

HOGYAN IS MOZOG EGY TÖMEGES RUGÓ? – II.

Woynarovich Ferenc
MTA SZFKI

Emlékeztető

Egy egyik végén rögzített l hosszúságú, m tömegű D direkciós erejű rugóból és a másik végéhez rögzített M tömegű testből álló rendszer mozgását vizsgáljuk. Ennek során a rugót egy $\rho = m/l$ sűrűségű, és $\varepsilon = Dl$ Young-modulusú egy-dimenziós rugalmas közegnek tekintjük, amelynek egyes pontjait a rögzített végtől mért x nyugalmi távolsággal paraméterezzük. A rugó pontjainak $s(x, t)$ longitudinális elmozdulását az

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

hullámegyenletet írja le, amelyben a hangsebesség

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{Dl^2}{m}}. \quad (2)$$

A feladatot az elrendezésből adódó peremfeltételek teszik egyértelművé: a rugó $x = 0$ vége rögzített, tehát

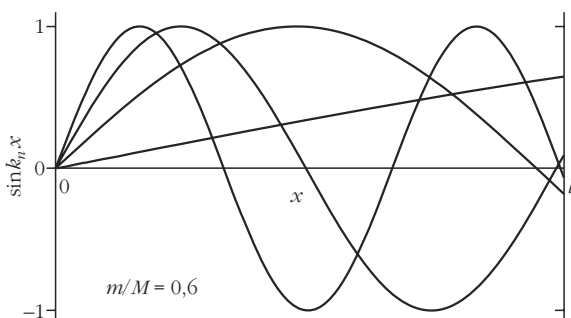
$$s(x=0, t) = 0, \quad (3)$$

a másik végén levő test mozgása pedig követi Newton II. törvényét, azaz

$$-\varepsilon \left. \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = M \frac{\partial^2 s(l, t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Munkánk első felében megkerestük a rendszer sajátrezgéseit – normál módusait (1. ábra), amelyek történetesen állóhullámok –, és a rendszer mozgását ezekből építettük fel (ezek szerint fejtettük ki). Ez az eljárás minden kezdeti feltétel esetén alkalmazható, de nem feltétlenül szemléletes, mivel a normál módusokra való összegzés – legalábbis analitikusan – nehézségekbe ütközhet. Tipikusan ez a helyzet az első részben tárgyalt példákban, azaz az M tömegnél fogva kihúzott, majd elengedett, illetve az M -en ke-

1. ábra. A rugó (longitudinális) deformációjának alakja az első néhány normál módusban $m/M = 0,6$ esetén.



resztül meglökött rugó esetében. Pedig tanulságos lenne legalább az elején nyomon követni a rugó mozgásának részleteit. Az ugyanis biztosan nem teljesen sima: a kezdetben (nyújtva vagy nyújtatlanul, de) nyugvó rugó egyik végével $t = 0$ -ban történik valami (elengedjük, illetve meglököjük), és ez a változás véges idő alatt terjed végig a rugón, és verődik vissza valahogy a végeken. Ennek nyomon követésére alkalmas az a (normál módusos leírással egyébként ekvivalens) megközelítés, amely a rendszer mozgását ide-oda haladó hullámfrontok segítségével adja meg.

Mozgó hullámfrontok

Az eljárás alapja az, hogy az (1) hullámegyenlet általános megoldása jobbra és balra haladó tetszőleges alakú hullámokból áll:

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (5)$$

(Az egyértelmű szóhasználat kedvéért úgy vesszük, hogy a rugó bal vége a rögzített, míg az M tömeg a jobb oldali végén van.) $f(t)$ és $g(t)$ alakját az köti össze, hogy teljesülniük kell a (3) és (4) peremfeltételeknek. Az első szerint

$$f(t) = -g(t), \quad (6)$$

míg a második szerint

$$g''\left(t + \frac{l}{c}\right) + \alpha g'\left(t + \frac{l}{c}\right) = \alpha f'\left(t - \frac{l}{c}\right) - f''\left(t - \frac{l}{c}\right). \quad (7)$$

Itt

$$\alpha = \frac{c\rho}{M}, \quad (8)$$

és a ' az argumentum szerinti deriválást jelenti.

