f_5 + a_1a_3^2a_5f_5 + a_2a_4f_1f_4f_5;$$

ebből f_4f_5 és f_1f_5 értékei alapján (4)- és 5)-ből)

$$f_1f_2f_3f_4f_5 =$$

$$= f_1a_1a_2a_4^2 + f_2a_2a_3a_5^2 + f_3a_3a_4a_1^2 + f_5a_5a_1a_3^2 + 2a_1a_2a_3a_4a_5 + f_1f_2a_2a_4a_5$$

átmeneti formulát nyerjük, amely f_1f_2 értékének helyettesítése után a húrötszögre vonatkozó Ptolemäus tétel szolgáltatja:

$$f_1f_2f_3f_4f_5 =$$

$$= f_1a_4^2a_1a_2 + f_2a_5^2a_2a_3 + f_3a_1^2a_3a_4 + f_4a_2^2a_4a_5 + f_5a_3^2a_5a_1 + 3a_1a_2a_3a_4a_5.$$

A jobb oldalt kissé megfigyelve észrevehetjük, hogy az átlós tagokban egy-egy átló a tőle átfogott két oldallal és a vele szemben fekvő oldal négyzetével szerepel.

Ha az ötszög szabályos, akkor oldalai és átlói egyenlők és a fenti 5 egyenlőség bármelyike megállapítja az átló és oldal viszonyát:

$$f^2 = fa + a^2;$$

ezen utóbbi összefüggés szerint a szabályos ötszög átlója és oldala oly távolságra egészítik ki egymást, melynek részei arany-metszés szerint tagozódnak. Ugyanezen összefüggés alapján

$$f = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}, \text{ vagy viszont } a = \frac{f(-1+\sqrt{5})}{2}.$$

Ezen utóbbi értékeket ABC háromszögre alkalmazva könnyen igazolhatjuk, hogy

$$\sin 54^0 = \cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

másrészt ugyancsak az ABC háromszögből a cosinus-tétel alapján írhatjuk, hogy

$$\cos 72^0 = \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Esztergom. *Tihanyi Miklós.*