(6) és (7) az egyes hullámoknak a megfelelő végekről való visszaverődését írják le. (6) szerint, ha a balra, illetve jobbra menő hullám egy adott t_0 időben

$$g\left(t_0 + \frac{x}{c}\right) \text{ és } f\left(t_0 - \frac{x}{c}\right),$$

akkor egy későbbi t időben a jobbra menő hullám

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f_g\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } x < c(t - t_0) (< l) \\ f\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } c(t - t_0) < x < l, \end{cases} \quad (9)$$

ahol

$$f_g\left(t - \frac{x}{c}\right) = -g\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (10)$$

Az M tömegen való visszaverődés ennél bonyolultabb, mert az M mozgása miatt a hullám alakja torzul. Az ezt leíró (7) egyenlet $f(t)$ ismeretében $g(t)$ -re (például konstans variálással) megoldható.¹ A megoldás

$$g_f\left(t + \frac{x}{c}\right) = \int_{t_0+l/c+0}^{t+x/c} e^{-\alpha z} \int_{t_0+l/c+0}^z e^{\alpha y} \left[\alpha f'\left(y - \frac{2l}{c}\right) - f''\left(y - \frac{2l}{c}\right) \right] dy dz + \frac{\Delta v}{\alpha} \left\{ 1 - \exp\left[-\alpha \left[t - t_0 + \frac{x-l}{c} \right] \right] \right\} + \Delta g. \quad (11)$$

Itt

$$t - t_0 > \frac{l-x}{c},$$

és az integrálok alsó határaként megadott $t_0 + l/c + 0$ azt jelenti, hogy ez a határ felülről közelíti a $t_0 + l/c$ értékhez. (Ennek jelentőségére később visszatérünk.) Ha tehát egy t_0 időben az $f(t_0 - x/c)$ és a $g(t_0 + x/c)$ adott, akkor egy későbbi t -ben

$$g\left(t + \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} g\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } 0 < x < l - c(t - t_0) \\ g_f\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } l - c(t - t_0) < x < l. \end{cases} \quad (12)$$

A g_f -ben szereplő két integrációs konstans, Δv és Δg a következő módon illesztendő: Δg -t az határozza meg, hogy a balra menő hullámnak folytonosnak kell lennie, hiszen a rugó nem szakad el. Ebből

$$g\left(t_0 + \frac{l}{c}\right) = g_f\left(t_0 + \frac{l}{c}\right), \text{ azaz } \Delta g = g\left(t_0 + \frac{l}{c}\right) \quad (13)$$

¹ A

$$g''(t) + \alpha g'(t) = \phi(t)$$

típusú egyenlet megoldásának lépései:

A homogén egyenlet általános megoldása g' -re

$$g'_{hom}(t) = C_0 e^{-\alpha t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy speciális megoldását

$$g'(t) = C(t) e^{-\alpha t}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve $C(t)$ -re a

$$C'(t) = e^{\alpha t} \phi(t)$$

egyenletet kapjuk, amelynek megoldása:

$$C(t) = \int e^{\alpha y} \phi(y) dy + C_1.$$

Ezt felhasználva $g(t)$ integrálással megkapható:

$$g(t) = \int C(z) e^{-\alpha z} dz + C_2.$$

adódik. A Δv meghatározásakor két esetet kell megkülönböztetni. Egyrészt *külső bebatás nélkül* az M sebessége folytonos, mert a rugó csak véges erővel tud a testre hatni, így a véges M tömeg *sebessége* nem ugorhat. Ebből következik, hogy

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} (f'(t-l/c) + g'_f(t+l/c)) = \lim_{t' \rightarrow t_0+0} (f'(t'-l/c) + g'(t'+l/c)). \quad (14)$$

Az itt szereplő limeszek kiszámolásánál azonban figyelembe kell venni, hogy a rugó mentén a sebesség, így egyes argumentumoknál az $f'(t-l/c)$ ugorhat.² Ez végül is a

$$\Delta v = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f'\left(t - \frac{l}{c}\right) - \lim_{t \rightarrow t_0+0} f'\left(t - \frac{l}{c}\right) + \lim_{t \rightarrow t_0+0} g'\left(t + \frac{l}{c}\right) \quad (15)$$

szabályt eredményezi. Ettől különböző eset, ha az adott t_0 pillanatban az M -et meglökjük úgy, hogy a sebessége v_M legyen. Ekkor a szabály

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} f'\left(t - \frac{l}{c}\right) + g'_f\left(t + \frac{l}{c}\right) = f'\left(t_0 - \frac{l}{c}\right) + \Delta v = v_M. \quad (16)$$

(A későbbiekben egy olyan példát fogunk vizsgálni, amelyben mindkét lehetőségre figyelni kell.)

A kezdeti feltételek most azonosak azzal, hogy

$$f\left(-\frac{x}{c}\right) + g\left(\frac{x}{c}\right) = s_0(x), \quad (17)$$

$$f'\left(-\frac{x}{c}\right) + g'\left(\frac{x}{c}\right) = v_0(x).$$

Ebből f' és g' kifejezhető, tehát f és g megadható:

$$g_0\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2} s_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy (+C), \quad (18)$$

$$f_0\left(-\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2} s_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy (-C).$$

Itt két dolgot kell megjegyeznünk. Egyrészt a $\pm C$ integrációs konstansok időfüggő tagot nem generálnak és az

² Ha a jobbra menő hullámban a sebesség valahol, azaz $f'(t-x/c)$ valamilyen argumentumnál ugrik, akkor ott $f''(t-x/c)$ végtelen, ami megjelenik a (11)-ben szereplő integrál alatt. Ez a szingularitás integrálható, és finomabb matematikai eszközökkel jól kezelhető, itt azonban más eljárást javasolunk: az általánosság csorbítása nélkül választhatjuk t_0 -nak azt az időpontot, ahol az $f'(t-l/c)$ ugrása van. Ekkor az integrál alsó határát $t_0 + l/c + 0$ -nak választva biztosítjuk, hogy az integrál szinguláris tagot ne tartalmazzon (az integrálokat az f'' szingularitása fölött kezdjük), így

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} g'_f(t+l/c) = \Delta v,$$

a Δv -t pedig úgy illesztjük, hogy az M sebessége folytonos legyen.

$s(x, t)$ -ből kiesnek, tehát ignorálhatók. Másrészt a (18) által meghatározott kezdeti f és g mindig egy olyan helyzetet ír le, amelyben az M tömeg kezdősebessége

$$v = \lim_{x \rightarrow l} v_0(x).$$

Ha az ettől különbözik, mert például az indításkor meglökjük, akkor azt a fentiek szerint a Δv megfelelő megválasztásával vehetjük figyelembe.

Mindent egybevetve a mozgás a következő módon írható le. A g_0 -val megadott elmozdulástér a rögzített vég felé tolódik, és onnan ellentétes fázisban visszaverődik. Eközben az f_0 -val megadott elmozdulástér az M felé tolódik, és az M tömegről verődik vissza. Ennek megfelelően egy $t < l/c$ időpontban

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f_{g_0}\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } x < ct (< l) \\ f_0\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } ct < x < l \end{cases} \quad (19)$$

és

$$g\left(t + \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} g_0\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } 0 < x < l - ct \\ g_{f_0}\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } l - ct < x < l, \end{cases} \quad (20)$$

ahol f_{g_0} -t és g_{f_0} -t értelemszerűen (10) és (11) adja meg. Így f és g a kezdeti feltételek segítségével megkapható a $t < l/c$ időre. A fenti eljárásból azonban világos, hogy bármely időpillanattól kiindulva a mozgás jellemzői újabb l/c időintervallumra megadhatók, tehát az eljárás ismétlésével tetszőleges ideig követhetők.

Ebben a leírásban a technikából adódóan van egy l/c idejű szakaszosság. Ennek nem feltétlenül kell a megoldásban is megjelennie, de bizonyos esetekben (mint például a bemutatandó példában) ez kifejezetten jellemző magára a mozgásra. Nevezetesen, ha a rugó mentén a sebesség ugrik, akkor az a sebességugrás a (10)-nek és (14)-nek megfelelően a két vég között a haladási irány szerint váltakozó előjellel oda-vissza verődik. A sebességugrás két oldalán a $\partial s(x, t)/\partial x$ relatív megnyúlás nem azonos, ezért valahányszor az ugrás az M -hez ér, hirtelen megváltozik az arra ható erő. Az M tömeg

$$a_M = \frac{\varepsilon}{cM} \left[f'\left(t - \frac{l}{c}\right) - g'\left(t + \frac{l}{c}\right) \right] \quad (21)$$

gyorsulása emiatt minden alkalommal (14)-nek megfelelően

$$\Delta a_M = \frac{2\varepsilon}{cM} \left[\lim_{t \rightarrow t_0+0} f''\left(t - \frac{l}{c}\right) - \lim_{t \rightarrow t_0-0} f''\left(t - \frac{l}{c}\right) \right] \quad (22)$$

értékkel megváltozik.

Fontos megjegyezni, hogy a rendszerben két karakterisztikus idő van: a

$$\tau_1 = \frac{l}{c} \text{ mellett a } \tau_2 = \frac{1}{\alpha} = \frac{M}{\rho c} \quad (23)$$

is fontos paraméter. Az első az az idő, amíg egy jel a rugón végigfut, a második egyfajta relaxációs időnek látszik. Az ezekhez tartozó hosszúságskálák a rugó hossza, illetve $l_M = M/\rho$, ami a rugó olyan hosszú darabjának felel meg, aminek a tömege éppen M . Ezek jelentőségére az alábbi példa kapcsán visszatérek.

Az M -en keresztül meglökött rugó mozgása

(II. megoldás az első részben b)-vel jelzett kezdeti feltétel mellett.) A hirtelen meglökött (vagy v sebességgel a rugónak ütköző) M tömegű test egy hullámfrontot indít el, amely a rugón ide-oda haladva hol a rögzített végről, hol az M tömegről újra és újra visszaverődik. A primer hullámfront alakját az határozza meg, hogy kezdetben mind f , mind g nulla, így Δg is az, és az egyedüli nem nulla tagban (16) szerint $\Delta v = -v$:

$$s(x, t) = s_1(x, t), \text{ amíg } 0 < t < l/c, \quad (24)$$

ahol

$$s_1(x, t) = \begin{cases} -s_0 \left[1 - e^{-\alpha \left(t - \frac{x-t}{c} \right)} \right], & \text{ha } l - ct \leq x \leq l, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \quad (25)$$

és

$$s_0 = \frac{v}{\alpha}. \quad (26)$$

(Ezzel összefüggésben a τ_2 időállandó szemléletesen értelmezhető: egy egyik irányban végtelen hosszú rugónak ütközve az M tömegű test exponenciális függvény szerint fékeződik le, ennek az időállandója az adott ρ és c mellett τ_2 .)

Amikor az (egyébként $g(t+x/c)$ -nek megfelelő) $s_1(x, t)$ hullámfront eléri a rögzített véget ($t = l/c$), akkor ellentétes előjellel visszaverődik, azaz az (innen) kezdve már sehol nem 0) $s_1(x, t)$ mellett megjelenik az $f_s(t-x/c)$ -nek megfelelő

$$s_2(x, t) = \begin{cases} s_0 \left[1 - e^{-\alpha \left(t - \frac{x-t}{c} \right)} \right], & \text{ha } 0 \leq x \leq ct - l, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (27)$$

hullámfront, amely a rögzített vég felől az M tömeg felé halad. Tehát az $l/c < t < 2l/c$ időintervallumban a rendszer mozgását az

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) \quad (28)$$

adja meg, amelyben az előzőek szerint

$$\begin{aligned} f\left(t - \frac{x}{c}\right) &= s_2(x, t), \\ g\left(t + \frac{x}{c}\right) &= s_1(x, t). \end{aligned} \quad (29)$$

Miután az $s_2(x, t)$ frontja eléri az l véget, azaz ha $t \geq 2l/c$, akkor az elmozdulástér

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) + s_3(x, t) \quad (30)$$

amíg $t < 3l/c$. Ebben már mind $s_1(x, t)$, mind $s_2(x, t)$ sima függvények, és az M tömegről visszavert front mozgását az

$$s_3(x, t) = \begin{cases} \left\{ s_0 \left[1 - \left[1 + 2\alpha \left(t + \frac{x-3l}{c} \right) \right] e^{-\alpha \left(t - \frac{x-3l}{c} \right)} \right\}, & \text{ha } 3l - ct \leq x \leq l, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (31)$$

függvény adja meg. (A fent ismertetett eljárásban $t_0 = 2l/c$ -t választva Δg -t és Δv -t (13), illetve (15)-nek megfelelően meghatározva $g_{s_2}(t + x/c)$ -re $s_1(x, t) + s_3(x, t)$ adódik, tehát az $s_1(x, t)$ „folytatódik”, és megjelenik mellette $s_3(x, t)$.) Nem követem tovább, de az eljárás tetszőleges ideig folytatható.

Figyelemre méltó, hogy az M tömegen való visszaverődéskor mindig megváltozik a front alakja: először az egyszerű exponenciális függvény egy polinommal szorozódik, minden további alkalommal pedig a polinom fokszáma nő.

Eredményünk különösen érdekes, ha a τ_2 relaxációs idő lényegesen hosszabb mint τ_1 , azaz ami alatt a jel a rugón végigfut (ez az $M \gg m$ eset). Ekkor egészen addig, amíg $t \ll \tau_2$ (ebbe a hullámfrent számos oda-vissza mozgása befér), α szerint sorba fejthetünk, és megelégedhetünk a vezető járulékkal. Ebben a közelítésben

$$s(x, t) \approx \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ ha} \\ 0 < x < l - ct, \\ -v \left(t + \frac{x-l}{c} \right), \text{ ha} \\ l - ct < x < l, \end{array} \right\} & \text{amíg } 0 < t < \frac{l}{c}, \\ \left\{ \begin{array}{l} -2v \frac{x}{c}, \text{ ha} \\ 0 < x < ct - l, \\ -v \left(t + \frac{x-l}{c} \right), \text{ ha} \\ ct - l < x < l, \end{array} \right\} & \text{amíg } \frac{l}{c} < t < \frac{2l}{c}, \end{cases} \quad (32a)$$

$$s(x, t) \approx \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} -2v \frac{x}{c}, \text{ ha} \\ 0 < x < 3l - ct, \\ -v \left(t + 3 \frac{x-l}{c} \right), \text{ ha} \\ 3l - ct < x < l, \end{array} \right\} & \text{amíg } \frac{2l}{c} < t < \frac{3l}{c}, \\ \vdots & \end{cases} \quad (32b)$$

Arról van tehát szó, hogy az ide-oda mozgó front bal oldalán a rugó (kezdetben teljesen, később közelítőleg) áll, míg a másikon a sebessége közelítőleg $-v$. A relatív összenyomódottság ($-\partial s/\partial x$) a bal oldali 0 és a jobb oldali nagyjából v/c értékről indulva a front két oldalán felváltva $\sim 2v/c$ lépésekben növekszik. (Ebben a közelítésben nem látszik, de ezalatt az M sebessége lassan csökken.) Figyelemre méltó tehát, hogy a rugó összenyomása sem időben, sem térben nem egyenletesen történik, és az M gyorsulása sem sima, hanem

$$\Delta a_M \sim \frac{2v}{c} \frac{\varepsilon}{M} = \frac{2vc}{l} \frac{m}{M}$$

lépésekben változik (ahogy azt (22) alapján elvárjuk).

Hasonló módon érdekes és szépen leírható az eredmény, ha a relaxáció sokkal gyorsabb mint a jelterjedés, azaz $\tau_1 \gg \tau_2$ ($m \gg M$). Ilyenkor az ide-oda verődő „hullámvonulat” szélessége $\sim l_M \ll l$. A rugónak csak az ebbe eső darabja van összenyomva vagy megnyújtva, és csak ez a darabja mozog, a többi lényegében áll. Ennek megfelelően az M tömeg is lényegében csak akkor mozog, amikor a hullám éppen visszaverődik róla. A hullámvonulatot úgy kell elképzelni, hogy a hullámfrentnek a haladás irányába eső széle éles, a szélessége az l_M nagyságrendjébe esik (ezt jelölöm \tilde{l}_M -mel), de a hátsó széle elmosódott.

$$s(x, t) \approx \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ amikor} \\ 0 < x < l - ct, \\ -s_0, \text{ amikor} \\ l - ct + \tilde{l}_M < x < l, \end{array} \right\} & \text{ha } 0 < t < \frac{l}{c}, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ amikor} \\ 0 < x < ct - l - \tilde{l}_M, \\ -s_0, \text{ amikor} \\ ct - l < x < l, \end{array} \right\} & \text{ha } \frac{l}{c} < t < \frac{2l}{c}, \end{cases} \quad (33a)$$

$$s(x, t) \approx \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ amikor} \\ 0 < x < 3l - ct, \\ +s_0, \text{ amikor} \\ 3l - ct + \tilde{l}_M < x < l, \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ ha } \frac{2l}{c} < t < \frac{3l}{c}, \quad (33b)$$

Általánosságban elmondhatjuk, hogy a rugó mozgását egy szakaszosság jellemzi, a szakaszok hossza pedig az a τ_1 idő, amíg egy jel végigfut a rugón. A két véglet között az alapvető különbség abban van, hogy hogyan viszonyul ehhez a τ_2 relaxációs idő. Ha $\tau_2 \gg \tau_1$, a relaxációs idő alatt, tehát ami alatt számottevően megváltozik például az M sebessége, a hullámfront éle sokszor oda-vissza fut a rugón, az exponenciálissal leírható elmozdulástér (a torzulás mellett) sokszorosan önmagára „hajtogatódik”. A fordított, $\tau_1 \gg \tau_2$ esetben a jel teljes hossza (\tilde{l}_M) sokkal rövidebb mint a rugó, és bár a hullám egyre inkább „fodrozódik” (ahogy az M -ről visszaverődik), hosszúsága (az exponenciális lecsengés mértéke) a mozgás során változatlan marad.

Egy ráadásfeladat

Mind az állóhullámokkal, mind a mozgó hullámfrontok leírásával kapcsolatban igen tanulságos az alábbi feladat: mikor, és mekkora sebességgel pattan vissza a kezdetben álló rugónak v sebességgel nekiütköző M tömeg? A megoldáshoz az M -re ható erőt (vagy az M gyorsulását) kell vizsgálni. Amíg M a rugót nyomja, a mozgás a fellejebb tárgyalt b) kezdeti feltételnek felel meg, de amikor a rugó vége erő-, azaz megnyúlásmentessé válik, az M elrepül. A feladatot ugyan nem tudjuk általánosságban analitikusan megoldani, de a két ($M \gg m$, illetve $M \ll m$) végletben a probléma jól kezelhető. A fentiek alapján az is nyilvánvaló, hogy a két határesetben egészen másként kell eljárunk, és mást is kell várunk.

Az $M \gg m$ eset. A rendszer mozgását a normál módusok segítségével adjuk meg. Az első részben tárgyaltak szerint az M gyorsulását

$$\ddot{s}(l, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \frac{2M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v \sin \omega_n t \quad (34)$$

adja meg. Ez várhatóan $\sim T_0/2$ körül lesz nulla. A felharmonikusok

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \frac{2M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v \sin \left[\left(n\pi + \frac{1}{n\pi} \frac{m}{M} + \dots \right) \frac{c}{l} t \right] \quad (35)$$

járuléka lényegesen leegyszerűsödik, ha

$$\frac{1}{\pi} \frac{m}{M} \frac{c}{l} \frac{T_0}{2} \approx \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1. \quad (36)$$

Ez egy kicsit szigorúbb feltétel mint az $m/M \ll 1$, de ha ez is teljesül, a κ_n -ekre, valamint az ω_n -ekre vonatkozó közelítésekben és $t \lesssim T_0/2$ esetén a *szinusz argumentumában* is a vezető tag vehető. Ekkor M gyorsulása jó közelítéssel

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \frac{D}{m} \frac{m}{M} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} + v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \left(n \frac{\pi c}{l} t \right)}{n}. \quad (37)$$

A második tagban az összegzés elvégezhető, és arra vezet, hogy

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \frac{D}{m} \frac{m}{M} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} + v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \left(1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right). \quad (38)$$

Itt $\{t\}$ definíciója:

$$\{t\} = t - 2\mu \tau_1, \quad (39)$$

ahol a μ egész, és

$$2\mu \tau_1 < t < (2\mu + 2) \tau_1. \quad (40)$$

Ennek megfelelően (38) második tagja egy fűrészfog-függvény (v.ö. (22)!) (Figyelemre méltó, hogy $t \ll T_0$ -ra (38) a μ -vel lépcsőzetesen növekszik:

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \left(1 + \frac{t}{\tau_1} - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right) \approx v \frac{c}{l} \frac{m}{M} (2\mu + 1), \quad (41)$$

ahogy azt (32) alapján várjuk.) $T_0/2$ közelében (38)

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \left(\frac{T_0}{2\tau_1} - \frac{t}{\tau_1} + 1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right), \quad (42)$$

tehát az ellökődés t idejét végül is a

$$\left(\frac{T_0}{2} - t \right) + (\tau_1 - \{t\}) = 0 \quad (43)$$

egyenlet adja meg. A megoldás

$$t = \frac{\frac{T_0}{2} + (2v - 1) \tau_1}{2}, \quad (44)$$

ahol a v egész, és

$$(2v - 1) \tau_1 < \frac{T_0}{2} < (2v + 1) \tau_1. \quad (45)$$

Az adott $(m/M)^{1/2} \ll 1$ esetben a gyorsuláshoz hasonlóan az M

$$\dot{s}(l, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v \cos \omega_n t \quad (46)$$

sebessége is kiértékelhető. Az $\dot{s}(l, t)$ kiszámításánál alkalmazott közelítésekkel, és (43) felhasználásával az

$$\dot{s}(l, t) \approx v \left\{ 1 - \left[\frac{1}{6} + \left(1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right)^2 \right] \frac{m}{M} \right\} \quad (47)$$

értéket kapjuk. Ennek megfelelően az elrepülő test kinetikus energiája

$$\frac{1}{2} M (\dot{s})^2 \approx \frac{1}{2} M v^2 \left\{ 1 - 2 \left[\frac{1}{6} + \left(1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right)^2 \right] \frac{m}{M} \right\}. \quad (48)$$

Eredményünk szerint tehát az M tömegű test általában hamarabb (határesetben pont akkor) repül el, mintha csak a nulladik módus lenne gerjesztve, a sebessége mindig kisebb, mint v , de lehet nagyobb, mint a nulladik módus sebességamplitúdója, viszont az az energia, amit magával visz, kevesebb, mint a nulladik módusé. (Annak a kérdésnek, hogy ezt a módusokból milyen arányban viszi el, nincs értelme, hisz az elrepülés után megváltoznak a rendszer normál rezgései.) Mindezt a $(m/M)^{1/2} \ll 1$ közelítésben kaptuk.

Ha m/M nagyobb, a megoldásban szerepet játszó fűrészfog-függvény torzul, az elrepülés ideje és sebessége eltolódhat, de a kapott megoldás jellege (tehát hogy $t < T_0/2$, és hogy sok energia marad a rugóban) megmarad.

Az $M \ll m$ eset. Ilyenkor a rugó mozgását a hullámfrontokkal célszerű megadni. Eszerint leghamarabb akkor tud az M elrepülni, amikor az általa elindított hullámfront a rögzített végről visszafordulva éppen róla verődik vissza. Feltételezzük, hogy a tömegviszonyok olyanok, hogy valóban ez történik, azaz a test még azelőtt elrepül, hogy az $s_3(x, t)$ frontja a rögzített végről visszaverődve újra elérné az M tömeget (tehát valamikor $2\tau_1$ és $4\tau_1$ között). Az erőmentesség feltétele

$$\left. \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial s_i(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (49)$$

Ebből

$$t = 2\tau_1 + \xi \tau_2 \quad (50)$$

adódik, ahol

$$\xi = 1 + \frac{e^{-2\frac{m}{M}}}{2}. \quad (51)$$

t akkor értelmezhető, ha $t < 4\tau_1$, azaz $\xi \tau_2 < 2\tau_1$. Ez a feltétel azonos a

1. táblázat			
A visszalökődés időpontja és sebessége néhány tömegaránynál			
m/M	$t/2\tau_1$	$T_0/4\tau_1$	u/v
0,6	1,9558	2,2278	0,6329
1,0	1,5338	1,8259	0,6876
∞	1	1	0,7358

$$2 \frac{m}{M} > 1 + \frac{e^{-2\frac{m}{M}}}{2}, \text{ azaz } \frac{m}{M} > 0,578592\dots \quad (52)$$

feltétellel. Ha ez nem teljesül, akkor az $s_3(x, t)$ frontja a rögzített végről visszaverődve még (50) előtt eléri az M -et, ezért más $s(x, t)$ -vel kell számolni. Ha tehát M elég kicsi, (50) használható, és az ellökődés sebességére

$$u = \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial s_i(l, t)}{\partial t} \right|_{t=2\tau_1+\xi\tau_2} = 2v e^{-\xi} \quad (53)$$

adódik. Ez akkor a legnagyobb, ha $M \rightarrow 0$, ilyenkor $\xi \rightarrow 1$, és

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{u}{v} = \frac{2}{e} = 0,735758\dots \quad (54)$$

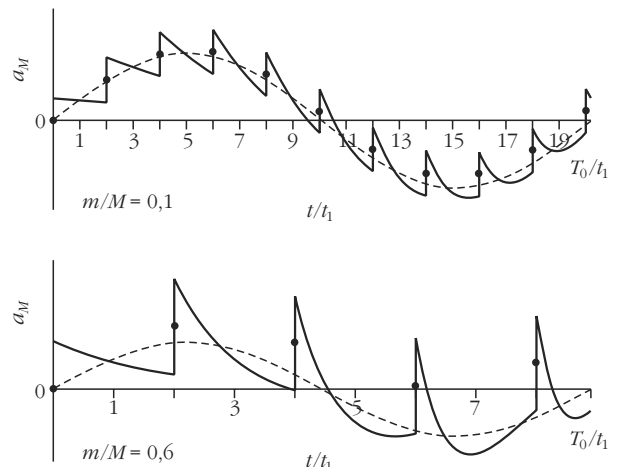
A minimális érték akkor van, ha (52) éppen teljesül, ekkor $\xi = 2m/M = 1,15718\dots$, és

$$\frac{u}{v} = 0,628739\dots \quad (55)$$

(Itt meg kell jegyezni, hogy ezekből a számításokból nem derül ki, hogy ez abszolút minimum-e, vagy kisebb tömegaránynál, tehát ha a hullámfront egynél többször verődik vissza az M -ről, adódhat-e ennél kisebb u/v . Egy biztos, valahol minimumának kell lennie, hiszen $m/M \rightarrow 0$ esetén egyhez tart.)

Néhány eset adatait az 1. táblázatba foglaltuk. A második oszlop az ellökődés idejét adja egy jel oda-

2. ábra. A meglökött M tömeg gyorsulása.



vissza futásának idejéhez viszonyítva, a harmadik oszlop összehasonlítás céljából az alaplómódus rezgésidőjének felét adja meg ugyanezen a skálán, míg a negyedik a kimenő és bejövő sebességek hányadosa. A ∞ -hez tartozó adatok határértékként értendők.

Feladatunk érdekessége az, hogy nem az M tehetlensége miatt mindenképpen sima $s_M = s(l, t)$ elmozdulást, hanem az a_M gyorsulást kellett vizsgálni. Láthattuk, hogy elég kis m/M tömegarány mellett még közelítőleg kirajzolódik a harmonikus rezgésre jellemző szinuszhullám, de ennek nagyobb tömegarányok mellett már alig van nyoma. Ezt hivatott illusztrálni az 2. ábra, amely az a_M gyorsulást mutatja önkényes egységekben a nulladik módus első periódusa alatt egy kisebb és egy nagyobb tömegarány mellett t/τ_1 függvényében. Az összehasonlítás végett szaggatott vonallal bejelöltük a nulladik módushoz tartozó gyorsulást is. (Annak kiderítését, hogyan néz ki mindez a sokkal szebben viselkedő a) kezdeti feltétel mellett, az olvasóra bízunk.)

Befejezés gyanánt

Munkánk alapkérdése az volt, hogy mennyire jól írja le egy tömeges rugón lévő test mozgását a szokásos (ideális rugó által mozgatott effektív tömeg) közelítés.

Vizsgálódásunkban abból indultunk ki, hogy a rugó maga egy egydimenziós rugalmas közeggel modellezhető. E közeg mozgását egy egyszerű hullámegyenlet írja le, amelyben a rugóhoz csatlakozó tömeg egy speciális (az adott tömegre vonatkozó Newton-egyenletről megkapható) peremfeltétellel veendő figyelembe.

Megkonstruáltuk a rendszer normál módusait. Ezek állóhullámok, amelyek közül a leghosszabb hullámhossznak megfelelő alapharmonikus elég nagy (akár $m/M \sim 1$) tömegarány mellett is jó közelítéssel úgy viselkedik, mintha egy ideális rugó a szokásos effektív tömeget mozgatná. A rövidebb hullámhosszú módu-

sok rezgési frekvenciája nem egész számú többszöröse egyik hosszabb hullámhosszúnak sem, ezért a rugó mozgása általában nem periodikus (kivéve, ha csak egy módus van gerjesztve).

A fentiek alapján az, hogy a mozgás mennyire jól közelíthető az ideális rugó mozgásával, a kezdeti feltételektől függ, mert ezek határozzák meg, milyen súllyal jelennek meg a magasabb frekvenciájú módusok. Ezt két példán szemléltettük: a) az M tömegnél fogva kihúzott majd magára hagyott rugó mozgását, illetve b) az eredetileg nyújtatlan és nyugvó rendszerben az M meglökésével indított mozgást elemeztük. Konklúzióink szerint az a) esetben egész nagy tömegarányig az alaplómódus a meghatározó, a b) esetben viszont már kisebb tömegarányok mellett sem elhanyagolhatók a felharmonikusok.

Bár a normál módusokkal elvben minden lehetséges helyzet leírható, a gyakorlatban problémát jelenthet ezek felösszegzése, azaz a mozgás követése. Ez nem merül fel a hullámegyenlet egy másfajta megoldása esetén, amelynek lényege, hogy a rugót modellező rugalmas közegen jobbra és balra haladó hullámokat a rugó két végét leíró peremfeltételeknek megfelelően összeillesztjük. Igaz, hogy itt többet kell számolni, de a mozgás lényegében tetszőleges ideig nyomon követhető. A b) esetet ezzel a módszerrel is megvizsgálva bemutattuk, hogy a rugó tényleges mozgását az alakítja ki, hogy a két vége között egy hullámfront ide-oda verődik.

Vizsgálódásunkat egy, a b) helyzethez illeszthető feladat megoldásával zártuk: megnéztük, hogy mikor és mekkora sebességgel löki el a rugó a végén lévő testet, ha az nincs rögzítve hozzá. Nem igazán meglepő eredményünk szerint a test a kezdősebességénél mindig kisebb sebességgel repül el, ezért valamennyi energia mindig ottmarad a rugóban. A konkrét eredmény mellett ez a feladat jól illusztrálja, hogy mennyiben hasonlít az M mozgása a harmonikusra, ha m/M elég kicsi, és hogy mennyire nem hasonlít arra, ha a tömegarány nagyobb.

A FIZIKA TANÍTÁSA

ALADDINA CSODALÁMPÁJA

A 19. Ifjúsági Tudományos és Innovációs Tehetségkutató Versenyen egy elektrokémiai témájú munkával indultam; mentorom ösztönzésére esett erre a választásom. Olyan pályamunkát szerettem volna készíteni, amelynek gyakorlati felhasználása is lehet és egyszerű körülmények között is elkészíthető. Úgy gondoltam, bőrünk savasságát hasznosítani lehetne, azaz galván-

Schronk Edina
Bolyai János Gimnázium
és Kereskedelmi Szakközépiskola, Ócsa

elektromos úton elektromos feszültség és áram termelhető; mégpedig úgy, hogy fogyasztóként egy lámpát (LED-et) is világításra tudjunk bírni. Elképzelésem szerint a lámpa nem csupán fényforrásként lenne használható, hanem „játékos” diagnosztikai eszközként is, hiszen bőrünk pillanatnyi elektrokémiai állapota szerint működik.